MATHEMATISCHE ANNALEN

143. BAND

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN · DAVID HILBERT · OTTO BLUMENTHAL · ERICH HECKE

143. BAND

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1961

Unveränderter Nachdruck 1975

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 143. Bandes

KLINGEN, H.
Math. Annalen 143, 1—17 (1961)

Quotientendarstellung Hermitescher Modulfunktionen durch Modulformen

Von

HELMUT KLINGEN in Marburg

Gegeben sei ein imaginär-quadratischer Zahlkörper Σ. Die Hermitesche Modulgruppe n-ten Grades Γ besteht aus allen in Σ ganzen $2n$-reihigen Lösungen M der Matrizengleichung

$$(1) \qquad \bar{M}' I M = I\,, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist E die n-reihige Einheitsmatrix, und $\bar{M}'$ bedeutet die zu M transponierte konjugiert komplexe Matrix. Einen n^2-dimensionalen Darstellungsraum für Γ bekommt man folgendermaßen. Man nehme eine n-reihige komplexe Matrixvariable Z. Zerlegt man $Z = X + iY$ in die Hermiteschen Bestandteile X und Y (die wir kurz „Hermiteschen Real- und Imaginärteil von Z" nennen), so sei

$$\mathfrak{H}_n = \{Z = X + iY \mid Y > 0\}$$

die verallgemeinerte obere Halbebene. $\mathfrak{H}_n$ ist eines der von E. CARTAN klassifizierten irreduziblen symmetrischen Gebiete. Die analytischen Automorphismen von $\mathfrak{H}_n$ lauten bekanntlich [5]

$$(2) \qquad W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad (\text{abgekürzt: } W = M\langle Z\rangle)\,,$$

wobei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ eine beliebige komplexe Lösung von (1) ist. Diese bilden die Hermitesch-symplektische Gruppe. Die Abbildungen (2) liefern für $M \in \Gamma$ eine diskontinuierliche Darstellung von Γ in $\mathfrak{H}_n$. Im Falle $n = 1$ fallen diese Begriffe mit obere Halbebene, elliptische Modulgruppe usw. zusammen. Fortan sei $n > 1$.

H. BRAUN hat in mehreren Arbeiten [1—3] eine Theorie der automorphen Funktionen zu Γ entwickelt, welche in Analogie zu den Modulfunktionen n-ten Grades von SIEGEL steht. Dabei hat man im vorliegenden Fall gegenüber den Siegelschen Untersuchungen verschiedentlich neue Methoden zu entwickeln, die letzten Endes durch die Tatsache begründet sind, daß die Klassenzahl von Σ größer als 1 sein kann. Wie bei den Modulfunktionen n-ten Grades erklärte man die Hermiteschen Modulfunktionen [6] zunächst als Quotienten von Modulformen im Großen und zeigte dann, daß diese einen algebraischen Funktionenkörper vom Transzendenzgrad n^2 bilden. Diese Betrachtungsweise war

unbefriedigend. Man möchte gerne Modulfunktionen erklären lediglich als meromorphe Funktionen, die bei Modulsubstitutionen invariant sind, und für die so definierten Funktionen die Darstellung als Quotient von Modulformen *beweisen*. Dies ist in jüngster Zeit für den Siegelschen Fall zunächst mit der Methode der Kompaktifizierung und dann durch C. L. SIEGEL [7] selbst in einem klassischen Beweis durchgeführt worden, der auf einem wichtigen Satz über Spitzenformen beruht. Bei den Hermiteschen Modulfunktionen ist bisher kein Beweis der analogen Aussage bekannt. Die Durchführung der Kompaktifizierung dürfte hier zumindest nur sehr mühsam vorzunehmen sein. Im folgenden möchte ich zeigen, wie man die kürzlich erschienene Siegelsche Beweisidee für die Hermiteschen Modulfunktionen ansetzen kann. Der wesentliche Gedankengang ist der gleiche wie bei C. L. SIEGEL, jedoch möchte ich auf folgenden Unterschied hinweisen. Im Hermiteschen Fall hat man die Humbertsche Reduktionstheorie [4] an Stelle der Minkowskischen Reduktionstheorie zu verwenden. Nun genügen nicht die im Sinne von HUMBERT reduzierten Matrizen selbst analogen Bedingungen wie bei MINKOWSKI; man hat vielmehr die reduzierten Formen noch einer weiteren nicht zur unimodularen Gruppe gehörigen Transformation zu unterwerfen, um zu den Eigenschaften der nach MINKOWSKI reduzierten Formen zu kommen. Das bedingt, daß man neben der Modulgruppe noch weitere nicht zu ihr gehörige Abbildungen zu berücksichtigen hat und das Funktionsverhalten bei diesen zusätzlichen Substitutionen studieren muß. Auch besteht der Fundamentalbereich aus mehreren Teilen, die getrennt liegen können. Man hat daher die Randpunkte des Fundamentalbereichs, welche im Siegelschen Fall einheitlich klassifiziert werden können, nach verschiedenen Gesichtspunkten zu ordnen. Spitzenformen sind im Hermiteschen Fall durch stärkere Forderungen über das Verschwinden im Unendlichen charakterisiert. Diese Unterschiede machen sich natürlich bei der Anwendung des Maximumprinzips bemerkbar. Im folgenden soll ausgeführt werden, wie man diese zusätzlichen Komplikationen überwinden kann, um zu dem gewünschten Resultat zu kommen.

Schließlich seien noch einige geläufige Bezeichnungen angeführt. Obere Indizes bei Matrizen $A^{(r,s)}$ geben die Zeilen- und Spaltenzahl an, $A^{(r,r)} = A^{(r)}$. Die Elemente einer Matrix A werden durchweg mit dem entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben a_{ik} bezeichnet und zur Abkürzung $a_{kk} = a_k$ gesetzt. $A\{B\}$ bedeutet stets $\tilde{B} A B$. Die Determinante einer Matrix A bzw. ihr absoluter Betrag werde mit $\det A$ bzw. $\operatorname{abs} A$ benannt. Ein Matrizenpaar $C^{(n)}, D^{(n)}$ heißt Hermitesch, falls $C\tilde{D} = D\tilde{C}$ und der Rang $(C, D) = n$ ist. Ein teilerfremdes Hermitesches Paar C, D ist ein in Σ ganzes Hermitesches Paar, für welches der g. g. T. der n-reihigen Unterdeterminanten von (C, D) eins ist. Die „Zeilen" A, B und C, D von Modulmatrizen sind solche teilerfremden Hermiteschen Paare.

Fortan nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Diskriminante Δ von Σ von -3 und -4 verschieden ist, so daß ± 1 die einzigen Einheiten in Σ sind. Die ausgeschlossenen Fälle sind in Wahrheit einfacher zu behandeln, weil dann die Klassenzahl eins ist.

§ 1. Der Fundamentalbereich der Hermiteschen Modulgruppe

Zur Konstruktion eines handlichen Fundamentalbereichs benötigt man zunächst die Reduktionstheorie von P. HUMBERT [4] in einem imaginär-quadratischen Zahlkörper Σ. Der Humbertsche reduzierte Bereich

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} \mathfrak{R}(Q)$$

ist die Vereinigung von gewissen endlich vielen konvexen Pyramiden $\mathfrak{R}(Q)$ im Raum $\mathfrak{T}$ der n-reihigen positiv definiten Hermiteschen Matrizen T. Mit Hilfe einer nicht-ausgearteten ganzen Matrix Q aus Σ ist $\mathfrak{R}(Q)$ durch

$$\mathfrak{R}(Q) = \{T \in \mathfrak{T} \mid T\{\mathfrak{x}\} \geqq T\{\mathfrak{q}_k\} \text{ für alle ganzen Spalten } \mathfrak{x} \text{ aus } \Sigma$$
$$\text{mit Rang } (\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{k-1}, \mathfrak{x}) = k;\ \mathrm{Re}(\bar{\mathfrak{q}}_1 T \mathfrak{q}_k) \geqq 0;\ k = 1, 2, \ldots, n\}$$

erklärt. Dabei sind $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ die Spalten von Q. Im Unterschied zum rationalen Fall haben nicht die Bereiche $\mathfrak{R}(Q)$ selbst analoge Eigenschaften wie die nach MINKOWSKI reduzierten Formen, sondern vielmehr die Bereiche $\mathfrak{R}_Q = \mathfrak{R}(Q)\{Q\}$ $(Q \in \mathfrak{Q})$. $\mathfrak{R}_Q$ wird dann beschrieben durch

$$\mathfrak{R}_Q = \{H \in \mathfrak{T} \mid H\{\mathfrak{y}\} \geqq h_k \text{ für alle Spalten } \mathfrak{y} \text{ mit ganzem } Q\mathfrak{y} \text{ in } \Sigma$$
$$\text{und } (y_k, \ldots, y_n) \neq 0;\ \mathrm{Re}\, h_{1k} \geqq 0;\ k = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{3}$$

Es kann vorkommen, daß zwei verschiedene Pyramiden $\mathfrak{R}(Q_1)$, $\mathfrak{R}(Q_2)$ gemeinsame Randpunkte besitzen.

Man bezeichne mit H_k den aus den ersten k Reihen von H gebildeten k-ten Abschnitt von H. Dann ergibt sich aus (3) für $H \in \mathfrak{R}_E$ die Minkowskische Ungleichung

$$\det H_k \leqq h_1 \ldots h_k \leqq c_1 \det H_k \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

und

$$|h_{kl}| \leqq c_1 h_k \quad (1 \leqq k < l \leqq n), \qquad h_k \leqq h_{k+1} \quad (k = 1, \ldots, n-1) \tag{5}$$

mit einer nur von n und Σ abhängigen natürlichen Zahl c_1. Dies gilt insbesondere für alle Bereiche $\mathfrak{R}_Q$, da $\mathfrak{R}_Q \subset \mathfrak{R}_E$.

Bezeichnet man mit H^d die aus den Diagonalelementen von H aufgebaute Diagonalmatrix, so haben H und H^d und ihre Inversen die gleiche Größenordnung für alle $H \in \mathfrak{R}_E$; d. h. es gibt eine nur von n und Σ abhängige natürliche Zahl c_2 mit

$$c_2 H > H^d > c_2^{-1} H, \quad c_2 H^{-1} > (H^d)^{-1} > c_2^{-1} H^{-1} \qquad (H \in \mathfrak{R}_E). \tag{6}$$

Wegen (5) ist nämlich $W = H\{(H^d)^{-1/2}\}$ elementweise durch c_1 nach oben beschränkt. Andererseits zeigt (4), daß $\det W \geqq c_1^{-1}$ ist. Folglich liegen die Eigenwerte von W zwischen nur von n und Σ abhängigen positiven Zahlen. Dies begründet (6).

Weiterhin denke man sich die endliche Menge $\mathfrak{Q}$ fest gewählt, so daß sie als durch Σ und n bestimmt gedacht werden kann.

Hilfssatz 1: *Seien $\hat{T} \in \Re(Q_1)$, $T^* \in \Re(Q_2)$ $(Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q})$ und $T^* = T\{U\}$ mit unimodularem U; ferner $\hat{T}\{Q_1\} = \hat{H}$, $T^*\{Q_2\} = H^*$. Dann gilt*

$$c_3 H^{*d} > \hat{H}^d > c_3^{-1} H^{*,d}$$

mit einer nur von n und Σ abhängigen natürlichen Zahl c_3.

Beweis: Aus Symmetriegründen genügt der Nachweis der ersten Ungleichung. Mit $V = Q_1^{-1} U Q_2$ gilt $H^* = \hat{H}\{V\}$ und $H^*, \hat{H} \in \Re_E$. Ist $\mathfrak{v}$ die q-te Spalte von V, so bekommt man unter Verwendung von (6):

$$c_2 h_q^* = c_2 \hat{H}\{\mathfrak{v}\} > \hat{H}^d\{\mathfrak{v}\} \geqq \hat{h}_p |v_{pq}|^2 \qquad (p, q = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Ist k eine natürliche Zahl mit $1 \leqq k \leqq n$, so ist wegen $\det V \neq 0$ mindestens eine der Zahlen $|v_{pq}|$ $(p = k, \ldots, n; q = 1, \ldots, k)$ von Null verschieden, also $\geqq \mathrm{abs}^{-1} Q_1$. Somit ist nach (5) und (7)

$$c_2 h_k^* \geqq c_2 h_q^* > \hat{h}_p |v_{pq}|^2 \geqq \hat{h}_p \,\mathrm{abs}^{-2} Q_1 \geqq \hat{h}_k \,\mathrm{abs}^{-2} Q_1 .$$

Folglich gilt die Behauptung für

$$c_3 = c_2 \operatorname*{Max}_{Q \in \mathfrak{Q}} (\mathrm{abs}^2 Q) .$$

Hilfssatz 2: *Seien $\hat{T} \in \Re(Q_1)$, $T^* \in \Re(Q_2)$ $(Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q})$ und $T^* = \hat{T}\{U\}$ mit unimodularem U; ferner $\hat{T}\{Q_1\} = \hat{H}$, $T^*\{Q_2\} = H^*$ und $\hat{h}_{r+1} > c_3^2 \hat{h}_r$ für ein gewisses r aus $1 \leqq r < n$. Dann ist*

$$U = Q_1 \begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(n-r,r)} & * \end{pmatrix} Q_2^{-1}$$

und $\hat{h}_{r+1} = h_{r+1}^*$.

Beweis: Nach (7) und Hilfssatz 1 ist

$$c_3 c_2 \hat{h}_q > c_2 h_q^* > \hat{h}_p |v_{pq}|^2 \qquad (p, q = 1, \ldots, n)$$

und nach (5)

$$\hat{h}_q \leqq \hat{h}_r \quad (q = 1, \ldots, r), \quad \hat{h}_p \geqq \hat{h}_{r+1} > c_3^2 \hat{h}_r \quad (p = r + 1, \ldots, n).$$

Also

$$|v_{pq}| < \left(\frac{c_2}{c_3}\right)^{1/2} \leqq \mathrm{abs}^{-1} Q_1 .$$

Somit ist $v_{pq} = 0$ für $q = 1, \ldots, r$; $p = r + 1, \ldots, n$. Schließlich verschwinden infolgedessen in der $(r + 1)$-ten Spalte von V und V^{-1} nicht alle letzten $n - r$ Elemente. Ferner sind $Q_1 V$ und $Q_2 V^{-1}$ ganz. Wendet man für diese Spalten die Reduktionsbedingungen (3) an, so findet man

$$h_{r+1}^* \leqq \hat{h}_{r+1} \leqq h_{r+1}^* ,$$

also $\hat{h}_{r+1} = h_{r+1}^*$.

Hilfssatz 3: *Sei $\hat{T} \in \Re(Q_1)$, $\hat{T}\{Q_1\} = \hat{H}$ und*

$$\hat{h}_{r+1} > 4(1 + c_1)^2 c_3^2 \hat{h}_r \tag{8}$$

für ein gewisses r mit $1 \leqq r < n$. H entstehe aus $\hat{H}$, indem man die Elemente $\hat{h}_{r,r+1}$ und $\hat{h}_{r+1,r}$ durch $-\hat{h}_r$ ersetzt. Dann ist $H \in \mathfrak{T}$. Seien ferner $T = H\{Q_2^{-1}\}$

und $T^* = T\{U\} \in \mathfrak{R}(Q_3)$ *mit unimodularem* U. *Dann gilt mit* $H^* = T^*\{Q_3\}$

(9) $$2c_3 H^{*d} > \hat{H}^d > c_3^{-1} H^{*d}$$

und

(10) $$U = Q_2 \begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(n-r,r)} & * \end{pmatrix} Q_3^{-1}$$

sowie $\hat{h}_{r+1} > h^*_{r+1}$. *Dabei sind* $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathfrak{Q}$.

Beweis: Auf Grund von (8) und (5) ist

$$H - \hat{H} + \frac{1}{2c_1} H^d > 0$$

und nach (6) $c_2 \hat{H} > H^d$, also $2c_2 H > H^d > 0$; somit zunächst $H \in \mathfrak{T}$. Auch H^* ist aus $\mathfrak{R}_E$, also nach (6) $c_2 H^* > H^{*d}$ und $H^* = H\{Q_2^{-1} U Q_3\}$. Nun lassen sich die Schlüsse aus den Hilfssätzen 1 und 2 wiederholen, um (9) und (10) zu erhalten. Schließlich läßt sich der Nachweis von $\hat{h}_{r+1} > h^*_{r+1}$ folgendermaßen führen. Es sei $\mathfrak{x}$ die Spalte, welche an der r-ten und $(r+1)$-ten Stelle 1 und sonst überall 0 enthält; man setze

$$\mathfrak{y} = Q_3^{-1} U^{-1} Q_2 \mathfrak{x}\,.$$

Wegen der speziellen Gestalt (10) von U ist $\mathfrak{y}$ eine bei den Reduktionsbedingungen (3) für $\mathfrak{R}_{Q_3}$ zulässige Spalte. Wendet man diese für $H^* \in \mathfrak{R}_{Q_3}$ an, so findet man

$$h^*_{r+1} \leqq H^*\{\mathfrak{y}\} = H^*\{Q_3^{-1} U^{-1} Q_2 \mathfrak{x}\} = H\{\mathfrak{x}\} = \hat{h}_{r+1} - \hat{h}_r < \hat{h}_{r+1}\,.$$

In der oberen Halbebene $\mathfrak{H}_n$ kann man nach [1] durch folgende Bedingungen einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ der Hermiteschen Modulgruppe charakterisieren:

(11) $\quad \operatorname{abs}(CZ + D) \geqq 1 \quad$ für alle teilerfremden Hermiteschen Paare C, D,

(12) $$Y \in \mathfrak{R}\,, \quad |\dot{x}_{kl}|, |\ddot{x}_{kl}| \leqq \frac{1}{2}\,.$$

Dabei ist die komplexe Matrixvariable Z in $\mathfrak{H}_n$ in Hermiteschen Realteil X und Imaginärteil Y zerlegt. $\dot{X}$ und $\ddot{X}$ sind die durch

$$X = \dot{X} + \omega \ddot{X} \quad \left(\omega = \frac{\Delta + \Delta^{1/2}}{2}\right)$$

eindeutig bestimmten reellen Matrizen. Es gilt

$$\ddot{X}' = -\ddot{X}\,, \quad \dot{X}' = \dot{X} + (\omega + \bar{\omega})\ddot{X}\,.$$

In [1] ist die Bedingung $Y \in \mathfrak{R}$ durch $Y^{-1} \in \mathfrak{R}$ ersetzt. Für die folgenden Untersuchungen ist aber die Reduktion von Y handlicher.

Der Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ ist abgeschlossen; dies ergibt sich aus

Hilfssatz 4 *(vgl. Lemma* 3 [1]*): Sei* $Z \in \mathfrak{F}$, *also* $Y \in \mathfrak{R}(Q)$ *für ein gewisses* $Q \in \mathfrak{Q}$, *und* $Y\{Q\} = H$. *Dann gilt* $h_1^2 > \frac{1}{2}$.

Beweis: Aus den Reduktionsbedingungen (3) wird $\mathfrak{R}_Q = \mathfrak{R}_{UQ}$ für beliebige unimodulare U ersichtlich. Folglich ist die Behauptung unabhängig von der

speziellen Wahl der Menge $\mathfrak{Q}$. Man kann insbesondere einen beliebigen linksseitigen unimodularen Faktor bei Q anbringen. O. B. d. A. sei daher die erste Zeile von Q' von der Gestalt $(b, a, 0, \ldots, 0)$, wobei $a = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $b = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ mit ganzen Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}) = 1$. $\mathfrak{N}$ bezeichnet dabei die Idealnorm in Σ. Es sei

$$Z = \begin{pmatrix} Z_0^{(2)} & Z_2 \\ Z_3 & Z_1^{(n-2)} \end{pmatrix}, \quad Z_0 = X_0 + i Y_0, \quad x = X_0 \left\{ \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \right\}.$$

Die ganzen rationalen Zahlen g, u, v werden gemäß

$$(13) \qquad |bg + x| \leqq \frac{b}{2}, \quad bu + \mathfrak{N}(\mathfrak{b}) v = 1$$

bestimmt und $r = \bar{a} v (g + 1)$, $s = bu(g + 1) - 1$ gesetzt. Somit wird

$$bs + ar = bg.$$

Man setze

$$C = \begin{pmatrix} C_1^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1^{(2)} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

mit

$$C_1 = PC_2, \; D_1 = PD_2, \; C_2 = \begin{pmatrix} b & \bar{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D_2 = \begin{pmatrix} s & r \\ 1 & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a}{b} & \frac{a}{b} \end{pmatrix}.$$

Es läßt sich leicht verifizieren, daß dann C, D ein ganzes teilerfremdes Hermitesches Paar bilden, weil

$$C_1 F - D_1 = E$$

mit der ganzen Matrix

$$F = (g + 1) \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

ist. Nun setze man $G = \begin{pmatrix} b & -\bar{a} \\ a & b \end{pmatrix}$ und benutze (11)

$$\operatorname{abs}(CZ + D) = \operatorname{abs}(C_1 Z_0 + D_1) = \operatorname{abs}(PG^{-1}) \operatorname{abs}(C_2 Z_0 G + D_2 G) \geqq 1.$$

H und $C_2 Y_0 B$ haben das gleiche erste Diagonalelement h_1. Folglich besagt diese Ungleichung

$$h_1^2 + (bg + x)^2 \geqq b^2,$$

also wegen (13)

$$h_1^2 \geqq \frac{3b^2}{4} \geqq \frac{1}{2}.$$

Nun wollen wir die Randpunkte von $\mathfrak{F}$ klassifizieren. Für nicht-ausgeartete Matrizen Q erklären wir zunächst die Q-Ordnung einer Modulsubstitution durch die

Definition: *Eine Modulsubstitution $W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ hat die Q-Ordnung q, wenn die q-te Spalte von $C\tilde{Q}^{-1}$ ungleich Null ist und die folgenden Spalten verschwinden.*

Definition: *Ein Randpunkt Z von $\mathfrak{F}$ hat die Q-Ordnung q, falls $Y \in \mathfrak{R}(Q)$ und $\operatorname{abs}(CZ + D) = 1$ für mindestens eine Modulsubstitution der Q-Ordnung q, aber keine einer höheren Q-Ordnung ist.*

Gehört also der Hermitesche Imaginärteil Y eines Randpunktes Z von $\mathfrak{F}$ mehreren Humbertschen Pyramiden an, etwa $\mathfrak{R}(Q_1)$, $\mathfrak{R}(Q_2)$, ..., so sind Z eine Q_1-Ordnung, Q_2-Ordnung, ... zugeordnet.

Hilfssatz 5: *Sei $Z \in \mathfrak{F}$ ein Randpunkt der Q-Ordnung $q > 0$ und $Y\{Q\} = H$. Dann gilt*

$$h_q < 2c_3^2 .$$

Beweis: Es gibt eine Modulsubstitution $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ der Q-Ordnung q mit $\mathrm{abs}(CZ + D) = 1$. Daran ändert sich nichts, wenn man M ersetzt durch

$$\begin{pmatrix} \tilde{U} & SU^{-1} \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} M$$

mit unimodularem U und ganzem Hermiteschen S. Folglich kann man o. B. d. A. annehmen, daß auch

$$Z^* = M\langle Z\rangle \in \mathfrak{F}$$

ist. Dann gilt für den Hermiteschen Imaginärteil Y^* von Z^*

$$Y^{*-1} = Y^{-1}\{X\tilde{C} + \tilde{D}\} + Y\{\tilde{C}\} .$$

Es sei etwa $Y^* \in \mathfrak{R}(Q_1)(Q_1 \in \mathfrak{Q})$; man führe in obiger Gleichung $H, H^* = Y^*\{Q_1\}$ und $F = Q_1^{-1} C \tilde{Q}^{-1}$ ein,

$$H^{*-1} = H^{-1}\{\tilde{Q}(X\tilde{C} + \tilde{D})\tilde{Q}_1^{-1}\} + H\{\bar{F}\} ,$$

und bekommt nach (6) und Hilfssatz 4

$$H^d\{\bar{F}\} < c_2 H\{\bar{F}\} \leq c_2 H^{*-1} < c_2^2 (H^{*d})^{-1} < 2c_2^2 E . \tag{14}$$

Nun ist aber die q-te Spalte von F von Null verschieden, also $|f_{kq}| \geq \mathrm{abs}^{-1}(Q Q_1)$ für mindestens einen Index k. (14) ergibt dann bei Betrachtung des k-ten Diagonalelementes

$$h_q < 2c_2^2 \,\mathrm{abs}^2(Q Q_1) \leq 2c_3^2 .$$

Hilfssatz 6: *Es sei $Y \in \mathfrak{R}(Q)$ $(Q \in \mathfrak{Q})$, $|x_{kl}|, |\ddot{x}_{kl}| \leq \frac{1}{2}$, ferner* $\mathrm{abs}(CZ + D) \geq 1$ *für alle Modulsubstitutionen der Q-Ordnung $q = 1, \ldots, r$ erfüllt und das $(r+1)$-te Diagonalelement von $H = Y\{Q\}$*

$$h_{r+1} \geq 2c_3^2 . \tag{15}$$

Dann gehört Z zu $\mathfrak{F}$.

Beweis: Es ist lediglich zu zeigen, daß (11) für alle teilerfremden Hermiteschen Paare gilt. M sei so bestimmt, daß $Z^* = M\langle Z\rangle \in \mathfrak{F}$, also $Y^* \in \mathfrak{R}(Q_1)$ für ein geeignetes $Q_1 \in \mathfrak{Q}$. Dann gilt wieder die Ungleichung (14), also

$$h_l |f_{kl}|^2 > 2c_2^2 \qquad (k, l = 1, \ldots, n) .$$

Nun ist aber nach (5) und (15) $h_l \geq 2c_3^2$ für $l = r+1, \ldots, n$ und damit

$$|f_{kl}| < \frac{c_2}{c_3} \cdot \frac{1}{\underset{Q \in \mathfrak{Q}}{\mathrm{Max}}\,(\mathrm{abs}^2 Q)} \qquad (k = 1, \ldots, n;\ l = r+1, \ldots, n) .$$

Da aber $\det(QQ_1)F$ ganz in Σ ist, folgt $f_{kl} = 0$ ($k = 1, \ldots, n$; $l = r + 1, \ldots, n$). M besitzt also eine Q-Ordnung $\leqq r$, und damit ist nach Voraussetzung

$$\operatorname{abs}(CZ + D) \geqq 1 .$$

Folglich ist $\det Y^* \leqq \det Y$; denn es gilt stets

$$Y^*\{CZ + D\} = Y .$$

Aber $\det Y^*$ ist wegen (11) maximal unter allen zu Z^* bezüglich der Modulgruppe äquivalenten Punkten, also hat auch $\det Y$ diese Eigenschaft, d. h.

$$\operatorname{abs}(CZ + D) \geqq 1$$

für alle Paare teilerfremder Hermitescher Matrizen C, D.

Schließlich noch ein Hilfssatz über Modulsubstitutionen einer gegebenen Q-Ordnung.

Hilfssatz 7: *Sei* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *eine Modulsubstitution einer* Q*-Ordnung* $q \leqq r$. *Man zerlege*

$$Z\{Q\} = \begin{pmatrix} Z_0^{(q)} & Z_2 \\ Z_2' & Z_1 \end{pmatrix} .$$

Dann ist $\det(CZ + D)$ *nur abhängig von* Z_0.

Beweis: Da $\det(CZ + D) = \det^{-1} Q \det(C\tilde{Q}^{-1}Z\{Q\} + DQ)$ ist, kann man $Q = E$, (C, D) als Hermitesches Paar in Σ und $C = (* \; 0^{(n, n-r)})$ annehmen. Aus den Sätzen über lineare Gleichungssysteme folgt die Existenz zweier umkehrbarer komplexer Matrizen $V^{(n)}$, $K^{(r)}$, so daß

$$VC\bar{W} = \begin{pmatrix} C_1^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad (g = \operatorname{Rang} C)$$

wird. Man setze

$$VDW^{-1} = \begin{pmatrix} D_1^{(g)} & * \\ D_3 & D_2 \end{pmatrix} .$$

Dann ist auch $VC\bar{W}$, VDW^{-1} ein Hermitesches Paar, also $D_3 = 0$. Somit wird

$$\begin{aligned} \det(V(CZ + D)W^{-1}) &= \det(VC\bar{W}\,Z\{W^{-1}\} + VDW^{-1}) \\ &= \det(C_1 Z_0\{K_0\} + D_1) \det D_2 , \end{aligned}$$

wobei $K_0^{(r,g)}$ aus den ersten g Spalten von K besteht.

§ 2. Modulformen und Modulfunktionen

Unter einer Hermiteschen Modulform $\varphi(Z)$ vom Gewicht g versteht man eine in $\mathfrak{H}_n$ meromorphe Funktion, die bei Modulsubstitutionen M das Transformationsverhalten

$$\varphi(M\langle Z\rangle) = \det{}^g(CZ + D)\,\varphi(Z) \tag{16}$$

besitzt. Wir wollen die Modulformen bezüglich Holomorphie untersuchen. Dabei genügt es, die Holomorphie von $\varphi(Z)$ in einem kleinen Teil von $\mathfrak{H}_n$ zu fordern, sie folgt dann für ganz $\mathfrak{H}_n$. Dabei hat man natürlich (16) zu benutzen

und zusätzlich zum rationalen Fall die nicht zur Modulgruppe gehörigen Automorphismen von $\mathfrak{H}_n$,

$$Z \to Z\{Q\} \qquad (Q \in \mathfrak{Q})$$

zu berücksichtigen.

Bekanntlich hat $\mathfrak{R}$ unter seinen Bildern nur endlich viele Nachbarn, etwa $\mathfrak{R}\{U_1\}, \ldots, \mathfrak{R}\{U_m\}$. Die Elemente von $\mathfrak{Q}$ seien $Q_1, \ldots, Q_j$. Man nehme ein Gebiet $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{T}$, dessen abgeschlossene Hülle ganz in $\mathfrak{T}$ liegt und welches die Punkte

$$\bar{Q}_\nu^{-1} Q_\nu^{-1}, \quad U_\mu \bar{U}_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, j;\ \mu = 1, \ldots, m)$$

und E enthält; ferner im X-Raum den Würfel

$$\mathfrak{C}: \qquad |\dot{x}_{kl}| \leqq \frac{1}{2}\,(k \leqq l)\,, \quad |\ddot{x}_{kl}| \leqq \frac{1}{2}\,(k < l)$$

und bilde

$$\mathfrak{G}^* = \{Z = X + \frac{i}{2c_1} Y \mid X \in \mathfrak{C},\ Y \in \mathfrak{G}\}\,.$$

Hilfssatz 8: *$\varphi(Z)$ sei eine in $\mathfrak{G}^*$ holomorphe Modulform. Dann ist $\varphi(Z)$ überall holomorph in $\mathfrak{H}_n$ und besitzt dort eine Fourierentwicklung*

$$\varphi(Z) = \sum_{F \geqq 0} a(F) e^{2\pi i \sigma(FZ)}\,,$$

wobei σ die Spur bezeichnet und die Summation über alle halbpositiven halbganzen Hermiteschen Matrizen F zu erstrecken ist.

Dabei heißt eine Hermitesche Matrix F halbganz, wenn f_{kk} und $\Delta^{1/2} f_{kl}\,(k \neq l)$ ganz in Σ sind. Es sei bemerkt, daß mit F auch $F\{U\}$ bei festem unimodularen U über alle halbganzen Hermiteschen Matrizen läuft.

Beweis: Zerlegt man analog $X = \dot{X} + \omega \ddot{X}$ auch $Y = \dot{Y} + \omega \ddot{Y}$ mit reellen $\dot{Y}$, $\ddot{Y}$ und führt

$$\dot{Z} = \dot{X} + i\dot{Y}\,, \quad \ddot{Z} = \ddot{X} + i\ddot{Y}$$

ein, so gilt

$$\dot{Z}' = \dot{Z} + (\omega + \bar{\omega})\ddot{Z}\,, \quad \ddot{Z}' = -\ddot{Z}\,,$$

so daß man $\dot{z}_{kl}(k \leqq l)$, $\ddot{z}_{kl}(k < l)$ als Koordinaten in $\mathfrak{H}_n$ verwenden kann. (16) liefert insbesondere

$$\begin{aligned} &(17) \qquad & \varphi(Z\{U\}) &= \det{}^{g} U\, \varphi(Z) \quad && \text{für unimodulares } U\,, \\ && \varphi(Z + S) &= \varphi(Z) && \text{für ganze Hermitesche } S\,. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besagt, daß φ in den neuen Koordinaten $\dot{z}_{kl}$, $\ddot{z}_{kl}$ die Periode 1 besitzt. Also existiert in $\mathfrak{G}^*$ eine Fourierentwicklung von φ bezüglich $\dot{z}_{kl}$, $\ddot{z}_{kl}$, die sich in Z bei Verwendung des obigen Begriffes „halbganz" in der Form

$$(18) \qquad \varphi(Z) = \sum_{F} a(F) e^{2\pi i \sigma(FZ)} \qquad (Z \in \mathfrak{G}^*)$$

schreibt. Dabei hat man zunächst über alle halbganzen Hermiteschen Matrizen F zu summieren. Obige Fourierentwicklung betrachte man in der Umgebung der Punkte

$$\frac{i}{2c_1} E \quad \text{und} \quad \frac{i}{2c_1} U_\mu \bar{U}_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

aus $\mathfrak{S}^*$. Wegen (17) und der Eindeutigkeit der Fourierentwicklung bekommt man

$$a(F\{U\}) = \det{}^v U \, a(F) \tag{19}$$

zunächst für $U = U_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, m)$. Die U_μ erzeugen aber die volle unimodulare Gruppe n-ten Grades in Σ, also gilt (19) für beliebiges unimodulares U. Für die Fourierkoeffizienten $a(F)$ gilt

$$a(F) = \int\limits_{\mathfrak{C}} \varphi(Z) e^{-2\pi i \sigma(FZ)} \{d\dot{X}\} \{d\ddot{X}\} \quad \left(Z = X + \frac{i}{2c_1} E\right).$$

Mit

$$c = \operatorname*{Max}_{X \in \mathfrak{C}} \left| \varphi\left(X + \frac{i}{2c_1} E\right)\right|$$

gilt also die Abschätzung

$$|a(F)| \leq c e^{\frac{\pi}{c_1} \sigma(F\{U\})}$$

zunächst für $U = E$ und dann vermöge (19) für beliebige unimodulare U. Daraus wird ersichtlich, daß $a(F) = 0$ für $F \ngeq 0$. Ist nämlich die Hermitesche Form $F\{\mathfrak{x}\}$ überhaupt negativer Werte fähig, so ist leicht zu sehen, daß es dann auch teilerfremde Spalten $\mathfrak{x} = \mathfrak{u}$ aus Σ gibt mit $F\{\mathfrak{u}\} < 0$. Ergänzt man ein solches $\mathfrak{u}$ zu einer unimodularen Matrix U, so hat $F^* = F\{U\}$ ein negatives erstes Diagonalelement. Übt man dann noch die unimodulare Transformation

$$x_1 \to x_1 + u x_2, \quad x_k = x_k \qquad (k = 2, \ldots, n)$$

aus mit ganz rationalem u, so strebt

$$\sigma(F^*) \to -\infty \quad \text{für} \quad u \to \infty.$$

Also folgt $a(F) = 0$, und man kann in (18) die Summation auf $F \geq 0$ einschränken. Dann aber konvergiert die Fourierreihe in Wahrheit sogar gleichmäßig auf ganz $\mathfrak{F}$. Sei nämlich $Z \in \mathfrak{F}$, also $X \in \mathfrak{C}$, $Y \in \mathfrak{R}(Q_k)$ und $Y\{Q_k\} = H$ gesetzt. Auf Grund von (6) und Hilfssatz 4 gilt

$$H > c_2^{-1} H^d > \frac{1}{2c_1} E,$$

also

$$Y > \frac{1}{2c_1} E\{Q_k^{-1}\}$$

und $\sigma(FY) \geq \frac{1}{2c_1} \sigma(F \tilde{Q}_k^{-1} Q_k^{-1})$. Die Holomorphie überträgt sich von $\mathfrak{F}$ auf ganz $\mathfrak{H}_n$ durch das geforderte Transformationsverhalten (16).

Unter einer Hermiteschen Modulfunktion $f(Z)$ versteht man eine in $\mathfrak{H}_n$ meromorphe Funktion, welche invariant bei Γ ist,

$$f(M\langle Z\rangle) = f(Z) \qquad (M \in \Gamma).$$

Früher [6] waren die Hermiteschen Modulfunktionen eingeführt als Quotienten von ganzen (d. h. in ganz $\mathfrak{H}_n$ holomorphen) Modulformen, und dann war gezeigt worden, daß sie einen algebraischen Funktionenkörper vom Transzendenzgrad n^2 bilden. In Wahrheit reicht die obige schwächere Forderung der Meromorphie und Invarianz bei Γ zur Charakterisierung der Hermiteschen Modulfunktionen hin. Dies beinhaltet der Satz, welcher das Hauptresultat der Untersuchung darstellt.

Satz: *Jede Hermitesche Modulfunktion ist Quotient zweier ganzer Modulformen.*

Zum Beweise dieses Satzes wird zu gegebener Modulfunktion $f(Z)$ eine ganze Modulform $\varphi(Z) \not\equiv 0$ konstruiert werden, derart daß φf holomorph auf $\mathfrak{S}^*$ wird. Nach Hilfssatz 8 ist dann $\varphi f = \psi$ eine ganze Modulform, also $f = \frac{\psi}{\varphi}$. Man hat zu diesem Zweck das Verhalten von Spitzenformen auf der Singularitätenmannigfaltigkeit von $f(Z)$ zu studieren.

Spitzenformen zur Hermiteschen Modulgruppe wurden in [3] behandelt. Es wurde dort ein formal engerer Begriff von Spitzenformen verwendet als im rationalen Fall. Durch das Funktionsverhalten kann man sie etwa folgendermaßen charakterisieren.

Definition: *Eine ganze Modulform $\Phi(Z)$ vom Gewicht g heißt Spitzenform, wenn*

$$\det{}^{-g}(CZ + D)\, \Phi(M\langle Z\rangle)$$

gegen Null konvergiert für jede Folge Z, die in $\mathfrak{F}$ gegen ∞ strebt (d. h. mindestens ein Element von Z strebt gegen ∞) und jedes Hermitesch-symplektische M aus Σ.

Bei den Untersuchungen in [3] ist ein etwas anderer Fundamentalbereich zugrunde gelegt, das bedingt aber keine Änderung der zitierten Resultate.

Es sei $\mathfrak{P}$ die lokal zusammenhängende Menge der singulären Stellen von f und $\mathfrak{K}$ eine zusammenhängende Komponente von $\mathfrak{P}$; ferner $\mathfrak{K}_M$ das Bild von $\mathfrak{K}$ bei der Modulsubstitution M. Für $\varkappa > 0$ sei $\mathfrak{F}_\varkappa$ der durch $\det Y \leqq \varkappa$ abgeschnittene kompakte Teil von $\mathfrak{F}$ und

$$\mathfrak{L} = \bigcup_{M \in \Gamma} \mathfrak{K}_M\,, \quad \mathfrak{L} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\,, \quad \mathfrak{L} \cap \mathfrak{F}_\varkappa = \mathfrak{M}_\varkappa\,.$$

Dann ist $\mathfrak{M}$ abgeschlossen und $\mathfrak{M}_\varkappa$ kompakt. Das angekündigte Funktionsverhalten von Spitzenformen läßt sich dann folgendermaßen beschreiben.

Hilfssatz 9: *$\Phi(Z)$ sei eine Spitzenform, welche auf $\mathfrak{K}$ eine Nullstelle besitzt, aber nicht identisch auf $\mathfrak{K}$ verschwindet. Ist $\varkappa > c_4$, so ist $\mathfrak{M}_\varkappa$ nicht leer und das Maximum von $|\Phi|$ auf $\mathfrak{M}$ wird bereits in einem Punkte von $\mathfrak{M}_\varkappa$ erreicht. Dabei ist c_4 eine nur von n und Σ abhängige natürliche Zahl.*

Beweis: Aus [3] entnimmt man für $\Phi(Z)$ die Abschätzung

$$|\Phi(Z)| \leqq d_1 e^{-d_2 \sigma(Y)}$$

für $Y \in \mathfrak{R}$ mit von Z unabhängigen positiven Konstanten d_1 und d_2. Ist nun $\det Y$ hinreichend groß, so wird auf Grund der Reduktionsbedingungen $\sigma(Y)$ beliebig groß, also $|\Phi(Z)|$ beliebig klein. Daraus wird ersichtlich, daß $|\Phi(Z)|$ auf der abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$ ein Maximum besitzt. Man kann o. B. d. A. annehmen, daß dieses

$$\max_{Z \in \mathfrak{M}} |\Phi(Z)| = 1 \tag{20}$$

ist und der Wert 1 in einem Punkte $Z = \hat{Z}$ von $\mathfrak{K}$ angenommen wird.

Nun werde gezeigt, daß man für $\hat{Z}$ einen Randpunkt von $\mathfrak{F}$ einer positiven Q-Ordnung nehmen kann. Es gibt nämlich nach Voraussetzung ein Z_0 auf $\mathfrak{K}$ mit $\Phi(Z_0) = 0$. Man verbinde Z_0 mit $\hat{Z}$ auf $\mathfrak{K}$ durch eine Kurve $\mathfrak{C}$. Nach bekannten Eigenschaften von $\mathfrak{F}$ gibt es nur endlich viele Bilder $\mathfrak{F}_{M_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{M_l}$ von $\mathfrak{F}$, die Punkte mit $\mathfrak{C}$ gemeinsam haben. Man bestimme Z^* so auf $\mathfrak{C}$, daß $\Phi(Z) = 1$ auf dem Teil $\mathfrak{C}^*$ von $\mathfrak{C}$ zwischen $\hat{Z}$ und Z^*, dagegen nicht mehr lokal konstant gleich 1 ist auf $\mathfrak{C}$ bei Z^*. Nun wende man das Maximumprinzip an auf die Funktion $\Phi(Z)$ in einer Umgebung $\mathfrak{U}(Z^*)$ von Z^* bezüglich $\mathfrak{K}$. Dies zeigt die Existenz eines Punktes $Z \in \mathfrak{U}(Z^*)$ mit $|\Phi(Z)| > 1$. $M^* \in \Gamma$ bilde Z in $\mathfrak{F}$ ab. Dann wird $M^*\langle Z\rangle \in \mathfrak{M}$, also $|\Phi(M^*\langle Z\rangle)| \leqq 1$. Wegen des Transformationsverhaltens (16) ist also in

$$M^* = \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix}$$

$C^* \neq 0$. Es werde noch die durch $C = 0$ charakterisierte Untergruppe Γ_0 von Γ eingeführt, so daß also $M^* \notin \Gamma_0$ ist. Läßt man $\mathfrak{U}(Z^*)$ auf den Punkt Z^* zusammenschrumpfen, so erkennt man, daß Z^* kein innerer Punkt von

$$\mathfrak{Z} = \bigcup_{M \in \Gamma_0} \mathfrak{F}_M$$

ist. Andererseits ist $\hat{Z} \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{Z}$. Folglich gibt es einen Punkt $Z \in \mathfrak{C}^*$, der auf dem Rande von $\mathfrak{Z}$ gelegen ist. In diesem Punkt Z stoßen zwei Bereiche $\mathfrak{F}_{M_1}, \mathfrak{F}_{M_2}$ mit $M_1 \in \Gamma_0$, $M_2 \notin \Gamma_0$ zusammen. $M_1^{-1}\langle Z\rangle$ ist dann aus $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{K}$ und $\Phi(M_1^{-1}\langle Z\rangle) = 1$, so daß man $\hat{Z}$ durch $M_1^{-1}\langle Z\rangle$ ersetzen kann. Zusätzlich hat man damit erreicht, daß $M_2^{-1} M_1\langle \hat{Z}\rangle$ und $\hat{Z} \in \mathfrak{F}$ sind, also $\hat{Z}$ ein Randpunkt positiver Q-Ordnung ist für ein geeignetes $Q \in \mathfrak{Q}$.

Es bleibt zu zeigen, daß unter den $\hat{Z} \in \mathfrak{M}$ mit $|\Phi(\hat{Z})| = 1$, welche gleichzeitig Randpunkte von $\mathfrak{F}$ einer positiven Q-Ordnung sind, ein solcher gewählt werden kann, der sogar in $\mathfrak{M}_\varkappa$ liegt.

Wir führen für nicht-ausgeartete Matrizen $Q^{(n)}$ aus Σ die größten gemeinsamen Idealteiler $\delta_\nu(Q)$ der ν-reihigen Unterdeterminanten von Q ein, welche aus den ersten ν Spalten von Q gebildet werden können ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Diese Determinantenteiler benötigt man später nur für $Q \in \mathfrak{Q}$, sie sind also

ganze Ideale. Nun sei also $\hat{Z}$ ein Randpunkt von $\mathfrak{F}$ der positiven Q-Ordnung q mit $|\Phi(\hat{Z})| = 1$. Nach Hilfssatz 5 gilt dann für $\hat{Y}\{Q\} = \hat{H}$

$$\hat{h}_q < 2c_3^2$$

und nach (4), (5)

$$\det \hat{H}_q \leqq \hat{h}_q^q < (2c_3^2)^q \leqq c_5^{3^{q-1}}\,,$$

sofern man $c_5 \geqq 2c_3^2$ wählt. Also ist erst recht

$$\det \hat{H}_q \leqq c_5^{3^{q-1}}\,\mathfrak{N}(\delta_q(Q))\,. \tag{21}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß $Q \in \mathfrak{Q}$ nicht eindeutig durch $\hat{Z}$ bestimmt ist, denn $\hat{Y}$ kann mehreren Bereichen $\mathfrak{R}(Q)$ angehören. Dann gelten obige Formeln für die verschiedenen in Frage kommenden Q-Ordnungen q, welche ja alle positiv sind. Nun wähle man $\hat{Z} \in \mathfrak{M}$ so aus, daß $|\Phi(Z)|$ im Punkte $\hat{Z}$ das Maximum 1 annimmt, daß $\hat{Z}$ Randpunkt von $\mathfrak{F}$ einer positiven Q-Ordnung ist und die Zahl r mit

$$\det \hat{H}_r \leqq c_5^{3^{r-1}}\,\mathfrak{N}(\delta_r(Q)) \tag{22}$$

möglichst groß ist. Sollte $\hat{Y}$ mehreren Bereichen $\mathfrak{R}(Q)$ angehören, so hat man bei der Aufsuchung des maximalen r auch Q mit zu variieren. Es gilt also dann (22) für mindestens ein $Q \in \mathfrak{Q}$ mit $\hat{Y} \in \mathfrak{R}(Q)$; dagegen

$$\det \hat{H}_{r+1} > c_5^{3^r}\,\mathfrak{N}(\delta_{r+1}(Q)) \tag{23}$$

für alle Q, für welche $\hat{Y} \in \mathfrak{R}(Q)$. Fortan seien $\hat{Z}$ nur solche $Q \in \mathfrak{Q}$ zugeordnet, für die (22) erfüllt ist. Nach (21) gilt dann für die Q-Ordnung q von Z: $1 \leqq q \leqq r$.

Ist $r = n$, so ergibt (22) die Behauptung für jedes

$$c_4 \geqq c_5^{3^{n-1}}.$$

Daher kann man fortan $r < n$ annehmen. Unter Aufrechterhaltung der bisherigen Extremalforderungen an $\hat{Z}$ stellen wir die weitere, daß $\hat{h}_{r+1}$ minimal sein soll. Auch jetzt hat man die evtl. noch vorhandenen verschiedenen Möglichkeiten für die Wahl von Q zu berücksichtigen, und die Extremalforderung werde etwa für $\hat{Q} \in \mathfrak{Q}$ erfüllt. Dann gilt also für jeden Punkt $Z^* \in \mathfrak{M}$ mit $|\Phi(Z^*)| = 1$, der Randpunkt positiver Q-Ordnung ist,

$$\det H_r^* \leqq c_5^{3^{r-1}}\,\mathfrak{N}(\delta_r(Q)) \quad \text{für mindestens ein } Q \in \mathfrak{Q} \text{ mit } Y^* \in \mathfrak{R}(Q) \tag{24}$$
$$\text{impliziert } h_{r+1}^* \geqq \hat{h}_{r+1}\,.$$

Es wird nun ein Widerspruch zu dieser Tatsache induziert werden, welcher die Unmöglichkeit von $r < n$ zeigt, also den Beweis vollendet.

Es sei $\hat{Z}_1$ der r-te Abschnitt von $\hat{Z}\{\hat{Q}\}$. In

$$Z\{\hat{Q}\} = \begin{pmatrix} \hat{Z}_1 & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

variiere man Z_{12}, Z_{21}, Z_{22} so, daß $Z \in \mathfrak{K}$ ist. $\mathfrak{B}$ sei die zusammenhängende Komponente dieser Fläche, welche durch $\hat{Z}$ geht. Dann ist $\Phi(Z)$ konstant auf

ganz $\mathfrak{B}$. Denn anderenfalls gibt es auf $\mathfrak{B}$ in beliebiger Nähe von $\hat{Z}$ solche Punkte Z mit $|\Phi(Z)| > 1$. Weil $\hat{Z}$ die $\hat{Q}$-Ordnung $q \leqq r$ besitzt, treten bei den Ungleichungen

$$\text{(25)} \qquad \operatorname{abs}(C\hat{Z} + D) \geqq 1$$

nur solche mit dem Gleichheitszeichen auf, für welche die letzten $n - r$ Spalten von $C\hat{Q}^{-1}$ verschwinden. Nach Hilfssatz 7 hängt für diese $\operatorname{abs}(C\hat{Z} + D)$ in Wahrheit nur von $\hat{Z}$ ab, also bleibt (25) richtig für Z an Stelle von $\hat{Z}$. Übt man noch eine Modulsubstitution aus Γ_0 aus, so kann man Z nach $\mathfrak{M}$ bringen, ohne den Wert von $|\Phi(Z)| > 1$ zu ändern. Das ist ein Widerspruch zu (20), also $\Phi(Z)$ konstant auf ganz $\mathfrak{B}$.

Nun betrachten wir das $(r + 1)$-te Diagonalelement z_{r+1} von $Z\{\hat{Q}\}$ auf $\mathfrak{B}$; wir wollen nachweisen, daß dies lokal konstant ist bei $\hat{Z}$. Anderenfalls zeigt nämlich die Anwendung des Maximumprinzips auf die Funktion $e^{iz_{r+1}}$, daß in jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\hat{Z}$ auf $\mathfrak{B}$ ein Punkt Z gefunden werden kann mit

$$\text{(26)} \qquad \operatorname{Img} z_{r+1} < \operatorname{Img} \hat{z}_{r+1}\,.$$

Mittels einer Modulsubstitution aus Γ_0 gelangt man zu

$$Z^* = Z\{U\} + S \in \mathfrak{M}\,, \quad U \text{ unimodular, } S \text{ ganz Hermitesch.}$$

Läßt man $\mathfrak{U}$ auf $\hat{Z}$ zusammenschrumpfen, so folgt $\hat{Y}\{U\} \in \mathfrak{R}$. Über die Gestalt von U liefert Hilfssatz 2 eine Aussage. Sei nämlich etwa

$$\text{(27)} \qquad \hat{Y}\{U\} \in \mathfrak{R}(Q)\,.$$

Ferner ist

$$\text{(28)} \qquad \hat{Y} \in \mathfrak{R}(\hat{Q})$$

und nach (4), (22), (23) und Hilfssatz 4

$$\text{(29)} \qquad \begin{aligned} \frac{\hat{h}_{r+1}}{\hat{h}_r} &> c_1^{-1} \det \hat{H}_{r+1} \det{}^{-2} \hat{H}_r\, \hat{h}_1 \ldots \hat{h}_{r-1} > \\ &> c_1^{-1}\, 2^{1-r} \frac{\mathfrak{N}(\delta_{r+1}(\hat{Q}))}{\mathfrak{N}(\delta_r(\hat{Q}))^2}\, c_5^{3^{r-1}} > 4(1 + c_1)^2 c_3^4 > c_3\,. \end{aligned}$$

Die vorletzte Ungleichung ist erfüllt, wenn man von vornherein c_5 gemäß dieser Ungleichung für alle $\hat{Q} \in \mathfrak{Q}$ und alle r wählt. Nach Hilfssatz 2 implizieren (27), (28), (29)

$$\text{(30)} \qquad U = \hat{Q}\, V\, Q^{-1}, \quad V = \begin{pmatrix} V_1 & * \\ 0^{(n-r,r)} & * \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun $Y^* \in \mathfrak{R}(Q)$, $\hat{Y} \in \mathfrak{R}(\hat{Q})$, $Y^*_\cdot = Y\{U\}$. Man setze

$$Y^*\{Q\} = H^*, \quad \hat{Y}\{\hat{Q}\} = \hat{H}\,, \quad Y\{\hat{Q}\} = H$$

und findet wegen $H^* = H\{V\}$ auf Grund der Reduktionsbedingungen für H^*, (30) und (26)

$$\text{(31)} \qquad h^*_{r+1} \leqq h_{r+1} < \hat{h}_{r+1}\,.$$

Für die r-ten Abschnitte von H, $\hat{H}$, H^* gilt

$$H_r^* = H_r\{V_1\} = \hat{H}_r\{V_1\}$$

und vermöge (30)

$$\text{abs}^2 V_1\, \mathfrak{N}(\delta_r(\hat{Q})) = \mathfrak{N}(\delta_r(Q))\,. \tag{32}$$

Somit liefert (22)

$$\det H_r^* = \det \hat{H}_r \,\text{abs}^2 V_1 \leqq c_5^{3^{r-1}}\, \mathfrak{N}(\delta_r(Q))\,. \tag{33}$$

Außerdem ist mit Z auch Z^* ein Randpunkt von $\mathfrak{F}$ positiver Q-Ordnung und $|\Phi(Z^*)| = 1$. Dann widersprechen (31) und (32) den an $\hat{Z}$ gestellten Extremalforderungen (24). Dies zeigt, daß z_{r+1} bei $\hat{Z}$ auf $\mathfrak{B}$ lokal konstant gleich $\hat{z}_{r+1}$ ist.

Nun sei

$$f(Z) = \frac{f_1(Z)}{f_2(Z)}$$

die lokale Quotientendarstellung von f im Punkte $\hat{Z}$ durch teilerfremde Potenzreihen f_1, f_2. $\mathfrak{B}$ wird dann lokal bei $\hat{Z}$ beschrieben durch

$$f_2(Z) = 0\,, \quad Z\{\hat{Q}\} = \begin{pmatrix} \hat{Z}_1 & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}.$$

Da z_{r+1} konstant gleich $\hat{z}_{r+1}$ auf $\mathfrak{B}$ ist, enthält $f_2(Z)$ als Potenzreihe in Z_{12}, Z_{21}, Z_{22} den Faktor $z_{r+1} - \hat{z}_{r+1}$. Dies überträgt sich vermöge der Kohärenzbedingung für die Nenner $f_2(Z)$ auf ganz $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}$ ist aber zusammenhängend, also enthält $\mathfrak{B}$ alle Punkte Z von $\mathfrak{H}_n$ der Form

$$Z = \begin{pmatrix} \hat{Z}_1 & & * \\ & \hat{z}_{r+1} & \\ * & & * \end{pmatrix}\{\hat{Q}^{-1}\}\,,$$

so daß für alle diese Z die Spitzenform $\Phi(Z)$ konstant ist. Man ersetze in $\hat{Z}\{\hat{Q}\} = (\hat{z}_{kl})$ die Elemente $\hat{z}_{r,r+1}$ und $\hat{z}_{r+1,r}$ beide durch $-\hat{z}_r$ und bekommt so $Z\{\hat{Q}\}$. Unter Verwendung von (29) zeigt Hilfssatz 3, daß $Z \in \mathfrak{H}_n$, also aus $\mathfrak{B}$ ist. Durch Anwendung einer geeigneten Modulsubstitution aus Γ_n,

$$Z^* = Z\{U\} + S\,, \quad U \text{ unimodular, } S \text{ ganz Hermitesch}\,,$$

kann man

$$Y^* \in \mathfrak{R}\,, \quad X^* \in \mathfrak{E} \tag{34}$$

erreichen. Ist etwa $Y^* \in \mathfrak{R}(Q^*)$, so zeigt Hilfssatz 3, daß U die Gestalt

$$U = \hat{Q}\, V\, Q^{*-1}, \quad V = \begin{pmatrix} V_1 & * \\ 0^{(r,n-r)} & * \end{pmatrix} \tag{35}$$

besitzt. Für $H^* = Y^*\{Q^*\}$, $H = Y\{\hat{Q}\}$, $\hat{H} = \hat{Y}\{\hat{Q}\}$ gilt dann wieder wegen (32) und (22)

$$\det H_r^* = \det \hat{H}_r\, \frac{\mathfrak{N}(\delta_r(Q^*))}{\mathfrak{N}(\delta_r(\hat{Q}))} \leqq c_5^{3^{r-1}}\, \mathfrak{N}(\delta_r(Q^*)) \tag{36}$$

und

$$h_{r+1}^* < \hat{h}_{r+1}\,.$$

Wenn man noch nachweisen kann, daß Z^* ein Randpunkt von $\mathfrak{F}$ positiver Q^*-Ordnung ist, so ist ein Widerspruch erreicht, weil Z^* die an $\hat{Z}$ gestellte Extremalforderung (36) erfüllt, aber $h^*_{r+1} < \hat{h}_{r+1}$ ist. — Nun sind aber (34) zwei der Bedingungen (11), (12), die den Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ bestimmen. Es verbleibt also lediglich der Nachweis, daß

$$\text{(37)} \qquad \operatorname{abs}(C^* Z^* + D^*) \geqq 1 \quad \text{für alle teilerfremden Hermiteschen Paare } C^*, D^*$$

und mindestens einmal das Gleichheitszeichen mit einem $C^* \neq 0$ gilt. Sei

$$\begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix}$$

eine Modulsubstitution einer Q^*-Ordnung $\leqq r$, d. h. $C^* \tilde{Q}^{*-1}$ hat die letzten $n - r$ Spalten 0. Dann ist

$$\text{(38)} \qquad C^* Z^* + D^* = (CZ + D)\, U$$

mit dem teilerfremden Hermiteschen Paar $C = C^* \tilde{U}$, $D = C^* S U^{-1} + D^* U^{-1}$ und auch

$$C \tilde{Q}^{-1} = C^* \tilde{Q}^{*-1} \tilde{V}$$

hat wegen der speziellen Gestalt (35) von V die letzten $n - r$ Spalten 0. Also ist $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ eine Modulsubstitution der $\hat{Q}$-Ordnung $\leqq r$. Nach Hilfssatz 7 ist

$$\operatorname{abs}(CZ + D) \geqq 1$$

für alle Modulsubstitutionen einer $\hat{Q}$-Ordnung $\leqq r$, also (37) erfüllt für alle Modulsubstitutionen einer Q^*-Ordnung $\leqq r$. Außerdem ist nach Hilfssatz 3 und (29)

$$h^*_{r+1} > 2 c_3^2 .$$

Dann zeigt Hilfssatz 6, daß $Z^* \in \mathfrak{F}$ ist. Schließlich steht in (37) mindestens einmal das Gleichheitszeichen, weil $\hat{Z}$ diese Eigenschaft besitzt und sich dies vermöge Hilfssatz 7 auf Z und zufolge (38) auf Z^* überträgt. Damit ist der Beweis von Hilfssatz 9 erbracht.

Nun kann der Nachweis der Quotientendarstellung von Modulfunktionen durch ganze Modulformen wörtlich wie bei C. L. Siegel [7] erfolgen. In jedem Punkt $Z_0 \in \mathfrak{P}$ hat man eine lokale Darstellung

$$f(Z) = \frac{g(Z)}{h(Z)}$$

durch Potenzreihen $g(Z)$, $h(Z)$, und nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz ist

$$\text{(39)} \qquad h(Z) = w^t + a_1 w^{t-1} + \cdots + a_t ,$$

wobei $a_1, \ldots, a_t$ Potenzreihen in $w_2, \ldots, w_{n^2}$ ohne konstante Glieder und $w, w_2, \ldots, w_{n^2}$ geeignete lokale Koordinaten in einer Umgebung von Z_0 sind. Der Konvergenzbereich sei etwa $|w_\nu| < 3\varrho$ ($\nu = 2, \ldots, n^2$). Da

$$\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F}_\varkappa = \mathfrak{P}_\varkappa$$

kompakt ist, kann man dort l_1 Punkte $Z_1, \ldots, Z_{l_1}$ und zugehörige Konvergenzradien $\varrho_1, \ldots, \varrho_{l_1}$ finden, so daß die Nullstellen von (39) ganz $\mathfrak{P}_\varkappa$ beschreiben. Man führe noch die Summe der Grade jener l_1 Polynome $h(Z)$ ein

$$l_2 = t_1 + \cdots + t_{l_1}.$$

Die Größen l_1, l_2 hängen nur von n, Σ und f ab.

Ist nun $\Phi(Z)$ irgendeine ganze Modulform, so dividiere man $\Phi(Z)$ durch $h(Z)$ an sämtlichen Stellen $Z_1, \ldots, Z_{l_1}$:

$$\Phi(Z) = h(Z) \cdot q(Z) + b_1 w^{t-1} + \cdots + b_t \tag{40}$$

mit Potenzreihen $b_1, \ldots, b_t$ in $w_2, \ldots, w_{n^2}$ allein, während $q(Z)$ eine Potenzreihe in allen Variablen $w, w_2, \ldots, w_{n^2}$ ist. Insgesamt gibt es dann in den Polynomen $b_1, \ldots, b_t$ höchstens

$$l_2(s + n^2)^{n^2-1}$$

Potenzprodukte der Form

$$w_2^{s_2} \ldots w_{n^2}^{s_{n^2}} \quad \text{mit} \quad s_2 + \cdots + s_{n^2} \leqq s. \tag{41}$$

Aus [3] entnimmt man die Existenz einer Spitzenform $\Phi_0(Z) \not\equiv 0$, ferner aus [6] die Existenz von mindestens $c_6^{-1} g^{n^2}$ linear unabhängigen ganzen Modulformen vom Gewicht g für gewisse beliebig große g. Dabei sind c_6, c_7, c_8, c_9 wieder nur von n und Σ abhängige natürliche Zahlen. Multipliziert man diese ganzen Modulformen mit Φ_0, so kommt man zu mindestens $c_7^{-1} g^{n^2}$ linear unabhängigen Spitzenformen vom Gewicht g für gewisse beliebig große g. Nimmt man g so groß, daß

$$g^{n^2} > c_7 l_2 (s + n^2)^{n^2-1} \tag{42}$$

wird, so gibt es also eine nicht identisch verschwindende Spitzenform Φ vom Gewicht g, bei der in den Entwicklungen (40) sämtliche Terme (41) fehlen.

Wir wollen nun mit Hilfe von Hilfssatz 9 zeigen, daß $\Phi(Z) = 0$ auf ganz $\mathfrak{P}_\varkappa$ ist bei geeigneter Wahl von s. Denn anderenfalls sei

$$\mu = \operatorname*{Max}_{Z \in \mathfrak{P}_\varkappa} |\Phi(Z)| > 0$$

und dies Maximum werde etwa in $Z_0 \in \mathfrak{K}$ angenommen. Dort seien die lokalen Koordinaten $w^*, w_2^*, \ldots, w_{n^2}^*$. Man setze speziell $w_k = w_k^* x$ $(k = 2, \ldots, n^2)$ und betrachte die Nullstellen w von (39) als Funktion von x im Kreise $|x| \leqq 2$. Sie sind dort beschränkt und abgesehen von endlich vielen algebraischen Verzweigungspunkten holomorph. Da sämtliche Terme (41) fehlen, kann man auf $x^{-s}\Phi(Z)$ als Funktion von x in $|x| \leqq 2$ das Maximumprinzip anwenden. Ist dies Maximum μ^*, so folgt für $x = 1$

$$\mu \leqq 2^{-s} \mu^*.$$

Der Wert μ^* werde etwa im Punkte $Z^* \in \mathfrak{K}$ erreicht. Dieser liegt in einem festen kompakten Teil von $\mathfrak{H}_n$. Man bringe Z^* mittels einer Modulsubstitution M nach $\mathfrak{F}$. Dann ist $M\langle Z^*\rangle \in \mathfrak{M}$, also nach Hilfssatz 9

$$|\Phi(M\langle Z^*\rangle)| \leqq \mu .$$

Andererseits gilt jedoch, weil Z^* in einem Kompaktum von $\mathfrak{H}_n$ liegt,

$$|\Phi(M\langle Z^*\rangle)| = \operatorname{abs}(CZ^* + D)^g\, |\Phi(Z^*)| > c_8^{-g}\, \mu^* .$$

Folglich bekommt man

$$\mu < 2^{-s} c_8^g \mu ,$$

also

$$s < c_9 g .$$

Wählt man in (42) $s = c_9 g$, so erhält man einen Widerspruch.

Somit ist $\Phi(Z)$ identisch Null auf $\mathfrak{P}_n$ und infolgedessen $\varphi = \Phi^{l_0}$ an jeder Stelle von $\mathfrak{F}_n$ durch $h(Z)$ teilbar. Dies überträgt sich vermöge des Transformationsgesetzes auf $\mathfrak{S}^*$. $\varphi f = \psi$ ist also eine in $\mathfrak{S}^*$ holomorphe Modulform, die sich nach Hilfssatz 8 als ganze Modulform erweist. Somit ist

$$f = \frac{\psi}{\varphi}$$

die gesuchte Quotientendarstellung.

Literatur

[1] Braun, H.: Hermitian Modular Functions I, III. Ann. Math. **50**, 827—855 (1949); **53**, 143—160 (1951).

[2] Braun, H.: Der Basissatz für hermitische Modulformen. Abhandl. math. Seminar hamburg. Univ. **19**, 134—148 (1955).

[3] Braun, H.: Darstellung hermitischer Modulformen durch Poincarésche Reihen. Abhandl. math. Seminar hamburg. Univ. **22**, 9—37 (1958).

[4] Humbert, P.: Théorie de la réduction des formes quadratiques définies positives dans un corps algébrique K fini. Comment. Math. Helv. **12**, 263—306 (1939/40).

[5] Klingen, H.: Diskontinuierliche Gruppen in symmetrischen Räumen I. Math. Ann. **129**, 345—369 (1955).

[6] Klingen, H.: Zur Theorie der hermitischen Modulfunktionen. Math. Ann. **134**, 355—384 (1958).

[7] Siegel, C. L.: Über die algebraische Abhängigkeit von Modulfunktionen n-ten Grades. Nachr. Akad. der Wissenschaften zu Göttingen (1960), 257—272.

(Eingegangen am 29. Juli 1960)

WOLFSON, K. G.
Math. Annalen 143, 19—28 (1961)

Baer Rings of Endomorphisms*

By

KENNETH G. WOLFSON in New Brunswick, N. J.

Introduction. Let K be the ring of all n by n matrices over a division ring R. Then each left (right) ideal of K is a principal left (right) ideal generated by an idempotent element. We may, of course, think of K as the ring of all linear transformations of a vector space A (of finite rank) over a division ring R. If we allow the rank of A to be infinite, then it is no longer true that each one sided ideal in the ring of linear transformations is generated by an idempotent element. However, each left (right) ideal which is an annihilator is a principal ideal generated by an idempotent ([1], p. 178). Rings with this property have been termed Baer rings in [12]. Now the vector space A is both a completely reducible module and a free module over R. It is therefore natural to drop the requirement that R be a division ring, and to consider the ring $E(R, A)$ of all R-endomorphisms of the module A over the ring R, in the case (R, A) is completely reducible, and the case when (R, A) is free. Under what conditions are these Baer rings?

In section 2 we are able to show that if (R, A) is completely reducible, $E(R, A)$ is always a Baer ring. In section 3 we examine $E(R, A)$ for (R, A) a free module, and reduce the question to one on the existence of complements for the closed submodules of A. If R is a commutative integral domain, or a (non commutative) principal ideal domain, and if A has a finite basis, the closed submodules are just the pure ones. For R a principal ideal domain, and A of finite rank, $E(R, A)$ is a Baer ring. If A is of finite rank, and R is a commutative integral domain in which each finitely generated ideal is invertible (Prüfer ring), $E(R, A)$ is a Baer ring.

In section 4, we examine more closely some results of EVERETT ([5]. [6]) on modules over left principal ideal domains. We use these results in section 5 in investigating the one sided ideals for the ring of matrices over a principal ideal domain.

1. Definitions and preliminaries. Throughout the paper R will denote a ring with identity and A a unitary left R-module. As in the case of vector spaces, (R is a division ring) the set of all linear functionals on A (R-homomorphisms of A into R) forms a right R module which we denote by A^* and call the adjoint module, and A may be associated with a submodule of

*) Research supported in part by a grant from the Research Council of Rutgers, The State University.

$A^{**} = (A^*)^*$ ([3], p. 43). We shall denote by $E(R, A)$ the ring of all R-endomorphisms of A, and by $E^*(A^*, R)$ the ring of all R-endomorphisms of A^*. The elements of $E(R, A)$ shall operate on the elements of A on the right, while the endomorphisms in E^* shall operate on the left of the elements of A^*. If $x \in A$ and $y \in A^*$, then the effect of the homomorphism y on the element x will be denoted (x, y). If $\sigma \in E(R, A)$, there is defined an adjoint σ^* in $E^*(A^*, R)$ satisfying the relationship

$$(x\sigma, y) = (x, \sigma^* y) \quad \text{for all} \quad x \in A, y \in A^*$$

(cf. e.g. [3], p. 57). The mapping $\sigma \to \sigma^*$ is an isomorphism of $E(R, A)$ into $E^*(A^*, R)$.

If S is a subset of A, then its annihilator in A^*, is the submodule S' of elements $f \in A^*$ for which $(S, f) = 0$, that is $(x, f) = 0$ for all $x \in S$. If $T \subseteq A^*$, we similarly define T', the annihilator of T in A. A submodule Q of A or A^* is called closed if $S'' = (S')' = S$. It is always true that $S'' \supseteq S$ and $S''' = S'$ [13]. The mapping $S \leftrightarrow S'$ is a lattice anti-isomorphism of the lattice of closed submodules of A and A^*. If $y \in A^*$, and $(A, y) = 0$ then $y = 0$ by definition of A^*. If $x \in A$ and $(x, A^*) = 0 \Rightarrow x = 0$ we say that A and A^* are dual modules. If A is a free module (possesses a finite or infinite basis) it is easy to verify that A and A^* are dual. It is perhaps of interest to note that even if A has a finite basis there may exist proper submodules B of A^* with the property that $(x, B) = 0$ and $x \in A \Rightarrow x = 0$. As an example we may let A be the direct sum of n copies of the integers. Then A^* may be thought of as the direct sum of n copies of the integers such that if $x = (x_1, \ldots, x_n)$ and $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $x \in A$, $y \in A^*$, then $(x, y) = \sum x_i y_i$. If we let B be the direct sum of n copies of the even integers it is easily seen that it has the described property. This cannot occur if A has a finite basis over a division ring. If P is any subset of $E(R, A)$ then $\mathscr{R}(P)$ denotes the totality of σ in E for which $P\sigma = 0$. Similarly $\mathscr{L}(P)$ denotes the left annihilator of P. We refer to the ideals $\mathscr{R}(P)$, $[\mathscr{L}(P)]$ as right (left) annihilators. If S is any subset of A, then $R(S)$ is the totality of ϱ in E for which $S\varrho = 0$ and $L(S)$ is the set of α in E for which $A\alpha \subseteq S$. If P is any subset of E then $N(P)$ is the totality of x in A for which $xP = 0$, and AP is the set of elements ap for a in A and p in P. We state several results which were proven in [14] for the special case of a vector space, but need only be trivially modified for our case.

Lemma 1. (i) *$AL(S) \subseteq S$ for every subset S of A.*

(ii) *$S \subseteq N[R(S)]$ for every subset S of A.*

(iii) *$L(S)\,R(S) = 0$ for every subset S of A.*

(iv) *$L[N(J)] = \mathscr{L}(J)$ for every subset J of E.*

(v) *$R(AJ) = \mathscr{R}(J)$ for every subset J of E.*

(Lemma 2.2 of [14])

Lemma 2. (i) *If $AL(S) = S$ holds for a submodule S, then*

$$R(S) = \mathscr{R}[L(S)].$$

(ii) *If* $N[R(S)] = S$ *holds for a submodule* S, *then*

$$L(S) = \mathscr{L}[R(S)].$$

(Cor. 2.3, 2.4 of [14].)

Lemma 3. *Suppose* $AL(S) = S$ *holds for all submodules* S, *then*

(i) *If* J *is a right annihilator* $J = R[N(J)]$.

(ii) *If* H *is a left annihilator, then* AH *is a submodule of* A, *and* $H = L(AH)$.

(Lemma 2.7 of [14].)

2. Completely Reducible Modules. We consider first the question of the equalities $AL(S) = S$ and $N[R(S)] = S$. We have first

Theorem 4. $AL(S) = S$ *for all submodules* S, *if the lattice* $L(R, A)$ *of submodules of* A *is completely reducible.*

Proof. It is only necessary to show $S \subseteq AL(S)$ in view of (i) of Lemma 1. Let $s \in S$, $s \neq 0$, and let Q be a complement of the submodule Rs so that

$$A = Rs \oplus Q$$

Define ϱ by $s\varrho = s$, $Q\varrho = 0$, and extend ϱ to all of A. Then

$$A\varrho = Rs \Rightarrow \varrho \in L(S) \text{ and } s = s\varrho \Rightarrow s \in AL(S).$$

Theorem 5. *If the submodule* S *is a direct summand,* $S = N[R(S)]$.

Proof. It suffices to prove $N[R(S)] \subseteq S$ in view of (ii) of Lemma 1. Let $A = S \oplus Q$. Define σ by $S\sigma = 0$ and $q\sigma = q$ if $q \in Q$, and extend to A. Suppose $a \notin S$, then $a = s + q$, $s \in S$, $q \in Q$, $q \neq 0$. Then $a\sigma = s\sigma + q\sigma = q \neq 0$. Hence $\sigma \in R(S) \Rightarrow aR(S) \neq 0 \Rightarrow a \notin N[R(S)]$ so that $N[R(S)] \subseteq S$ completing the proof.

We proceed as in [14]. It follows from Theorem 4, (i) of Lemma 3, and (i) of Lemma 2 that the right annihilators are exactly the ideals $R(S)$ the submodule S being unique by Theorem 5. It follows from Theorem 4, (ii) of Lemma 3, (ii) of Lemma 2, and Theorem 5, that the left annihilators are precisely the ideals $L(S)$, the submodules S being unique by Theorem 4.

Theorem 6. *If* $L(R, A)$ *is completely reducible,* $E(R, A)$ *is a Baer ring.*

Proof. By the remark on page 159 of [15] it suffices to prove that for each submodule S, the right ideal $R(S)$ is generated by an idempotent. The proof of Proposition 1, p. 177 of [1] which proves this fact when R is a division ring is valid under the present circumstances.

Remark. If R is a division ring then (R, A) is a vector space and $L(R, A)$ is completely reducible. More generally if R is any semi-simple ring with minimum condition on right ideals, then for any module A over R, $L(R, A)$ is completely reducible ([9], p. 47).

3. Free Modules. Throughout this section A has a basis over R, finite or infinite, unless stated otherwise.

Theorem 7. *If* (R, A) *is a free module, then* $AL(S) = S$ *for all submodules* S.

Proof. Let $\{e_i\}$ be a basis for A. Let $s \in S$. Put $e_1\sigma = s$, $e_i\sigma = 0$ for $i \neq 1$. Then σ can be extended uniquely to all of A. Now $A\sigma = Rs \Rightarrow \sigma \in L(S)$ and $s = e_1\sigma \Rightarrow s \in AL(S)$. As in Theorem 4, this completes the proof.

Theorem 8. *A submodule S is closed if, and only if, $S = N[R(S)]$.*

Proof. Suppose $S = N[R(S)]$, then $S = N(P)$ where P is a subset of $E(R, A)$. Actually $S = N[R(S)]$ if, and only if, $S = N(P)$ for some subset P of E. Since A has a basis, A and A^* are a dual pair, and it is easy to verify that $[R(S)]^* = L(S')$. (Same proof as (1) of Lemma 2 in [15].) Now we may follow the arguments of the second paragraph of Lemma 3 of [15] to show that S is closed.

Suppose conversely that S is closed. As in the first paragraph of Lemma 3 of [15], if $b \notin S$ we can find $f \in S'$ such that $(b, f) \neq 0$. Let e_1 be a basis element of A. Define ϱ by:

$$x\varrho = (x, f)e_1.$$

Then $S\varrho = 0$, $b\varrho \neq 0$ so that $bR(S) \neq 0$ and $b \notin N[R(S)]$. This shows $N[R(S)] \subseteq S$ which is sufficient to complete the proof.

Remark. In the first part of the proof the basis was only needed to show A, A^* are dual. In the second part it was only needed to be sure A was not a torsion module.

If S is any subset of A, it can be shown that $R(S) = R(S'')$ (this depends on $S''' = S'$) and hence $N[R(S)] = S''$.

Now we may proceed as in [15]. The right annihilators are exactly the ideals $R(S)$ for S a closed submodule of A, and the left annihilators are the ideals $L(S)$ for closed submodules S.

Theorem 9. *Let (R, A) be a free module. Then $E(R, A)$ is a Baer ring if, and only if, every closed submodule of A is a direct summand.*

Proof. Suppose $E(R, A)$ is a Baer ring, and S a closed submodule. Then $R(S) = eE$ for idempotent e. Then $S = N[R(S)] = N[eE] = N(e)$. If $a \in A$, $a = ae + (a-ae)$. The set $\{a-ae\} = N(e)$, so that $A = Ae \oplus N(e) = Ae \oplus S$, and S is a direct summand. If conversely S is a direct summand, then $R(S)$ is generated by an idempotent by the argument of Theorem 6.

Remark 1. If (R, A) is free, every direct summand is closed. For a direct summand S, satisfies $S = N[R(S)]$ by Theorem 5, hence is closed by Theorem 8.

Remark 2. If $A = S \oplus Q$ then $A^* = S' \oplus Q'$ ([3], p. 45, Prop. 5) so that the complications of Lemma 6 of [15] do not arise here.

Remark 3. If R is a division ring, then every submodule of (R, A) is closed. But this is not the general case when R is not a division ring, even if (R, A) has a finite basis. In fact we shall show that if R is a ring without proper zero divisors, in which each left and right ideal is principal, then each submodule of (R, A) is closed if and only if R is a division ring.

Remark 4. The one result that appears in the literature (aside from the case R is a division ring) is due to BERBERIAN [2]. He shows that if (R, A) has a finite basis, where R is an AW^* algebra, then $E(R, A)$ is a Baer ring. In fact it is actually an AW^* algebra.

If R has no proper zero divisors, we shall use the term integral domain. If every left (right) ideal is principal, we shall refer to it as a left (right) principal ideal domain. A principal ideal domain is both a left and right principal ideal domain.

The module (R, A) is torsion free if $ra = 0$, $r \in R$, $a \in A$ implies $r = 0$ or $a = 0$. If (R, A) is free it is easy to see that it is torsion free, if and only if, R is an integral domain.

If R is an integral domain, a submodule S of (R, A) is called pure, if $ra \in S$, $r \neq 0$ implies $a \in S$. The more general definition ([11], p. 14) specializes to this in the torsion free case we are dealing with.

Lemma 10. *If (R, A) is free, and R is an integral domain, each closed submodule is pure.*

Proof. If S is closed, $S = N(P)$, P a subset of E (Theorem 8). Let $ra \in N(P)$, $r \neq 0$, $a \in A$. Then $(ra)P = 0$, $r(aP) = 0$. Since $r \neq 0$, $aP = 0$ and $a \in N(P) = S$.

We next investigate under what conditions pure submodules are closed. In the rest of the section the ring R is understood to be an integral domain.

Lemma 11. *Let A be a module over R, and S a submodule of A for which A/S is torsion free, and the direct sum of cyclic submodules. Then S is a direct summand of A.*

Proof. We can follow the proof of Theorem 5 of [11] without worrying about the order ideals of the elements. We arrive at $a_i y_i = 0$ for each i, and hence $a_i = 0$ for each i, since A/S is torsion free. Hence $a_i x_i = 0$, $w = 0$, and the proof is complete.

Since the intersection of any set of pure submodules is pure, there exists to each submodule S, a unique minimal pure submodule S_p containing S. If in R, each pair of non-zero elements has a non-zero common left multiple, (this would be true for example, if R were commutative, or if R were a principal left ideal domain) it can be verified that S_p can be realized as follows: the set of all x in A for which there exists some $r \neq 0$ in R (depending on x) such that rx is in S. It is now easy to establish

(1) if S is any submodule of A then $S' = (S_p)'$ so that $S'' = (S_p)''$

(2) if S, Q are submodules of A, then $(S_p + Q_p)_p = (S + Q)_p$. Now we are ready to prove:

Theorem 12. *Let (R, A) be a free module. Then*

(i) *if R is a commutative integral domain, every finitely generated pure submodule is closed*

(ii) *if R is a commutative integral domain, and (R, A) has a finite basis, each pure submodule is closed*

(iii) *if R is a (not necessarily commutative) principal ideal domain, and (R, A) has a finite basis, each pure submodule is closed.*

Proof. (i) We show first that if M is any closed submodule of A, and $x \in A$, then $(M + Rx)_p$ is closed. If $x \in M$ then since M is pure (Lemma 10) $(M + Rx)_p = M$ and the result is clear. Assume therefore that $x \notin M = M''$.

The argument here is a modification of that in [13]. There must exist an $l \in M'$ such that $(x, l) \neq 0$. Suppose $(x, l) = r$. Let f be arbitrary in M'. Since $(x, fr) - (x, l)(x, f) = (x, f)r - r(x, f) = 0$, $fr - l(x, f) \in (M + Rx)'$. Now let $y \in (M + Rx)''$ so that $0 = [y, fr - l(x, f)] = (y, f)r - (y, l)(x, f) = r(y, f) - (y, l)(x, f) = [(ry, f) - (y, l)x, f]$. Hence $ry - (y, l)x \in M'' = M$ and $ry \in M + Rx$ and $y \in (M + Rx)_p$. This shows $(M + Rx)'' \subseteq (M + Rx)_p$. By (1) of remarks preceding the Theorem, $(M + Rx)'' = (M + Rx)_p''$ so that $(M + Rx)_p'' \subseteq (M + Rx)_p$ which says that $(M + Rx)_p$ is closed. By (2) of previous remarks $(M + Rx)_p = [M_p + (Rx)_p]_p = [M + (Rx)_p]_p$ is closed. Using the fact that the zero submodule is closed, repeated application of (2) and our result yields

$$[(Rx_1)_p + (Rx_2)_p + \cdots + (Rx_n)_p]_p = [Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n]_p$$

is closed, if $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is any set of n elements of A.

Now let S be pure and generated by $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Then

$$S = [Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n]_p$$

is closed.

(ii) We shall show that $S'' \subseteq S$ and it suffices to show that if $a \notin S$ there exists g in A^* such that $(S, g) = 0$ but $(a, g) \neq 0$.

Since S is pure the sum $Ra + S$ is direct. If $r_1 a + s_1 = r_2 a + s_2$ then $s_1 = s_2$ and $r_1 = r_2$, since A is torsion free. We may therefore define a linear functional f on $H = S \oplus Ra$ by setting $(S, f) = 0$ and $(a, f) = 1$. Now consider R as embedded in its quotient field F, and extend f to a linear mapping of A into F. By Zorn's Lemma it is enough to show how to extend the mapping from H to the submodule $H + Rx$, where $x \notin H$. Here we follow the arguments of KAPLANSKY ([10], p. 355). Let I denote the set of α in R with $\alpha x \in H$. If $I = 0$ we may choose (x, f) arbitrarily. Otherwise take any $\gamma \neq 0$ in I. Now $(\gamma x, f)$ is defined in R (hence in F). Solve the equation $\gamma y = (\gamma x, f)$ for y in F. Put $(x, f) = y$. Now if $\beta \in I$, $\gamma[(\beta x, f) - \beta y] = \gamma[(\beta x, f) - \beta(\gamma x, f)] = (\gamma\beta x, f) - (\beta\gamma x, f) = 0$. Since F has no proper zero divisors $(\beta x, f) = \beta(x, f)$ for all $\beta \in I$. Now define $(h + rx, f) = (h, f) + r(x, f)$. It can be verified that if $h_1 + r_1 x = h_2 + r_2 x$, $h_i \in H$, $r_i \in R$, then $(h_1 + r_1 x, f)\ (h_2 + r_2 x, f)$.

Now let us denote by f the linear mapping of A into F. Let $\{e_i\}$ be basis of A. Then $(e_i, f) = r_i/s_i$, $r_i, s_i \in R$, $s_i \neq 0$. Let $r = s_1 s_2 \ldots s_n \neq 0$ in R. Put $g = rf$. Then g is a linear mapping of A that maps all the basis elements into R, hence maps A into R. Since $(S, f) = 0$ we have $(S, g) = 0$, and $(a, g) = r \neq 0$.

To prove (iii) we could proceed in a similar way, but by a different approach we can actually show that S is a direct summand and hence closed by Theorem 5. Since A is torsion free and S is pure, A/S is torsion free. Since A has a finite basis A/S is finitely generated. By Theorem 19 of [7], A/S is a direct sum of cyclic modules. Hence by Lemma 11, S is a direct summand of A.

Corollary 13. *If (R, A) has a finite basis and R is a commutative integral domain, $E(R, A)$ is a Baer ring, if and only if, each pure submodule of A is a direct summand.*

Corollary 14. *If (R, A) has a finite basis, and R is a (not necessarily commutative) principal ideal domain, $E(R, A)$ is a Baer ring.*

Corollary 15. *If (R, A) has a finite basis, where R is a commutative integral domain in which each finitely generated ideal is invertible (Prüfer ring), then $E(R, A)$ is a Baer ring.*

Proof. If S is pure, A/S is a direct sum of modules of rank one (necessarily isomorphic to invertible ideals of R) ([10], Theorem 1). Hence S is a direct summand, by Lemma 3 of [10].

Remark 1. Dedekind rings, and valuation rings are examples of rings satisfying the hypotheses of Corollary 15.

Remark 2. Bourbaki ([4], p. 85, problem 8b) gives an example of a free module of countable rank over a complete discrete valuation ring which possesses a pure submodule which is not a direct summand.

4. Free modules over left principal ideal domains. Let (R, A) be a free module with finite basis of n elements over the left principal ideal domain R. The basis number $b(A)$ is invariant, since R is a subring of a division ring $\overline{R}$, where $\overline{R} = \{x^{-1} y/x, y \in R, x \neq 0\}$. It is known that every submodule of A has a basis of $m \leqq n$ elements. The converse is actually true. If (R, A) has a basis of n elements, and every submodule has a basis of $m \leqq n$ elements, then R is a left principal ideal domain (Everett [5] and [6]).

In [5] the following is proved. Let (R, A) have the basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ and consider the vector space $(\overline{R}, \overline{A}) = \overline{R} v_1 + \overline{R} v_2 + \cdots + \overline{R} v_n$. Then (R, A) is embedded in $(\overline{R}, \overline{A})$. Now if S is any submodule of A with basis $u_1, u_2, \ldots, u_m$ $(m \leqq n)$ then $\overline{S} = \overline{R} u_1 + \overline{R} u_2 + \cdots + \overline{R} u_m$ is a submodule of $\overline{A}$ and the mapping $S \to \overline{S}$ is a single-valued mapping of the lattice of all submodules of A onto the lattice of all submodules (subspaces) of $\overline{A}$.

We wish to show that this mapping is actually a lattice isomorphism of the lattice of all pure submodules of A onto the lattice of all subspaces of $\overline{A}$.

Let T be any subspace of $\overline{A}$. By the remarks in [5] $T = \overline{S}$ for some submodule $S \subseteq A$. We shall show that $\overline{S}_p = \overline{S}$ so that $T = \overline{S}_p$. To this end let S_p have the basis $y_1, y_2, \ldots, y_m$, and let S have the basis $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Then $y_i \in S_p \Rightarrow$ for some $r_i \neq 0$ in R, $r_i y_i \in S$ so that $r_i y_i = \sum_{j=1}^{k} r_{ij} x_j$. But clearly $\overline{R}(r_i y_i) = \overline{R} y_i$ so that $\overline{R} y_1 \oplus \overline{R} y_2 \oplus \cdots \oplus \overline{R} y_m \subseteq \overline{R} x_1 \oplus \overline{R} x_2 \oplus \cdots \oplus \overline{R} x_k$ or $\overline{S}_p \subseteq \overline{S}$. But since $S \subseteq S_p$ we have $\overline{S} \subseteq \overline{S}_p$ ([5], p. 315, (1)) so that $\overline{S}_p = \overline{S}$.

To show that the mapping is one-one we need the following:

Lemma 16. *Let P, Q be submodules of A, with $P \subseteq Q$ and $b(P) = b(Q)$. If P is pure, $P = Q$.*

Proof. Since $P \subseteq Q$ we have $\overline{P} \subseteq \overline{Q}$. From $b(P) = b(Q)$ it follows $b(\overline{P}) = b(\overline{Q})$. In a vector space this gives $\overline{P} = \overline{Q}$. Let P have basis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ and Q have basis $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Now $y_1 \in \overline{Q} \Rightarrow y_1 \in \overline{P} \Rightarrow y_1 = \sum_i \beta_i^{-1} \alpha_i x_i$, $\alpha_i, \beta_i \in R$, $\beta_i \neq 0$.

Let γ be a non-zero common left multiple of the β_i. Then

$$\gamma y_1 = \sum r_i x_i, \; r_i \in R, \text{ so } \gamma y_1 \in P\,.$$

Since P is pure, $y_1 \in P$. Similarly all $y_i \in P$ so that $Q \subseteq P$, giving $P = Q$, and completing the proof.

We complete the assertion with:

Lemma 17. *Let S, Q be pure with $\bar{S} = \bar{Q}$. Then $S = Q$.*

Proof. It has been shown ([5], p. 315) that $\bar{S} = \bar{Q}$ if, and only if, $b(S + Q) = b(S \cap Q)$. Now $S \cap Q \subseteq S \subseteq S + Q$ so that $b(S \cap Q) = b(S)$. But since $S \cap Q$ is pure and $S \cap Q \subseteq S$ we have by the previous Lemma that $S \cap Q = S$. Similarly $S \cap Q = Q$ so that $S = Q$.

We are now in a position to prove:

Theorem 18. *Every submodule of (R, A) is pure if, and only if, R is a division ring.*

Proof. If R is a division ring, it is trivial that all subspaces are pure. Suppose conversely all submodules of (R, A) are pure. Let S be a submodule with $0 \subset S \subset A$. If $b(A) = n$ then $b(S) = m < n$ (strict inequality must hold by Lemma 16). But then R is a division ring ([5], p. 316, I).

5. One sided ideals in matrices over left principal ideal domains. Let (R, A) have the basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$. If we define f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ by $(e_j, f_i) = \delta_{ij}$ and extend the definition by linearity to all of A, we get n (right) linearly independent elements of A^*. It is easy to see that the $\{f_i\}$ form a basis for A^*. We may think of A as the left module of all row vectors of n-tuples from R (with respect to $\{e_i\}$ basis), and A^* as the right module of all column vectors of n-tuples from R (with respect to $\{f_i\}$ basis). If $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ and $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \in A^*$, then $(x, y) = \sum_i x_i y_i$ is actually the matrix product xy. If $\sigma \in E(R, A)$ and we take its matrix representation with respect to basis $\{e_i\}$, and take the matrix representation of $\sigma^* \in E^*(A^*, R)$ with respect to basis $\{f_i\}$ we get matrices with identical entries. It is then clear that the mapping $\sigma \to \sigma^*$ is an isomorphism of $E(R, A)$ *onto* $E^*(A^*, R)$. This can also be seen from the fact that in the case where A has a finite basis, A^{**} can be identified with A. For each $\sigma \in E(R, A)$ there exist elements $g_1, g_2, \ldots, g_n \in A^*$ such that $x\sigma = \sum (x, g_i) e_i$.

The discussion of the one sided ideals of $E(R, A)$ is modeled after the arguments in [8].

Lemma 19. *Let J be a left ideal of $E(R, A)$, and $f_1, f_2, \ldots, f_n \in A^*$, $s_1, s_2, \ldots, s_n \in AJ$. Then the endomorphism ϱ defined by*

$$x\varrho = \sum (x, f_i) s_i \in J .$$

Proof. Let $s \in AJ$ so that $s = a\sigma$, $a \in A$, $\sigma \in J$. Let f be arbitrary in A^*. Define τ by $x\tau = (x, f)a$. Since J is a left ideal $\tau\sigma \in J$. Now

$$x(\tau\sigma) = [(x, f)a]\sigma = (x, f)a\sigma = (x, f)s .$$

Hence J contains the endomorphism $\tau\sigma = \gamma$ where $x\gamma = (x, f)s$. Since J is closed under the taking of finite sums, the conclusion follows.

Theorem 20. *Let R be a left principal ideal domain, and let (R, A) have a finite basis. Then if J is a left ideal of (R, A), there exists a unique submodule S of A such that $J = L(S)$.*

Proof. Let J be a left ideal and let $S = \left\{\sum_i a_i j_i \mid a_i \in A, j_i \in J\right\}$. Then S is a submodule of A, and $AJ \subseteq S$. Now let $\sigma \in J$. Then $A\sigma \subseteq AJ \subseteq S$ so that $\sigma \in L(S)$. Hence $J \subseteq L(S)$. Now let S have a basis $s_1, s_2, \ldots, s_k$, and let $\varrho \in L(S)$. Then $A\varrho \subseteq S$. Thus there exist $f_1, f_2, \ldots, f_k \in A^*$ and $x\varrho = \sum_i (x, f_i) s_i$. But $s_i = \sum a_l j_l$, $a_l \in A$, $j_l \in J$, so we may write

$$x\varrho = \sum_m (x, g_m) t_m, \; g_m \in A^*, \; t_m \in AJ\,.$$

By the preceding Lemma $\varrho \in J$, so $L(S) \subseteq J$ which combined with the reverse inequality completes the proof, since the uniqueness follows again from the fact that $AL(S) = S$.

Remark. In this case, AJ is always a submodule when J is a left ideal. For $J = L(S)$, $AJ = AL(S) = S$.

When R is a division ring the right ideals of $E(R, A)$ are all of the form $R(S)$. We examine the situation here. Suppose every right ideal of $E(R, A)$ is of the form $R(S)$, for S a submodule of A. Then by the isomorphism, every right ideal of $E^*(A^*, R)$ is of the form $[R(S)]^* = L(S') = L(T)$ where $T = S'$ is a closed submodule of A^*. But this implies that all submodules of A^* are closed. For if W is any submodule of A^*, $L(W)$ is a right ideal of $E^*(A^*, R)$ so that $L(W) = L(T)$ with T closed. Then $W = T$, and W is closed. [Just use $L(W)A^* = W$ which is $AL(S) = S$ written in the proper order for operating in A^* and $E^*(A^*, R)$.] If R is also a right principal ideal ring (A^* is a right module) closed = pure and Theorem 18 would make R a division ring.

Suppose R is a principal ideal domain (left and right) then the arguments of Theorem 20 would yield that every right ideal of $E^*(A^*, R)$ is of the form $L(S)$ for a unique submodule S of A^*. Employing the isomorphism of E on E^* we get that the right ideals of $E(R, A)$ are lattice isomorphic to the submodules of A^*. Since under the mapping of E onto E^* right annihilators map onto right annihilators, under the isomorphism of right ideals onto submodules of A^*, the right annihilators correspond to the pure submodules of A^*. Recapitulating we have:

Theorem 21. *Let (R, A) be a finitely generated free module with R a principal ideal domain. Then there is a lattice isomorphism of the lattice of all right ideals of $E(R, A)$ onto the lattice of submodules of A^* under which the right annihilators correspond to the pure submodules. There is a lattice isomorphism of the lattice of left ideals of $E(R, A)$ upon the lattice of submodules of A under which the left annihilators correspond to the pure submodules.*

References

[1] Baer, R.: Linear algebra and projective geometry. New York: Academic Press, 1952.
[2] Berberian, S. K.: $N \times N$ matrices over an AW^*-algebra. Am. J. Math. 53, 37—44 (1958).

[3] BOURBAKI, N.: Algèbre, Chapitre II (Algèbre Linéare), Actualitiés Sci. Ind. 1947, 1032.
[4] BOURBAKI, N.: Algèbre, Chapitre VII (Modules sur les anneaux principaux), Actualitiés Sci. Ind. 1952, 1179.
[5] EVERETT, C. J.: Vector spaces over rings. Bull. Am. Math. Soc. 48, 312—316 (1942).
[6] EVERETT, C. J.: The basis theorem for vector spaces over rings. Bull. Am. Math. Soc. 51, 531—532 (1945).
[7] JACOBSON, N.: The theory of rings. Math. Surveys. Number II, A. M. S. (1943).
[8] JACOBSON, N.: On the theory of primitive rings. Ann. Math. 48, 8—21 (1947).
[9] JACOBSON, N.: Structure of rings. Am. Math. Soc. Colloquium Publications 37 (1956).
[10] KAPLANSKY, I.: Modules over Dedekind rings and valuation rings. Trans. Am. Math. Soc. 72, 327—340 (1952).
[11] KAPLANSKY, I.: Infinite abelian groups. University of Michigan Press (1954).
[12] KAPLANSKY, I.: Rings of operators. University of Chicago (mimeographed) 1955.
[13] MACKEY, G. W.: On infinite dimensional linear spaces. Trans. Am. Math. Soc. 57, 155—207 (1945).
[14] WOLFSON, K. G.: An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformations. Am. J. Math. 75, 358—386 (1953).
[15] WOLFSON, K. G.: A class of primitive rings. Duke Math. J. 22, 157—163 (1955).

(Received September 20, 1960)

FOSTER, A. L.
Math. Annalen 143, 29—58 (1961)

Functional Completeness in the Small Algebraic Structure Theorems and Identities

By

ALFRED L. FOSTER in Berkeley (Cal.)

1. Introduction

In a series of recent publications various familiar algebraic structure theorems, including those definitive for (1°) Boolean algebras (STONE [8]), (2°) p-rings (McCOY and MONTGOMERY [5]), (3°) Post algebras (WADE [9]) and others, were shown to be unified and subsumed under a rather general structure theory for universal algebras (FOSTER [1]—[3]). In particular the "kernel" of each discipline is a characteristic *functionally complete* algebra — e.g., in (2°) this is the prime field F_p, in (3°) the basic n-element Post algebra P_n, etc. — and the general algebras in each case are precisely those which satisfy all identities of the kernel, a situation generalized by the first structure theorem of [1], one of whose formulations[1]) is:

Theorem A. *Let* $\mathfrak{U}$ *and* $\mathbf{U}$ *be algebras of the same species, neither being the one-element algebra, and where* $\mathfrak{U}$ *is (finite and) functionally complete. Then necessary and sufficient conditions for* $\mathbf{U}$ *to be isomorphic with a scalar*[2]) *subdirect power of* $\mathfrak{U}$ *are that* (i) $\mathbf{U}$ *possess a subalgebra isomorphic with* $\mathfrak{U}$, *and where* (ii) *all identities of* $\mathfrak{U}$ *extend to (i.e., hold in)* $\mathbf{U}$.

The underlying method of [1], in which application to the functionally complete case is but an instance, involves the concept of a "Boolean extension" of an algebra $\mathfrak{U}$ — a kind of pseudo-hypercomplex algebra over $\mathfrak{U}$ —, and not merely over functionally complete kernels $\mathfrak{U}$ but also for the much broader class of algebras $\mathfrak{U}$ which are "framal" (or of class *f*). The class of all Boolean extensions of such a framal $\mathfrak{U}$ was shown in [1], [2] to be coextensive (up to isomorphisms) with a certain well defined class of subdirect powers of $\mathfrak{U}$, and it was from this isomorphism that structure results such as Theorem A were derived by specialization.

In the current paper we seek to profitably further extend the method of [1] to admit also infinite kernels, $\mathfrak{U}$. This will entail the introduction of algebras $\mathfrak{U}$ which are "functionally complete in the small" (§ 13) and more generally, algebras "framal in the small", etc. Essentially all of the earlier finite kernel

1) In another formulation, where $\mathfrak{U}$ is postulated to be *strictly* complete (§ 13), condition (i) of Theorem A is provable — and hence may be deleted; (ii) then simply requires that all strict identities of $\mathfrak{U}$ extend to $\mathbf{U}$. Compare with [1], [2], also with § 20.

2) A subdirect power $\mathbf{U}$ of $\mathfrak{U}$ is "scalar" if each direct term, $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \ldots)$ is $\in \mathbf{U}$. (Compare with § 19).

theory will be found to generalize to the infinite kernel level. Thus in particular Theorem 11.1 is the generalized Fundamental Equivalence Theorem; and, directed toward functional completeness, Theorem 19.1 is a "functionally complete in the small" generalization of Theorem A, with additional extensions to the strictly complete case in § 20.

As a preliminary indication of the scope of this new class of algebras functionally complete in the small, it is noted that, in addition to the great variety of known finite functionally complete algebras ([1]—[3], [6], [7]), it embraces all fields, etc. (§§ 13, 14).

To avoid unnecessary duplication we shall on occasion — after due preparation — refer to corresponding proofs for finite kernel, given in [1].

In a subsequent communication it is planned to offer a similar extension of the second structure theorem — for primal clusters — ([3]) and of other phases of the theory of [1]—[4], [6], [7].

2. *Some preliminaries*

We here recall — and extend — several basic concepts of [1]. Let $\mathfrak{U} = (U, \sigma_1, \sigma_2, \ldots)$ be a universal algebra and let S denote its species. Throughout this paper all algebras are automatically assumed to be finitary, i.e., each primitive operation σ_i is assumed to have only a finite number n_i of arguments. Thus in $S = (n_1, n_2, \ldots)$ the n_i are integers and σ_i is n_i-ary, $\sigma_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_i})$.

An "S-expression" $\Phi(\xi, \ldots)$ is an expression built up from a finite number of indeterminate symbols $\xi, \ldots$ by composition via a finite number of the primitive operation-symbols $\sigma, \ldots$, each employed only finitely often.

We speak of $\Phi(\xi, \ldots)$ "mod $\mathfrak{U}$" — also written simply

$$\Phi(\xi, \ldots) \quad (\mathfrak{U})$$

when the S-expression Φ is conceived (or interpreted) in the S-algebra $\mathfrak{U}$. In this interpretation the primitive operation-symbols are of course identified with the corresponding primitive operations of $\mathfrak{U}$, and the indeterminate-symbols $\xi, \ldots$ as indeterminates over $\mathfrak{U}$. For unrelated S-algebras $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{V}$, $\Phi(\xi, \ldots)$ $(\mathfrak{U})$ will generally be quite unrelated to $\Phi(\xi, \ldots)$ $(\mathfrak{V})$.

An S-expression $\Phi(\xi, \ldots)$ mod any given S-algebra $\mathfrak{U}$ is also called a "strict $\mathfrak{U}$-function". The more general notion of "$\mathfrak{U}$-function" is defined to be any primitive composition as above, but where constants (= fixed elements of $\mathfrak{U}$) are also admitted. Otherwise stated, a $\mathfrak{U}$-function is either an S-expression, or else the result of substituting constants of $\mathfrak{U}$ for some (or all) of the indeterminates in some S-expression. It is suggestive to speak of "$\mathfrak{U}$-polynomials" rather than $\mathfrak{U}$-functions. It is stressed that, unlike an S-expression, a $\mathfrak{U}$-function is generally only meaningful in the particular S-algebra $\mathfrak{U}$ — and also in any overalgebra (and sometimes in suitable subalgebras) of $\mathfrak{U}$ — but not in an arbitrary S-algebra.

We shall systematically employ $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \ldots$ (small German letters) to designate $\mathfrak{U}$-functions, and $\Phi, \Psi, \ldots$ (large Greek letters) to designate S-expressions (= strict $\mathfrak{U}$-functions).

An identity between $\mathfrak{U}$-functions $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ — holding throughout $\mathfrak{U}$ — is called a "$\mathfrak{U}$-identity", written

$$\mathfrak{f}(\xi, \ldots) = \mathfrak{g}(\xi, \ldots)\ (\mathfrak{U}).$$

Similarly for a "strict" $\mathfrak{U}$-identity

$$\Phi(\xi, \ldots) = \Psi(\xi, \ldots)\ (\mathfrak{U}).$$

More generally, if H is a given subset of $\mathfrak{U}$

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{g}\,(\mathfrak{U}; H)$$

(read: $\mathfrak{f} = \mathfrak{g} \bmod H$) designates the restricted identity, holding for all $\xi, \ldots \in H$, and similarly for the strict case

$$\Phi(\xi, \ldots) = \Psi(\xi, \ldots)\ (\mathfrak{U}; H).$$

It is particularly emphasized that the range of $\mathfrak{f}$ and $\mathfrak{g}$ — and also of Φ and Ψ — need not be confined to H; nor need the constants (if any) occurring in $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ be $\in H$. (More on identites in § 8.)

A mere mapping $f(\xi, \eta, \ldots, \zeta)$ — always understood to involve only a finite number of arguments — from the sets $U, U, \ldots, U$ into U we call a "U-function", and for such we employ Roman letters $f, g, \ldots$. Each $\mathfrak{U}$-function is of course a U-function, but generally not conversely.

A. Boolean Extensions

3. *J-extensions*

Let $\mathfrak{U} = (U, \sigma, \ldots)$ be an algebra and $(J, \times, {}^*)$ a Boolean algebra, with $\times$ as Boolean product and * as Boolean complement. We denote the null and universe elements of J by 0, 1. Let S denote the species of $\mathfrak{U}$. By slightly extending the method of [1] we construct an algebra $\boldsymbol{\mathfrak{U}}, = \boldsymbol{\mathfrak{U}}_{[J]}$, again of species S, called the "bounded J-extension" (= bounded "Boolean extension") of $\mathfrak{U}$.

The elements of $\mathfrak{U}_{[J]}$, written $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \ldots$ (bold face), and also written $[\boldsymbol{\alpha}]$, $[\boldsymbol{\beta}]$, $[\boldsymbol{\xi}], \ldots$ (square bracket) are the class $\boldsymbol{U}, = \boldsymbol{U}_{[J]}$ of "bounded J-partition vectors over U",

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}] = [\ldots, a_\mu, \ldots] \qquad (\mu \in U),$$

defined as follows: to each $\mu \in U$ is associated an element $a_\mu \in J$, such that

(1°) the associated a_μ are pairwise disjoint,

$$a_\mu \times a_\nu\ (= a_\mu a_\nu) = 0 \quad \text{for} \quad \mu \neq \nu\ (\mu, \nu \in U).$$

(2°) all except a finite number of the associated a_μ are $= 0$.

(3°) $\overset{\times *}{\sum\limits_{\mu \in U}} a_\mu = 1$ $\left(\overset{\times *}{\sum} \text{ denotes Boolean union}\right)$[3].

[3]) For $a, b \in J$, $a \times^* b = (a^* b^*)^*$ = union of a and b. Since the "idempotent components" a_μ of $\boldsymbol{\alpha}$ are pairwise disjoint, the union $\overset{\times *}{\sum}$ may also be replaced by the corresponding Boolean ring sum. Because of (2°), $\overset{\times *}{\sum} a_\mu$ always exists with no restriction whatever on the Boolean algebra J. If $\mathfrak{U}$ is a finite algebra, (2°) is of course automatically satisfied.

Instead of demanding (2°) one may — in case $\mathfrak{U}$ is not finite — simply require the algebra J to be atomistic and complete. This approach, however — proposed and partially developed in [1] — is not fruitful for the non-finite case.

As indicated, we consistently employ the

Notation: Small Roman letters $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ denote $\in J$; small Greek letters $\alpha, \beta, \ldots, \xi, \eta, \ldots$ denote elements of $\mathfrak{U}$; boldface $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$ (also $[\boldsymbol{\alpha}], \ldots$ etc.) denote $\in \mathbf{U}, = \mathbf{U}_{[J]}$.

Elements $\boldsymbol{\alpha} = [\ldots, a_\mu, \ldots]$, $\boldsymbol{\beta} = [\ldots, b_\mu, \ldots]$ of $\mathbf{U}$ are regarded as the "same", $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, if and only if all corresponding components are the same, $a_\mu = b_\mu$ $(\mu \in \mathfrak{U})$.

In view of the boundedness condition (2°) above, the remainder of the construction for $\mathfrak{U}_{[J]}$ carries over essentially as in the finite kernel case of [1]. Briefly this goes as follows:

If $f(\xi, \eta, \ldots)$ is any U-function (end of § 2), its "extension" (= J-extension) to $\boldsymbol{U}, = \boldsymbol{U}_{[J]}$ is defined as the U-function $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$, where

$$[f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)]_\mu = \text{def.} = \overset{\times\bullet}{\sum_{f(\alpha,\beta,\ldots)=\mu}} (x_\alpha y_\beta \ldots) \qquad (\mu \in U) \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\xi} = [\ldots, x_\mu, \ldots],\ \boldsymbol{\eta} = [\ldots, y_\mu, \ldots], \ldots .$$

Here the Boolean union, $\overset{\times\bullet}{\sum}$, extends over all terms $(x_\alpha y_\beta \ldots)$ for which $f(\alpha, \beta, \ldots) = \mu$; if for given μ no such term exists, the corresponding component $[f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)]_\mu$ is defined as 0. Since $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$ are always bounded, and since the arguments in f are finite in number, it follows that the number of terms in $\overset{\times\bullet}{\sum}$ is bounded and hence that $\overset{\times\bullet}{\sum}$ always exists. That the components $[f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)]_\mu$ also satisfy (1°) and (3°) above, and hence that $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ as defined is actually always an element of U, is readily verified as in [1].

Thus in particular each $\mathfrak{U}$-function, and hence every primitive $\mathfrak{U}$-function $\sigma(\xi, \eta, \ldots)$, may be extended to a $U_{[J]}$ function $\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$. The algebra $\mathbf{U}_{[J]}$ is now defined:

Def. $\mathbf{U}, = \mathbf{U}_{[J]} = (\boldsymbol{U}, \sigma, \ldots)$ is defined as the algebra, of species S, whose class of elements is $\boldsymbol{U}, = \boldsymbol{U}_{[J]}$, and in which each primitive operation $\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ is defined as the extension (3.1) to $\boldsymbol{U}$ of the corresponding operation $\sigma(\xi, \eta, \ldots)$ of $\mathfrak{U}$,

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) \in \boldsymbol{U}$$

$$[\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)]_\mu = \overset{\times\bullet}{\sum_{\sigma(\alpha,\beta,\ldots)=\mu}} (x_\alpha y_\beta \ldots) \qquad (\mu \in \mathfrak{U})$$

$$\boldsymbol{\xi} = [\ldots, x_\mu, \ldots],\ \boldsymbol{\eta} = [\ldots, y_\mu, \ldots], \ldots .$$

4. $\mathfrak{U}$ *imbedded in* $\mathbf{U}_{[J]}$; *properties of J-extended functions*

As in [1], the class $\mathfrak{U}'$ of all "regular" elements

$$[\mathbf{1}_\alpha] = [\ldots, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots] \ (\alpha^{\text{th}} \text{ component} = 1;\ \alpha \in \mathfrak{U}) \tag{4.1}$$

of $\mathbf{U}_{[J]}$ is easily shown to form a subalgebra (= "regular" subalgebra) of $\mathbf{U}$, and is further seen to be isomorphic with $\mathfrak{U}$,

$$\alpha \leftrightarrow [\mathbf{1}_\alpha], \quad \mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}' \qquad (\alpha \in \mathfrak{U}). \tag{4.2}$$

We henceforth *identify* $\mathfrak{U}$ with $\mathfrak{U}'$ and speak of the subalgebra $\mathfrak{U}$ of $\mathbf{U}_{[J]}$,

$$\mathfrak{U} < \mathbf{U} . \tag{4.3}$$

Each U-function $f(\xi, \eta, \ldots)$ J-extends, via (3.1), to a unique U-function $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$,

$$f(\xi, \eta, \ldots) \to f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) .$$

As in [1] we call $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ "regular" to distinguish it from a general U-function, that is:

Def. A $U_{[J]}$-function $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ is called "regular" if and only if it is the J-extension of some U-function $f(\xi, \eta, \ldots)$; the latter is then called an "antecedent" of $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$.

We list as (I)—(III) a number of lemmas whose proofs involve only trivial modifications of the corresponding results for finite kernel given in [1].

(I). There is a $1-1$ correspondence ("regular" correspondence)

$$f(\xi, \ldots) \leftrightarrow f(\boldsymbol{\xi}, \ldots) \tag{4.4}$$

between the U-functions and the regular U-functions. The (unique) antecedent of a regular U-function $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ is simply the "regular projection" of $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$, i.e., the function resulting from the restriction of $\boldsymbol{\xi}, \ldots$ to the regular subalgebra $\mathfrak{U}$ of $\mathbf{U}$.

(II). The regular correspondence (4.4) is preserved under all compositions of functions. Thus any composition of regular U-functions is a regular U-function.

(III). For the constant function, α ($\alpha \in \mathfrak{U}$), and for the identity function ξ, the regular correspondent is

$$\begin{aligned} \alpha &\leftrightarrow \alpha\ (= [1_\alpha]) \\ \xi &\leftrightarrow \boldsymbol{\xi} . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Thus (via (II)): Each $\mathfrak{U}$-function $\mathfrak{f}(\xi, \ldots)$ has as its J-extension the $\mathbf{U}$-function $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ obtained from $\mathfrak{f}(\xi, \ldots)$ by replacing each indeterminate ξ by $\boldsymbol{\xi}$ and by leaving the constants (if any) occurring in $\mathfrak{f}(\xi, \ldots)$ unchanged,

$$\mathfrak{f}(\xi, \ldots) \leftrightarrow \mathfrak{f}(\boldsymbol{\xi}, \ldots) . \tag{4.6}$$

The J-extension $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ of a $\mathfrak{U}$-function $\mathfrak{f}(\xi, \ldots)$ is called a "regular $\mathbf{U}$-function"; this is equivalent to: a $\mathbf{U}$-function in which all constants (if any) which occur are elements of the subalgebra $\mathfrak{U}$ of $\mathbf{U}$. Thus, under the regular correspondence (4.4), *$\mathfrak{U}$-functions and regular $\mathbf{U}$-functions are in $1-1$ correspondence*, (4.6).

5. *Representation in the small*

Let $\mathfrak{A} = (A, \sigma, \ldots)$ be an algebra and let $f(\xi, \ldots)$ be an A-function.

Def. 5. (a) The A-function $f(\xi, \ldots)$ is said to be "$\mathfrak{A}$ representable in the small" if corresponding to each *finite* subset, N, of A there exists an $\mathfrak{A}$-function $\mathfrak{f}^{(N)}(\xi, \ldots)$ which represents f in N,

$$\mathfrak{f}^{(N)}(\xi, \ldots) = f(\xi, \ldots) , \quad (\xi, \ldots \in N) .$$

(b) If $\mathfrak{A}$ is a subalgebra of $\boldsymbol{\mathfrak{A}} = (\boldsymbol{A}, \sigma, \ldots)$, $\mathfrak{A} < \boldsymbol{\mathfrak{A}}$, then an $\boldsymbol{A}$-function $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ is said to be "$\mathfrak{A}$-representable in the small" if corresponding to each finite subset N' of $\boldsymbol{A}$ there exists an $\mathfrak{A}$-function $\mathfrak{f}^{(N')}(\xi, \ldots)$ such that $\mathfrak{f}^{(N')}(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ represents $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ in N',

$$\mathfrak{f}^{(N')}(\boldsymbol{\xi}, \ldots) = f(\boldsymbol{\xi}, \ldots), \quad (\boldsymbol{\xi}, \ldots \in N').$$

Applied to the J-extension of $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} < \boldsymbol{\mathfrak{U}} (= \boldsymbol{\mathfrak{U}}_{[J]})$, we have the

Lemma 5. *If $f(\xi, \ldots)$ is a U-function which is $\mathfrak{U}$-representable in the small, then its J-extension $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ is a $\boldsymbol{U}$-function which is $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$-representable in the small. Conversely if $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ is a $\boldsymbol{U}$-function which is $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$-representable in the small, then its regular projection $f(\xi, \ldots)$ is a U-function which is $\mathfrak{U}$-representable in the small.*

Proof. For $\boldsymbol{\alpha} = [\ldots, a_\mu, \ldots] \in \boldsymbol{\mathfrak{U}} (= \boldsymbol{\mathfrak{U}}_{[J]})$, let $\mathrm{Rg}(\boldsymbol{\alpha})$, called the "range" of $\boldsymbol{\alpha}$, denote the subset of all $\mu \in \mathfrak{U}$ such that $a_\mu \neq 0$. Since $\boldsymbol{\alpha}$ is bounded it follows that $\mathrm{Rg}(\boldsymbol{\alpha})$ is a finite non-empty subset of $\mathfrak{U}$. The same then follows for $\mathrm{Rg}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\gamma})$, the range of a finite subset of $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$, defined by

$$\mathrm{Rg}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}) = \mathrm{Rg}(\boldsymbol{\alpha}) \cup \mathrm{Rg}(\boldsymbol{\beta}) \cup \cdots \text{ (union)}.$$

Let now $N' = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}\}$ be a finite subset of $\boldsymbol{U}$ and let $f(\xi, \ldots)$ be a U-function, and $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ its J-extension. We are assuming $f(\xi, \ldots)$ to be $\mathfrak{U}$-representable in the small, and we must show $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ to be also $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$-representable in the small. Let $\mathfrak{f}^{(N')}(\xi, \ldots)$ be a $\mathfrak{U}$-function which represents $f(\xi, \ldots)$ in the finite set $\mathrm{Rg}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\gamma})$. We assert that $\mathfrak{f}^{(N')}(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ then represents $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ in N'. We have

$$[f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)]_\mu = \sum_{f(\alpha, \beta, \ldots) = \mu}^{\times, *} (x_\alpha y_\beta \ldots)$$

where $\boldsymbol{\xi} = [\ldots, x_\mu, \ldots]$, $\boldsymbol{\eta} = [\ldots, y_\mu, \ldots], \ldots$. We thus have

$$[f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)]_\mu = \sum_{\mathfrak{f}^{(N')}(\alpha, \beta, \ldots) = \mu}^{\times, *} (x_\alpha y_\beta \ldots) \quad (\text{for } \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots \in N'), \tag{5.1}$$

since if any $\alpha, \beta, \ldots$ or $\gamma \notin \mathrm{Rg}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\gamma})$, the corresponding term in $\sum^{\times, *}$ is 0. On the other hand, from III of § 4, the J-extension of the $\mathfrak{U}$-function $\mathfrak{f}^{(N')}(\xi, \eta, \ldots)$ is $\mathfrak{f}^{(N')}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$, and hence

$$[\mathfrak{f}^{(N')}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)]_\mu = \sum_{\mathfrak{f}^{(N')}(\alpha, \beta, \ldots) = \mu}^{\times, *} (x_\alpha y_\beta \ldots) \quad (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots \in \boldsymbol{U}). \tag{5.2}$$

Thus from (5.1) and (5.2) we have

$$[\mathfrak{f}^{(N')}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)]_\mu = [f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)]_\mu \quad (\text{for } \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots \in N'), \tag{5.3}$$

which is the desired first part of the lemma. The converse part is an immediate consequence of I, § 4.

6. *Framal algebras, etc.*

As a companion to the identification of $\mathfrak{U}$ as a subalgebra of $\boldsymbol{\mathfrak{U}}_{[J]}$, we further seek to identify the Boolean algebra $(J, \times, {}^*)$ as a subsystem of $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$. To this end we shall presently require that $\mathfrak{U}$ possess a certain weak type of structure, for which we now prepare.

Def. 6.1. By a "frame" $(B, \times, {}^\wedge, {}^\vee)$, also written $(B, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$, we mean an algebra of species (2, 1, 1) which possesses a pair of distinguished elements $0, 1 \in B$ $(0 \neq 1)$, and where (i) $\xi^\wedge$ and $\xi^\vee$ are permutations of B with $\xi^\vee$ the inverse of $\xi^\wedge$, and with (ii)

$$0^\wedge = 0^\vee = 1$$

$$0 \times \xi = \xi \times 0 = 0\,, \quad 1 \times \xi = \xi \times 1 = \xi \quad (\xi \in B)\,.$$

The elements 0, 1 are called the zero and identity of the frame.

Def. 6.2. (a) An algebra $\mathfrak{B} = (B, \sigma, \ldots)$ is called "framal" — also of "class *f*", also an "*f*-algebra" — if a frame $(B, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ exists in the set B such that the B-functions $\times, {}^\wedge, {}^\vee$ are all $\mathfrak{B}$-representable, i.e., are all representable as $\mathfrak{B}$-functions. (If these are all representable as strict $\mathfrak{B}$-functions, $\mathfrak{B}$ is said to be "strictly framal".) Such a frame $(B, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ is then called a "$\mathfrak{B}$-frame" (respectively a "strict" $\mathfrak{B}$-frame).

(b) $\mathfrak{B}$ is called "framal in the small" — also of "class f/sm", also an "f/sm-algebra" — if a frame $(B, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ exists in the set B such that the B-functions $\times, {}^\wedge, {}^\vee$ are all $\mathfrak{B}$-representable in the small. Such a frame is then called a "$\mathfrak{B}$/sm-frame".

(c) If $\mathfrak{B}$ is a subalgebra of $\boldsymbol{\mathfrak{B}} = (\boldsymbol{B}, \sigma, \ldots)$, $\mathfrak{B} < \boldsymbol{\mathfrak{B}}$, then $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ is said to be "$\mathfrak{B}$-framal", respectively "$\mathfrak{B}$-framal in the small" — or "$\mathfrak{B}$-framal/sm" — if a frame $(\boldsymbol{B}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ exists in the class $\boldsymbol{B}$ such that $0, 1 \in B$ and such that the $\boldsymbol{B}$-functions $\times, {}^\wedge, {}^\vee$ are all $\mathfrak{B}$-representable, respectively all $\mathfrak{B}$-representable in the small (Def. (b), § 5). Such a frame is then called a "$\mathfrak{B}$-frame", respectively a "$\mathfrak{B}$/sm-frame" of $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$.

Remark 1. In the case (c) above, if $(\boldsymbol{B}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ is a $\mathfrak{B}$-frame in the small for $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$, then $(B, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ is a subalgebra of $(\boldsymbol{B}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ and the former is a $\mathfrak{B}$-frame in the small for $\mathfrak{B}$; in particular, $\mathfrak{B}$ is then also $\mathfrak{B}$-framal in the small. (A similar remark applies to the stronger assumption, where $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ is $\mathfrak{B}$-framal.) We shall also be concerned with the reverse situation: given that $\mathfrak{B}$ is framal in the small, with $(B, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ as an f/sm frame, and given that $\mathfrak{B} < \boldsymbol{\mathfrak{B}}$, can the definitions of $\times, {}^\wedge, {}^\vee$ be extended to $\boldsymbol{B}$ in such a way that $(\boldsymbol{B}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ will be a $\mathfrak{B}$/sm frame of $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$?

Remark 2. The ambiguous use of the symbols 0, 1 and $\times$, with one set of meanings in J and another in $\mathfrak{B}$, anticipates a single-meaninged interpretation based on the (isomorphic) identification of $(J, \times, {}^*)$ as a subsystem of $\mathfrak{U}_{[J]}$ (§ 7). In any event, the notational convention of § 3 (Greek letters $\in \mathfrak{U}$, Roman letters $\in J$) will distinguish the meanings, e.g.: in $1 \times a$ both 1 and $\times$ refer to J, while in $1 \times \alpha$ both refer to $\mathfrak{U}$ (or, more specifically, to a given frame in $\mathfrak{U}$).

7. *The identification of J within $\mathfrak{U}_{[J]}$*

Without explicit mention we shall henceforth assume that $\mathfrak{U}$ is an algebra of class f/sm (framal in the small). Algebras of this class abound, even where $\mathfrak{U}$ is framal (i.e., framal "in the large"), — compare with [1]. Again — of particular importance for us in the sequel — every $\mathfrak{U}$ which is functionally complete in the small (§ 13), e.g., an arbitrary field, is also framal in the small.

In addition to our earlier identification of $\mathfrak{U}$ with the regular subalgebra of $\mathbf{U}(=\mathfrak{U}_{[J]})$, $\mathfrak{U} < \mathbf{U}$, we shall presently also identify J within $\mathbf{U}$.

Let $(U, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ be a fixed $\mathfrak{U}$/sm frame. It's J-extension $(\boldsymbol{U}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ — in which $\times, {}^\wedge, {}^\vee$ are the J-extensions of the U-functions $\times, {}^\wedge, {}^\vee$ — is seen to satisfy

$$0^\wedge = 1, 0^\vee = 1\,; \quad 0 \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \times 0 = 0\,; \quad 1 \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \times 1 = \boldsymbol{\xi}, (\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{U}),$$

and hence is a frame. This fact combined with Lemma 5 then yields

Lemma 7.1. $(\boldsymbol{U}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ *is a* $\mathfrak{U}$/sm *frame of* $\mathbf{U}$, $= \mathfrak{U}_{[J]}$. *We speak of this as "the"* $\mathfrak{U}$/sm *frame of* $\mathbf{U}$.

In writing the elements of $\boldsymbol{U}$, $= U_{[J]}$ we shall, as in [1], reserve the "first two" places for the 0 and 1 components,

$$\alpha = [\boldsymbol{\alpha}] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots] \qquad (\mu \in \mathfrak{U})\,.$$

Let J' denote the class of all elements of $\boldsymbol{U}$ of the form

$$[a^*, a, 0, 0, \ldots, 0, \ldots]\,.$$

Then, precisely as in the finite kernel case in [1], (p. 313), one proves the

Theorem 7.2. $(J', \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ *is a subalgebra (= subframe) of the frame* $(\boldsymbol{U}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ *of* $\mathbf{U}$, *and is a Boolean algebra, with* $\times$ *as Boolean product and* ${}^\wedge = {}^\vee$ *as Boolean complement. Via the* $1-1$ *correspondence*

$$J \leftrightarrow J', \quad a \leftrightarrow [a^*, a, 0, \ldots, 0, \ldots]\,,$$

the Boolean algebra J' *is isomorphic with the ground Boolean algebra (= "core")* J,

$$J \cong J'.$$

We shall henceforth *identify* J with J' and refer to the "core" of $\mathfrak{U}_{[J]}$, and also to the core of $(\boldsymbol{U}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$,

$$J = J', \quad a = [a^*, a, 0, \ldots, 0, \ldots], J \subsetneq \mathfrak{U}_{[J]}\,. \tag{7.1}$$

For core elements, then:

$$a^\wedge = a^\vee = a^*, \quad a^{\wedge\wedge} = a^{\vee\vee} = \text{etc.} = a \quad (a \in J)\,.$$

Furthermore, with the identification of J as the core of $\mathbf{U}$, our previous Boolean sum $\overset{\times_*}{\sum}$ (union) may now be internally expressed as an operation in $\mathbf{U}$,

$$\overset{\times_*}{\sum} = \overset{\times_\wedge}{\sum} \tag{7.2}$$

where $\times_\wedge$ is the "${}^\wedge$-transform" of $\times$,

$$\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\xi}^\wedge \times \boldsymbol{\eta}^\wedge)^\vee \qquad (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{U}_{[J]})\,. \tag{7.3}$$

$\mathfrak{U}_{[J]}$ thus stands not merely as a kind of "hypercomplex" synthesis, but as an algebra within which both the ground algebra (kernel) $\mathfrak{U}$ and the ground Boolean algebra (core) J are isomorphically identified, — the former as a subalgebra and the latter as a subframe. This situation will presently lead to an abstract characterization of $\mathfrak{U}_{[J]}$ (§ 10).

8. *Identities in the small*

Let $\mathfrak{A} = (A, \sigma, \ldots)$ be an algebra and let H be a fixed subset of A, $H \subseteq A$. Let

$$I : I_1(\xi, \ldots) = I_2(\xi, \ldots)\ (H)$$

be an identity within H, and where I_1 as well as I_2 is some composition of $\mathfrak{A}$-functions and/or A-functions. Here $I_1 = I_2$ for all $\xi, \ldots \in H$, and we do not require that $I_1(\xi, \ldots)$ be an element of H for $\xi \in H$, and similarly for I_2.

Def. 8. (a) If each A-function $f(\xi, \ldots)$ which occurs in I_1 or in I_2 may be represented as an $\mathfrak{A}$-function $\mathfrak{f}(\xi, \ldots)$,

$$\mathfrak{f}(\xi, \ldots) = f(\xi, \ldots),\ (\xi \in A)\,,$$

we say that I is an "H-identity which is $\mathfrak{A}$-representable",

$$I \in |\mathfrak{A}; H|\,, \tag{8.1}$$

where $|\mathfrak{A}; H|$ denotes the class of all H-identities which are $\mathfrak{A}$-representable (and where the right sides of (8.2)—(8.4) below are similarly defined).

(b) If each A-function $f(\xi, \ldots)$ which occurs in I may be represented in the small by an $\mathfrak{A}$-function (§ 5), we speak of I as an "H-identity which is $\mathfrak{A}$-rep/sm", — in symbols

$$I \in |\mathfrak{A}/\mathrm{sm}; H|\,. \tag{8.2}$$

Let $\mathfrak{A}$ be a subalgebra of $\mathbf{\mathfrak{A}} = (\mathbf{A}, \sigma, \ldots)$, $\mathfrak{A} < \mathbf{\mathfrak{A}}$, let $\mathbf{H}$ be a fixed subset of $\mathbf{A}$, $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{A}$, and let

$$I : I_1(\boldsymbol{\xi}, \ldots) = I_2(\boldsymbol{\xi}, \ldots)\ (\mathbf{H})$$

be an identity within $\mathbf{H}$, and where I_1 as well as I_2 is some composition of $\mathfrak{A}$-functions in $\mathbf{\mathfrak{A}}$[4]) and/or $\mathbf{A}$-functions. Then

(c) If each $\mathbf{A}$-function which occurs in I is $\mathfrak{A}$-representable in the small (§ 5), we say that I is an "$\mathbf{H} \subseteq \mathbf{A}$ identity which is $\mathfrak{A}$-rep/sm", — in symbols

$$I \in |\mathfrak{A}/\mathrm{sm}; \mathbf{H} \subseteq \mathbf{\mathfrak{A}}|\,. \tag{8.3}$$

With $\mathfrak{A}$ again a subalgebra of $\mathbf{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} < \mathbf{\mathfrak{A}}$, but with two or more fixed subsets

$$\mathbf{H} \subseteq \mathbf{\mathfrak{A}}\,,\quad \mathbf{H}' \subseteq \mathbf{\mathfrak{A}}, \ldots$$

the case of

$$I : I_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots; \boldsymbol{\xi}', \ldots; \ldots) = I_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots; \boldsymbol{\xi}', \ldots)\,,\quad (\mathbf{H}, \mathbf{H}', \ldots)\,,$$

an identity for all $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots \in \mathbf{H}$, for all $\boldsymbol{\xi}', \ldots \in \mathbf{H}', \ldots$, and where I_1 and I_2 are again compositions of $\mathfrak{A}$-functions in $\mathbf{\mathfrak{A}}$ and/or $\mathbf{A}$-functions, leads to the definition

(d) If each $\mathbf{A}$-function which occurs in I is $\mathfrak{A}$-representable in the small we say that "I is $\mathfrak{A}$-representable in the small, and is an identity for $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots \in \mathbf{H}$,

[4]) An "$\mathfrak{A}$-function in $\mathbf{\mathfrak{A}}$" is an $\mathbf{\mathfrak{A}}$-function in which all constants (if any) which occur are elements of the subalgebra $\mathfrak{A}$; otherwise stated: an $\mathbf{\mathfrak{A}}$-function which arises from an $\mathfrak{A}$-function $\mathfrak{f}(\xi, \eta, \ldots)$ by replacing the $\mathfrak{A}$-indeterminates $\xi, \eta, \ldots$ by $\mathbf{\mathfrak{A}}$-indeterminates $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$.

$\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}', \ldots \in \boldsymbol{H}', \ldots$" — in symbols

$$I \in |\mathfrak{A}/\mathrm{sm}; \boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}', \ldots \subseteq \boldsymbol{\mathfrak{A}}| . \tag{8.4}$$

In the applications to follow one of the $\boldsymbol{H}'$ is usually $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ itself.

9. *Some fundamental identities. Normal decomposition theorem*

We return now to $\mathfrak{U}$ and $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ $(= \boldsymbol{\mathfrak{U}}_{[J]}$ as in § 7, where $(U, \times, {}^{\wedge}, {}^{\vee}; 0, 1)$ is a $\mathfrak{U}$/sm frame, and $(\boldsymbol{U}, \times, {}^{\wedge}, {}^{\vee}; 0, 1)$ its J-extension. In thinking of $\mathfrak{U}$ and J as unrelated abstract systems, on the one hand, and as subsystems of $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ on the other, we note the following. $(J, \times, {}^{*})$ as an abstract Boolean algebra, enjoys well known identities, for instance

$$a \times b = b \times a . \tag{9.1}$$

In reexamining this internally, within $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$, J is identified as the core of $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ (via Theorem 7.2), $J \subseteq \boldsymbol{\mathfrak{U}}$, while the Boolean $\times$ and * are now identified as the $\times$ and ${}^{\wedge}$ (or ${}^{\vee}$) of the frame $(\boldsymbol{U}, \times, {}^{\wedge}, {}^{\vee}; 0, 1)$. These $\times, {}^{\wedge}, {}^{\vee}$ operations are $\mathfrak{U}$-rep/sm in $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$. Thus, when conceived internally, the status of the identity (9.1) is changed to an "in the small" identity. More precisely (§ 8),

$$\text{"}a \times b = b \times a\text{"}, \in |\mathfrak{U}/\mathrm{sm}; J \subset \boldsymbol{\mathfrak{U}}| .$$

A similar remark applies elsewhere below where, for simplicity, we speak merely of "identities" rather than "in the small" identities. Thus for one of the identities below,

$$a \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \times a, \in |\mathfrak{U}/\mathrm{sm}; a \in J \subset \boldsymbol{\mathfrak{U}}, \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\mathfrak{U}}| .$$

The core elements of $\boldsymbol{\mathfrak{U}}_{[J]}$ commute and associate,

$$ab = ba$$

$$a(bc) = (ab)c .$$

The following additional identities (in the small), including the normal decomposition theorem, are proved with only minor modifications as in the corresponding finite kernel theorems ([1], p. 314); we omit the details.

Theorem 9.1. *Let $\mathfrak{U}$ be an algebra of class f/sm, let J be a Boolean algebra, let $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ be the J-extension of $\mathfrak{U}$ and identify J and $\mathfrak{U}$ with the core and kernel of $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$. Then:*

For $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\mathfrak{U}}$; $a, b \in J$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} a &= a \boldsymbol{\xi} \\ (\boldsymbol{\xi} a) b &= \boldsymbol{\xi}(ab) = \boldsymbol{\xi} ab \\ (\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}) a &= \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta} a) = \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta} a \end{aligned} \tag{9.1}$$

For $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \boldsymbol{\mathfrak{U}}$; a, b, c pairwise disjoint $\in J$,

$$a\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} b\boldsymbol{\eta} = b\boldsymbol{\eta} \times_{\wedge} a\boldsymbol{\xi} \tag{9.2}$$

$$(a\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} b\boldsymbol{\eta}) \times_{\wedge} c\boldsymbol{\zeta} = a\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} (b\boldsymbol{\eta} \times_{\wedge} c\boldsymbol{\zeta}) = a\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} b\boldsymbol{\eta} \times_{\wedge} c\boldsymbol{\zeta}$$

For $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathfrak{U}$; *a, b disjoint* $\in J$,

$$\boldsymbol{\zeta}(a\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} b\boldsymbol{\eta}) = a\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} b\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\eta} \tag{9.3}$$

$$(a\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} b\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\zeta} = a\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\zeta} \times_{\wedge} b\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\zeta}\,.$$

Theorem 9.2. *(Normal decomposition theorem). Let* $\mathfrak{U}$, J *and* $\mathfrak{U}$ $(= \mathfrak{U}_{[J]})$ *be as in Theorem* 9.1, *and let* $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$ *be* $\in \mathfrak{U}$ *with (idempotent) components* $[\boldsymbol{\xi}]_\mu = x_\mu, \ldots$

$$\boldsymbol{\xi} = [\ldots, x_\mu, \ldots]\,, \quad \boldsymbol{\eta} = [\ldots, y_\mu, \ldots], \ldots \qquad (\mu \in \mathfrak{U})\,.$$

Then each $\mathfrak{U}$*-function* $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\zeta})$ *possesses an expansion (= "normal decomposition")*

$$\mathfrak{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\zeta}) = \sum_{\mu, \nu, \ldots \in \mathfrak{U}}^{\times\,\wedge} \mathfrak{f}(\mu, \nu, \ldots)\, x_\mu\, y_\nu \ldots\,. \tag{9.4}$$

It is remarked that $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\zeta})$ is here any $\mathfrak{U}$-function whatever (and in particular need not be regular (§ 4)). It is further remarked, in connection with the true "in the small" nature of the identity (9.4), that the $\overset{\times\,\wedge}{\sum}$ is always finite (i.e., only a finite number of non-zero terms), since $\mathrm{Rg}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\zeta})$ (§ 5) is always a finite subset of $\mathfrak{U}$.

10. Abstract formulation

For a given algebra $\mathfrak{U}$ we recall that a Boolean extension of $\mathfrak{U}$ is simply the J-extension $\mathfrak{U}_{[J]}$ for a suitable algebra J. We now give an abstract characterization of the concept "Boolean extension of an algebra of class f/sm". The proof of Theorem 10 requires only minor modifications of the finite kernel proof ([1], p. 317); we omit the details.

Theorem 10. *(Abstract Boolean extension theorem). Let* $\mathfrak{U}$ *be an algebra of class f/sm. For an algebra* $\mathfrak{U}$ *(of the same species as* $\mathfrak{U}$*) to be isomorphic with some Boolean extension of* $\mathfrak{U}$ *it is necessary and sufficient that: (i)* $\mathfrak{U}$ *possess a subalgebra isomorphic with (and here again denoted by)* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} < \mathfrak{U}$; *(ii)* $\mathfrak{U}$ *possess a* $\mathfrak{U}$*-frame in the small,* $(\boldsymbol{U}, \times, ^\wedge, ^\vee; 0, 1)$, *and where (iii) the latter possesses a subalgebra (= subframe)* $(J, \times, ^\wedge, ^\vee; 0, 1)$ *such that*

(1°) *J is a Boolean algebra.*

(2°) $\mathfrak{U}$ *and J satisfy* (9.1), (9.2), (9.3) *of Theorem* 9.1.

(3°) *Each* $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{U}$ *may be expressed in the form*

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times\,\wedge} \mu\, x_\mu$$

in which the x_μ *satisfy*

$x_\mu \in J$; $x_\mu x_\nu = 0$ $(\mu \neq \nu)$; *for only a finite number of* μ *is* $x_\mu \neq 0$;

$$\sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times\,\wedge} x_\mu = 1\,.$$

(4°) *For each* $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{U}$, *the* x_μ *determined by* (3°) *are unique.*

(5°) *For each primitive operation σ of the algebra $\mathfrak{U}$,*

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) = \sum_{\mu, \nu, \ldots \in \mathfrak{U}}^{\hat{\times}} \sigma(\mu, \nu, \ldots)\, x_\mu\, y_\nu \ldots$$

where the x_μ, y_μ, ... are determined from $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$, ... by (3°) *and* (4°).

B. Subdirect Powers. Relation to Boolean Extensions

11. *Normal subdirect powers*

Let $\mathfrak{U} = (U, \sigma, \ldots)$ be framal in the small, let $(U, \times, ^\wedge, ^\vee; 0, 1)$ be a $\mathfrak{U}$/sm frame and let $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$ be the $\mathfrak{N}^{\text{th}}$ direct power of $\mathfrak{U}$; here $\mathfrak{N}$ is of arbitrary cardinality, and $\mathfrak{N}$ is also employed to denote its own index set,

$$\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\ldots, \alpha_i, \ldots), \quad \alpha_i \in \mathfrak{U}, \quad i \in \mathfrak{N}.$$

By Rg$(\boldsymbol{\alpha})$, the (direct) "range" of $\boldsymbol{\alpha}$, we mean the class of all $\mu \in \mathfrak{U}$ such that $\alpha_i = \mu$ for at least one $i \in \mathfrak{N}$. Similarly, for a set $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots \in \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$

(11.1) $\qquad \operatorname{Rg}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots) = \operatorname{Rg}(\boldsymbol{\alpha}) \cup \operatorname{Rg}(\boldsymbol{\beta}) \cup \cdots \subseteq U \; (\cup = \text{union})\,.$

If Rg$(\boldsymbol{\alpha})$ is a finite subset of U we say $\boldsymbol{\alpha}$ is "bounded".

Employing the null and identity of the $\mathfrak{U}$/sm frame: for given $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$ and given $\mu \in \mathfrak{U}$, $P_\mu(\boldsymbol{\alpha})$, the "$\mu^{\text{th}}$ projection" of $\boldsymbol{\alpha}$ is defined by:

$$P_\mu(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta} = (\ldots, \beta_i, \ldots)$$

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & \text{if } \beta_i = \mu \\ 0 & \text{if } \beta_i \neq \mu \end{cases} \quad (i \in \mathfrak{N})\,.$$

Def. 11.1. For an algebra $\mathfrak{U}$ of class f/sm, a subalgebra $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ of a direct power $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$ of $\mathfrak{U}$ is called a "bounded, normal subdirect power" of $\mathfrak{U}$ if (1°) each $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\mathfrak{U}}$ is bounded, (2°) for each $\mu \in \mathfrak{U}$, each "scalar element" $(\ldots \mu, \mu, \ldots, \mu, \ldots)$ — i.e., all components $= \mu$ — is $\in \boldsymbol{\mathfrak{U}}$, (3°) for $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\mathfrak{U}}$ and for $\mu \in \mathfrak{U}$, $P_\mu(\boldsymbol{\alpha}) \in \boldsymbol{\mathfrak{U}}$.

We may now formulate the

Theorem 11.1. *(Fundamental Equivalence Theorem). For an algebra $\mathfrak{U}$ of class f/sm, the class of all bounded Boolean extensions of $\mathfrak{U}$ and the class of all bounded normal subdirect powers of $\mathfrak{U}$ are coextensive, up to isomorphisms.*

In the proof we must show that (I): Given an algebra $\mathfrak{U}$ of class f/sm, and a Boolean algebra J, there exists a bounded normal subdirect power $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ of $\mathfrak{U}$ which is isomorphic with $\mathfrak{U}_{[J]}$, $\mathfrak{U}_{[J]} \cong \boldsymbol{\mathfrak{U}}$. And conversely, (II): Given a bounded normal subdirect power $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ of $\mathfrak{U}$, there exists a Boolean algebra J such that $\boldsymbol{\mathfrak{U}} \cong \mathfrak{U}_{[J]}$. The proof of (I) requires only minor — and quite evident — changes in the corresponding proof for finite kernel ([1], pp. 321—323). We consider then the proof of (II) which requires some preparation, and which is eventually made to depend on the abstract formulation, Theorem 10.

Let $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ be a bounded normal subdirect power of $\mathfrak{U}$. By the (direct) "kernel", $\mathfrak{U}'$, of $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ we mean the subalgebra of all scalar elements $(\mathbf{1}_\mu) = (\ldots, \mu, \mu, \ldots, \mu, \ldots)$, $\mu \in \mathfrak{U}$. Obviously $\mathfrak{U}'$ is a subalgebra of $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ isomorphic with $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}'$, and we shall *identify* these:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}', \quad \mu \leftrightarrow (\ldots, \mu, \mu, \ldots, \mu, \ldots); \quad \mathfrak{U} < \boldsymbol{\mathfrak{U}}\,.$$

Thus whenever we speak of an element μ of $\mathfrak{U}$, when conceived as an element of $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$, μ is identified by its isomorphic image $(\ldots, \mu, \mu, \ldots)$.

Def. 11.2. Let $f(\xi, \eta, \ldots)$ be any U-function. Then its (direct) "extension" to $U^{(\mathfrak{N})}$ is the $U^{(\mathfrak{N})}$-function $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ defined by

$$(f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots))_i = f(\xi_i, \eta_i, \ldots) \ (i \in \mathfrak{N}),$$

where

$$\boldsymbol{\xi} = (\ldots, \xi_i, \ldots), \quad \boldsymbol{\eta} = (\ldots, \eta_i, \ldots), \ldots .$$

If $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ is a bounded normal subdirect power of $\mathfrak{U}$ we have

$$\mathfrak{U} < \boldsymbol{\mathfrak{U}} < \boldsymbol{\mathfrak{U}}^{(\mathfrak{N})}$$

where $\mathfrak{U}$ is identified with the regular subalgebra $\mathfrak{U}'$ of $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$. We shall show that for $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots \in \boldsymbol{\mathfrak{U}}$, the direct extension $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) \subseteq \boldsymbol{\mathfrak{U}}$. In fact, we have

Theorem 11.2. *Let $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ be a bounded normal subdirect power of $\mathfrak{U}$, and let $f(\xi, \eta, \ldots)$ be any U-function and $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ its direct extension to $\boldsymbol{\mathfrak{U}}^{(\mathfrak{N})}$. Then, if $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$ are $\in \boldsymbol{\mathfrak{U}}$,*

(1°) $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) \subseteq \boldsymbol{\mathfrak{U}}$.

(2°) *If $f(\xi, \eta, \ldots)$ is $\mathfrak{U}$-expressible, then $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ is $\mathfrak{U}$-expressible in $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$.*

(3°) *If $f(\xi, \eta, \ldots)$ is $\mathfrak{U}$-expressible in the small, then $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ is $\mathfrak{U}$-expressible in the small in $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$.*

Proof. Assume (case 1) that $f(\xi, \eta, \ldots)$ is $\mathfrak{U}$-expressible,

$$f(\xi, \eta, \ldots) = \mathfrak{f}(\xi, \eta, \ldots).$$

In the direct extension,

$$\alpha \leftrightarrow (\ldots, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \ldots)$$

$$\xi \leftrightarrow \boldsymbol{\xi} = (\ldots, \xi_i, \ldots).$$

That (1°) and (2°) follow with $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) = \mathfrak{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ is now clear since $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ contains all scalar elements and, being a subdirect power of $\mathfrak{U}$, is closed under all primitive operations.

Assume (case 2) that $f(\xi, \eta, \ldots)$ is $\mathfrak{U}$-representable in the small. Let $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ be its direct extension, and consider $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}$, a finite subset of $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$. Then $\mathrm{Rg}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\gamma})$ is a finite subset N of U, and hence $f(\xi, \eta, \ldots)$ is $\mathfrak{U}$-representable in N, say by $\mathfrak{f}^{(N)}(\xi, \eta, \ldots)$. Consider $\mathfrak{f}^{(N)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$, the direct extension of $\mathfrak{f}^{(N)}(\xi, \eta, \ldots)$. By case 1,

$$\mathfrak{f}^{(N)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) \subseteq \boldsymbol{\mathfrak{U}} \quad (\text{for } \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots \in \boldsymbol{\mathfrak{U}}).$$

But from

$$f(\xi, \eta, \ldots) = \mathfrak{f}^{(N)}(\xi, \eta, \ldots) \quad (\text{for } \xi, \eta, \ldots \in N)$$

follows

$$f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) = \mathfrak{f}^{(N)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) \quad (\text{for } \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots \in \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}\})$$

since

$$\begin{aligned} f_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) &= f(\xi_i, \eta_i, \ldots) \\ f_i^{(N)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) &= \mathfrak{f}^{(N)}(\xi_i, \eta_i, \ldots) \end{aligned} \qquad (i \in \mathfrak{N}), \tag{11.2}$$

and since $\{\xi_i, \eta_i, \ldots$ (for all $i \in \mathfrak{N})\} \subseteq \mathrm{Rg}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots) = N$, the right sides of (11.2) are equal for all $i \in \mathfrak{N}$. Thus (1°) and (3°) of Theorem 11.2 are proved.

In the cases 1 and 2 above we have not made full use of the hypothesis that $\mathbf{U}$ is a normal subdirect power of $\mathfrak{U}$, in fact these cases hold if $\mathbf{U}$ is merely a "scalar subdirect power" of $\mathfrak{U}$, i.e., a subdirect power of $\mathfrak{U}$ which contains all scalar elements $(\ldots, \mu, \mu, \ldots, \mu, \ldots)$. Before completing the proof of Theorem 11.2, from the two cases considered we first have the

Lemma 11.3. *Let* $\mathfrak{U}$ *be of class* f/sm, *let* $(U, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ *be a* $\mathfrak{U}$/sm *frame, and let* $\mathbf{U}$ *be a bounded normal subdirect power of* $\mathfrak{U}$. *Then* $(\mathbf{U}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$, *where* $\times, {}^\wedge, {}^\vee$ *are the direct extensions of the* $\mathfrak{U}$/sm *frame operations* $\times, {}^\wedge, {}^\vee$, *is a* $\mathfrak{U}$/sm *frame of* $\mathbf{U}$.

Proof. Since $\times, {}^\wedge, {}^\vee$ are $\mathfrak{U}$-representable in the small, their direct extensions are $\mathfrak{U}$-representable in the small in $\mathbf{U}$ (case 2 above). That ${}^\wedge, {}^\vee$ are permutations of $\boldsymbol{U}$, with

$$0^\wedge = 1,\ 1^\wedge = 0,\ 0 \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \times 0 = 0,\ 1 \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \times 1 = \boldsymbol{\xi}\ (\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{U})$$

is obvious, and completes the Lemma.

To complete the proof of Theorem 11.2, consider now any U-function $f(\xi, \eta, \ldots)$, and let $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ be its direct extension to $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$. Then, from a comparison, right and left, of the i^{th} component $(i \in \mathfrak{N})$, we have

$$(11.3)\quad f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\zeta}) = \sum_{\alpha, \beta, \ldots, \sigma \in \mathfrak{U}}^{\stackrel{\times}{\wedge}} f(\alpha, \beta, \ldots, \sigma) \times P_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \times P_\beta(\boldsymbol{\eta}) \times \cdots \times P_\sigma(\boldsymbol{\zeta}).$$

The expression on the right is only a finite $\times_\wedge$ sum, since $\mathrm{Rg}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\zeta})$ is a finite subset N of $\mathfrak{U}$, and for $\alpha, \beta, \ldots, \sigma \notin N$ the corresponding terms of $\stackrel{\times}{\hat{\sum}}$ are 0. So we have, on the right of (11.3), a finite number of elements of $\mathbf{U}$ combined by $\times, {}^\wedge, {}^\wedge$ (since $\boldsymbol{\xi} \times_\wedge \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\xi}^\wedge \times \boldsymbol{\eta}^\wedge)^\vee$), and such a combination is $\in \mathbf{U}$ by Lemma 11.3. This completes Theorem 11.2.

12. The direct core of $\mathbf{U}$. *Completion of the fundamental equivalence theorem*

Let $\mathbf{U}$ be a bounded normal subdirect power of $\mathfrak{U}$, with $(U, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ as $\mathfrak{U}$/sm frame. Its direct extension $(\boldsymbol{U}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ is then a $\mathfrak{U}$/sm frame of $\mathbf{U}$ (Lemma 11.3). Let J denote the totality of "0 or 1" elements of $\mathbf{U}$: $a \in J$ if and only if $a \in \mathbf{U}$, and

$$a = (\ldots, \Theta_i, \ldots), \quad \text{where } \Theta_i = 0 \text{ or } 1 \qquad (i \in \mathfrak{N}).$$

Then J is seen to be a subalgebra of $(\boldsymbol{U}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$, which we call the (direct) "core" of $\mathfrak{U}$.

Theorem 12. $(J, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$, *the direct core of* $\mathbf{U}$, *is a Boolean algebra, a subframe of* $\mathbf{U}$ *with* $a \times b$ *as Boolean product and* $a^\wedge = a^\vee = a^*$ *as Boolean complement* $(a, b \in J)$.

The proof is direct and will be omitted (compare with [1], p. 320).

The completion of the proof of the converse part, II, of Theorem 11.1 is now possible. With $\mathbf{U}$ a bounded normal subdirect power of $\mathfrak{U}$, identify $\mathfrak{U}$ with the (direct) kernel of $\mathbf{U}$ and choose the Boolean algebra J as the (direct) core

of $\mathfrak{U}$. The results of § 11 then readily permit the verification of the (in the small) identities of Theorem 10 — we omit the details — and thus $\mathfrak{U}$ is isomorphic with $\mathfrak{U}_{[J]}$. This completes the proof of the converse part II, and with it the complete Fundamental Equivalence Theorem 11.1.

C. Functional Completeness in the Small. Structure Theorem

13. Fundamentals

We recall that a (finite) algebra $\mathfrak{A} = (A, \sigma, \ldots)$ is "functionally complete" if for each positive integer, k, each A-function $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ is expressible as an $\mathfrak{A}$-function, $\mathfrak{f}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$[5]). If each such f is expressible by a *strict* $\mathfrak{A}$-function $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, (§ 2), $\mathfrak{A}$ is "functionally strictly complete", also called "primal"[6]).

For the general (i.e., not necessarily finite) case we define

Def. An algebra $\mathfrak{W} = (W, \sigma, \ldots)$ is called "functionally complete in the small" (f.c./sm) if corresponding to each finite subset N of W and each positive integer k, each map $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ from $N, \ldots, N$ into W is expressible within N by some $\mathfrak{W}$-function

$$\mathfrak{f}^{(N)}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = f(\xi_1, \ldots, \xi_k), \quad (\text{for } \xi_1, \ldots, \xi_k \in N).$$

We also write this $\mathfrak{f}^{(N)} = f(\mathfrak{W}, N)$. If corresponding to each N, k and $f(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ as above we can always find a *strict* $\mathfrak{W}$-function

$$\Phi^{(N)}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = f(\xi_1, \ldots, \xi_k), \quad (\text{for } \xi_1, \ldots, \xi_k \in N)$$

we say $\mathfrak{W}$ is "strictly f.c. in the small", also called "primal in the small" (primal/sm).

From the definitions we immediately have

Theorem 13.1: *If $\mathfrak{W}$ is a finite algebra, the assertions*

(a) "*$\mathfrak{W}$ is f.c./sm*" *and* "*$\mathfrak{W}$ is f.c.*" *are equivalent.*

(b) "*$\mathfrak{W}$ is primal/sm*" *and* "*$\mathfrak{W}$ is primal*" *are equivalent.*

Thus the profusion of primal algebras and of functionally complete algebras belong to the class of algebras f.c./sm. Additional examples will be considered in the following sections, §§ 14—15.

Theorem 13.1. *An algebra $\mathfrak{W}$ is f.c./sm — respectively primal/sm — if and only if for each finite subset N of W and for each positive integer k, each map $g(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ from $N, \ldots, N$ into N is representable for all $\xi_1, \ldots, \xi_k \in N$ by some $\mathfrak{W}$-function $\mathfrak{g}^{(N)}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ — respectively by some strict $\mathfrak{W}$-function $\Phi^{(N)}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$,*

$$\mathfrak{g}^{(N)}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = g(\xi_1, \ldots, \xi_k)$$
$$\Phi^{(N)}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = g(\xi_1, \ldots, \xi_k), \ (\xi_1, \ldots, \xi_k \in N).$$

---

[5]) It is well known that $\mathfrak{A}$ is functionally complete if each $\mathfrak{f}(\xi_1, \xi_2)$ ($k = 2$) is expressible by some $\mathfrak{A}$-function $\mathfrak{f}(\xi_1, \xi_2)$.

[6]) In [2] it was convenient to further demand — for primality — that $\mathfrak{A}$ be distinct from the one-element algebra.

Proof. The necessity is immediate. As for the sufficiency, suppose the hypothesis of the Theorem to hold, and let $g_1(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ be a map from $N_1, N_1, \ldots, N_1$ into W, where N_1 is some finite subset of W. If R is the range of g_1 (for $\xi_1, \ldots, \xi_k \in N_1$), set $N = N_1 \cup R$ (union). Then N is again a finite subset of W. Let $g(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ be any $N, N, \ldots, N$ into N mapping which agrees with $g_1(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ for all $\xi_i \in N_1$. By hypothesis g is representable within N by some $\mathfrak{W}$-function $\mathfrak{g}^{(N)}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Hence within N_1, $\mathfrak{g}^{(N)}$ also represents the $N_1, \ldots, N_1$ into W mapping g_1. The primal/sm case is exactly parallel, and the theorem follows.

Theorem 13.2. *An algebra $\mathfrak{W}$ which is f.c./sm is simple.*

Proof. Let $\mathfrak{W}$ be f.c./sm and suppose the theorem false. Then there exists an ideal (= congruence relation) $\mathscr{I}$ and three distinct elements $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ of $\mathfrak{W}$ such that

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2(\mathscr{I}), \quad \alpha_2 \not\equiv \beta(\mathscr{I}).$$

There exists, within $N = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta\}$, a $\mathfrak{W}$-function $\mathfrak{f}^{(N)}(\xi)$ such that $\mathfrak{f}^{(N)}(\alpha_1) = \alpha_2$, $\mathfrak{f}^{(N)}(\alpha_2) = \beta$. If $\mathfrak{f}^{(N)}(\xi)$ is a strict $\mathfrak{W}$-function we already have a contradiction since $\mathscr{I}$ is an ideal. If $\mathfrak{f}^{(N)}(\xi)$ is not strict, let $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ be the constants involved in $\mathfrak{f}^{(N)}$. Then there is a strict $\mathfrak{W}$-function $\Phi^{(N)}(\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi)$ such that

$$\mathfrak{f}^{(N)}(\xi) = \Phi^{(N)}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \xi).$$

So we again have a contradiction for the ideal $\mathscr{I}$:

$$\alpha_2 \equiv \Phi^{(N)}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \alpha_1) \equiv \Phi^{(N)}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \alpha_2) = \beta; \quad \text{but} \quad \alpha_2 \not\equiv \beta(\mathscr{I}).$$

This contradiction establishes the theorem.

Theorem 13.3. *If $\mathfrak{W}$ is primal/sm, it possesses no subalgebra (other than $\mathfrak{W}$).*

Proof. The proof is similar to that of Theorem 13.2, and will be omitted. The conclusion is generally false for algebras which are (merely) functionally complete in the small.

Theorem 13.3 has the interesting

Corollary 13.4. *If $\mathfrak{W}$ is primal/sm and of countable species (i.e., having countably many primitive operations), then $\mathfrak{W}$ is either a finite algebra (and hence primal), or else a countably infinite algebra.*

Proof. Under the hypotheses an element of $\mathfrak{W}$ generates a countable subalgebra of $\mathfrak{W}$, which would be a proper subalgebra if $\mathfrak{W}$ were not countable. Together with Theorem 13.3 this completes the proof. It is noted that a $\mathfrak{W}$ which is (merely) f.c./sm may well be non-countably infinite (see the following section).

14. Fields

As already observed, all finite functionally complete algebras are functionally complete in the small. In this and the following section we exhibit some infinite examples.

Theorem 14.1. *Every field $\mathfrak{F} = (F, +, \times)$ is f.c./sm.*

Proof. By definition we must show, for each finite subset $N = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ of F and each positive integer k, that each mapping $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ of $N, N, \ldots, N$ into F is F-representable for $\xi_1, \ldots, \xi_k \in N$. For given f and k, let

$$f(\alpha_\sigma, \alpha_\tau, \ldots) = \beta_{\sigma\tau} \ldots$$

$$(\beta_{\sigma\tau} \ldots \in F; \sigma, \tau, \ldots \text{ independently } 1, 2, \ldots, n).$$

The mapping f is $\mathfrak{F}$-representable in N by a polynomial

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{(s_1, s_2, \ldots, s_k) = (0, 1, \ldots, n-1)} a_{s_1 s_2 \ldots s_k} \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \ldots \xi_k^{s_k}.$$

The n^n coefficients $a_{s_1 s_2 \ldots s_k}$ we find as $\in \mathfrak{F}$ by solving the n^n linear equations

$$\sum_{s_1, s_2, \ldots = 0, \ldots, n-1} a_{s_1 s_2 \ldots s_k} (\alpha_\sigma)^{s_1} (\alpha_\tau)^{s_2} \ldots (\alpha_k)^{s_k} = \beta_{\sigma\tau} \ldots$$

$$(\sigma, \tau, \ldots \text{ indep.} = 1, 2, \ldots, n).$$

With the $a_{s_1 s_2 \ldots}$ as unknowns the determinant of the left side (except possibly for sign) is familiar as a power of the VanderMonde determinant

$$\Pi (\alpha_h - \alpha_j)$$

$$h < j; h, j = 1, 2, \ldots, n$$

which does not vanish since the α_i are distinct $\in F$. This establishes the theorem.

In a field let $^-$ denote the reciprocal operation

$$\xi^- = \frac{1}{\xi}, \quad \text{with} \quad 0^- = 0.$$

With — (subtraction) and 1 (= identity as a constant operation) we have

Theorem 14.2. *The field of rational numbers, conceived as a system* (Ra, $\times$, —, $^-$, 1), *is primal in the small.*

Proof. By Theorem 14.1 it is merely necessary to show that each element of Ra is strictly expressible. This is a trivial exercise and will be omitted.

15. Post algebra; (generalized) Groups

We recall the primal algebra $(P_n, \times, {}^\frown)$, the basic Post algebra of order n, as an algebra of species (2, 1), where the primitive operations $\times, {}^\frown$ are most easily defined in terms of the ordering

$$0, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_2, 1.$$

Here $\xi \times \eta (= \xi\eta) = \min(\xi, \eta)$ — in the above sequence — and $\xi^\frown$ is the cyclic permutation

$$\xi^\frown : 0^\frown = 1, 1^\frown = \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} = 0.$$

(Compare with [1], pp. 330, 331.)

We propose the denumerably infinite generalization

$$(P_{\aleph_0}, \times, {}^\frown, {}^\smile, 0)$$

in which 0 is a constant operation, and where $\times, {}^\frown, {}^\smile$ are most easily defined in terms of the doubly infinite ordering,

$$0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \quad \ldots, \alpha_2, \alpha_1, 1.$$

Here $\xi \times \eta$ is again $\min(\xi, \eta)$ — in the above ordering — and

$\xi^{\frown}: 0^{\frown} = 1,\ 1^{\frown} = \alpha_1,\ \alpha_1^{\frown} = \alpha_2, \ldots, \ldots, \beta_m^{\frown} = \beta_{m-1}, \ldots, \beta_1^{\frown} = 0$

$\xi^{\smile}: 0^{\smile} = \beta_1,\ \beta_1^{\smile} = \beta_2, \ldots, \ldots \alpha_m^{\smile} = \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_2^{\smile} = \alpha_1,\ \alpha_1^{\smile} = 1,\ 1^{\smile} = 0$.

Theorem 15.1. *The generalized Post algebra* $(P_{\aleph_0}, \times, {}^{\frown}, {}^{\smile}, 0)$ *is primal in the small.*

Proof. 1. Obviously each element of $P_{\aleph_0}$ is strictly definable in terms of the primitive operations.

2. If N is any finite subset of $P_{\aleph_0}$ it may, for sufficiently large n, be imbedded in the finite set

$$N_n = \{0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1, 1\}.$$

Hence it suffices to show that any mapping $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ of $N_n, N_n, \ldots, N_n$ into $P_{\aleph_0}$ is expressible by a strict function for $\xi_1, \ldots, \xi_k \in N_n$.

3. Let $\mu \in N_n$, and let

$$\delta_\mu(\xi; N_n) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \xi = \mu \quad (\xi \in N_n) \\ 0 & \text{if} \quad \xi \neq \mu \end{cases}.$$

The following easily verified formulas show that $\delta_\mu(\xi; N_n)$ is expressible by a strict function, for $\xi \in N_n$.

$$\Delta_0(\xi; N_n) = \{(\xi^{\frown} \xi^{\frown^2} \xi^{\frown^3} \ldots \xi^{\frown^n})(\xi^{\smile} \xi^{\smile^2} \ldots \xi^{\smile^{n+1}})\}^{\frown}$$

$$\Delta_0(\xi; N_n) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \xi = 0 \\ 1 & \text{if} \quad \xi \neq 0 \end{cases} \qquad (\xi \in N_n)$$

$$\Delta_{\beta_i}(\xi; N_n) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \xi = \beta_i \\ 1 & \text{if} \quad \xi \neq \beta_i \end{cases} \qquad (\xi \in N_n;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\Delta_1(\xi; N_n) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \xi = 1 \\ 1 & \text{if} \quad \xi \neq 1 \end{cases} \qquad (\xi \in N_n)$$

$$\Delta_{\alpha_i}(\xi; N_n) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \xi = \alpha_i \\ 1 & \text{if} \quad \xi \neq \alpha_i \end{cases} \qquad (\xi \in N_n;\ i = 1, \ldots, n)$$

$$\Delta_{\beta_i}(\xi; N_n) = \Delta_0(\xi^{\frown^i}; N_n), \qquad (\quad ,, \quad)$$

$$\Delta_1(\xi; N_n) = \Delta_0(\xi^{\smile}; N_n), \qquad (\quad ,, \quad)$$

$$\Delta_{\alpha_i}(\xi; N_n) = \Delta_0(\xi^{\smile^{i-1}}; N_n), \qquad (\quad ,, \quad).$$

From these we have: all $\Delta_\mu(\xi; N_n)$ are expressible as strict functions $(\mu \in N_n)$. Moreover,

$$\delta_\mu(\xi; N_n) = (0^{\smile}\, \Delta(\xi; N_n))^{\frown}.$$

Thus, all $\delta_\mu(\xi; N_n)$ are expressible as strict functions $(\mu \in N_n)$.

4. Let

$$\xi \times_{\frown} \eta = \text{def} = (\xi^{\frown} \times \eta^{\frown})^{\smile}.$$

Then $\xi \times_{\frown} \eta$ is seen to be associative, and

$$0 \times_{\frown} \eta = \eta \times_{\frown} 0 = \eta.$$

We have

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) = \sum_{\mu, \nu, \ldots, \sigma \in N_n}^{\times_\frown} f(\mu, \nu, \ldots, \sigma)\, \delta_\mu(\xi; N_n)\, \delta_\nu(\xi; N_n) \ldots \delta_\sigma(\xi; N_n) .$$

The coefficients $f(\mu, \nu, \ldots, \sigma)$ are simply $\in P_{\aleph_0}$, and are themselves strictly expressible, by 1. Thus each mapping $f(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ is strictly representable, and the theorem is proved.

We mention one additional illustrative example, based on a group. Let $(G', \times)$ be a group (with identity written as 1), and let $(G, \times, 0)$ be the corresponding "group with null": $G = G'$ augmented by a null element, 0, where $0 \times \xi = \xi \times 0 = 0$ $(\xi \in G)$, and $\xi \times \eta$ as in $(G', \times)$ for $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$. If ξ^- is the $\times$-inverse of ξ, with 0^- defined as 0, and if $\xi^\frown$ is any permutation of the set G. with $\xi^\smile$ as its inverse, and where $0^\frown = 1$, then we have

Theorem 15.2. $\mathscr{G} = (G, \times, ^\frown, ^\smile, 0)$ *is functionally complete in the small.*

Proof. Consider the $\mathscr{G}$-functions

$$\delta_0(\xi) = (0^\smile \times \xi \times \xi^-)^\frown$$

$$\delta_\mu(\xi) = (0^\smile \times (\mu^- \times \xi)^\smile \times (\mu^- \times \xi)^{\smile -})^\frown \quad (\text{for } \mu \in G, \mu \neq 0) .$$

These $\mathscr{G}$-functions are verified to be the characteristic functions, and if in $\mathscr{G}$ we again define $\times_\frown$ by

$$\xi \times_\frown \eta = (\xi^\frown \times \eta^\frown)^\smile$$

this $\times_\frown$ is associative, and in any finite subset N of $\mathscr{G}$, if $f(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ is an $N, N, \ldots$ into N mapping

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathscr{G}}^{\times_\frown} f(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)\, \delta_\alpha(\xi_1)\, \delta_\beta(\xi_2) \ldots \delta_\gamma(\xi_k) .$$

Thus f is represented by a $\mathscr{G}$-function throughout N, and, by Theorem 13.1, the theorem is established.

16. Subextension of identities

From [1] we recall the

Def. 16.1. Let $\mathfrak{A}$ be a subalgebra of $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} < \boldsymbol{\mathfrak{A}}$. If for each $\mathfrak{A}$-identity $\mathfrak{f}(\xi, \ldots) = \mathfrak{g}(\xi, \ldots)$ it follows that $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\xi}, \ldots) = \mathfrak{g}(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ is an identity of $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, we say that the identities of $\mathfrak{A}$ "extend" to $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$.

This concept plays a central role in the first structure theorem (§ 1, Theorem A) for the case of a finite kernel. For our general, not necessarily finite kernel we shall want the (generally) stronger condition,

Def. 16.2. Let $\mathfrak{A}$ be a subalgebra of $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} < \boldsymbol{\mathfrak{A}}$. The identities of $\mathfrak{A}$ are said to "subextend" to $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ if there exists a mapping τ,

$$\tau : N \to \tau(N), = \mathbf{N}$$

from the finite subsets N of $\mathfrak{A}$ into (not necessarily finite) subsets $\mathbf{N}$ of $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$. with the following properties:

(1°) $\tau(N_1 \cap N_2) = \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$ $(\cap = \text{intersection})$.

(2°) The image sets N cover $\mathfrak{A}$.

(3°) Let $\mathfrak{f}(\xi, \ldots), \mathfrak{g}(\xi, \ldots)$ be any $\mathfrak{A}$-functions, and N a finite subset of $\mathfrak{A}$. If $\mathfrak{f}(\xi, \ldots) = \mathfrak{g}(\xi, \ldots)\,(N)$ — i.e., $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ for all $\xi, \ldots \in N$, then $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\xi}, \ldots) = \mathfrak{g}(\boldsymbol{\xi}, \ldots) \in (\boldsymbol{N})$.

From the definition we easily have the following two lemmas.

Lemma 16.1. *$N_1 \subseteq N_2$ implies $\boldsymbol{N}_1 \subseteq \boldsymbol{N}_2$.*

Proof. $N_1 \subseteq N_2 \to N_1 \cap N_2 = N_1 \to \boldsymbol{N}_1 \cap \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{N}_1 \to \boldsymbol{N}_1 \subseteq \boldsymbol{N}_2$.

Lemma 16.2. *There exists at least one image set $\boldsymbol{N}$ which contains a preassigned finite set $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ of elements of $\mathfrak{A}$.*

Proof. By (2°) above, for each $i = 1, 2, \ldots, m$ there exists a finite set N_i such that

$$\boldsymbol{\alpha}_i \in \boldsymbol{N}_i = \tau(N_i)\,.$$

Let N be their union,

$$N = \bigcup_{i=1}^{i=m} N_i\,.$$

Then $N_i \subseteq N$, and with $\boldsymbol{N}$ taken as $\tau(N)$, and using Lemma 16.1, the desired conclusion follows: $\boldsymbol{\alpha}_i \in \boldsymbol{N}_i \subseteq \boldsymbol{N}$.

Def. 16.3. If $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots$ is a subset of $\mathfrak{A}$, and if a finite subset N of $\mathfrak{A}$ is such that

$$\tau(N) = \boldsymbol{N}\,, \quad \text{and all} \quad \boldsymbol{\alpha}_i \in \boldsymbol{N}\,,$$

we say N is a "range bound" — or simply a "bound" — of $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots$.

By the foregoing Lemma, every finite subset $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ of $\mathfrak{A}$ possesses at least one bound.

Theorem 16.3. *If $\mathfrak{A} < \boldsymbol{\mathfrak{A}}$ and if the identities of $\mathfrak{A}$ subextend to $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, then they extend to $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$.*

Proof. Suppose the conclusion false. Then there exists some $\mathfrak{A}$-identity $\mathfrak{f}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \mathfrak{g}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ which does not extend to $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$. Hence for suitable $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \boldsymbol{\mathfrak{A}}$

$$\mathfrak{f}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k) \neq \mathfrak{g}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k)\,. \tag{16.1}$$

By Lemma 16.2 there exists a range bound N of the set $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k\}$,

$$\tau(N) = (\boldsymbol{N})\,, \quad \boldsymbol{\alpha}_i \in \boldsymbol{N} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)\,.$$

Since $\mathfrak{f}(\xi, \ldots) = \mathfrak{g}(\xi, \ldots)$ is an $\mathfrak{A}$-identity it is *a-fortiori* an N-identity, and hence by (3°) of Def. 16.2, $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\xi}, \ldots) = \mathfrak{g}(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ is an $\boldsymbol{N}$-identity. This contradicts (16.1), and the theorem follows.

For the finite case we also have the converse,

Theorem 16.4. *If $\mathfrak{A}$ is a finite algebra, if $\mathfrak{A} < \boldsymbol{\mathfrak{A}}$, and if the identities of $\mathfrak{A}$ extend to $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, then they subextend to $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$.*

Proof. Here $\mathfrak{A} = (A, \sigma, \ldots)$ and A is a finite set. Let τ be defined by:

$$\tau(N) = N \quad \text{for} \quad N \subset A\,(N \neq A)$$

$$\tau(A) = \boldsymbol{A}\,.$$

It is seen that (1°)—(3°) of Def. 16.2 are satisfied, and the theorem follows.

We thus have

Theorem 16.5. *For a finite algebra $\mathfrak{A}$, the concepts "extension" and "subextension" of the identities of $\mathfrak{A}$ are equivalent.*

While half of this theorem was seen to hold also for infinite algebras (Theorem 16.3), the other half is generally false: an extension of identities does not in general insure a subextension. Thus with $\mathfrak{C} = (C, \times, +, -)$ as the ring of integers and $\mathbf{\mathfrak{C}}$ as the field of rationals, $\mathfrak{C} < \mathbf{\mathfrak{C}}$ and it is further readily seen that the identities of $\mathfrak{C}$ extend to $\mathbf{\mathfrak{C}}$. However they do not subextend. For if $N \to \tau(N)$ were a mapping satisfying (1°) and (2°) of Def. 16.2, choose $\mathbf{N}$ so that $\frac{1}{2}$ and 1 are $\in \mathbf{N}$ (Lemma 16.2), and let $N = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ where $\tau(N) = \mathbf{N}$. Then

$$(\xi - \alpha_1)(\xi - \alpha_2) \ldots (\xi - \alpha_n) = (\eta - \alpha_1)(\eta - \alpha_2) \ldots (\eta - \alpha_n)$$

is an N-identity, which obviously does not extend to $\mathbf{N}$.

A parallel argument — taking $\sqrt{-1}$ in place of $\frac{1}{2}$ — shows that $\mathcal{G} = (G, \times, +, -)$, the Gauss field, is an extension — but not a subextension — of the field $\mathbf{\mathfrak{C}}$ of rationals. Since $\mathbf{\mathfrak{C}}$ is functionally complete in the small (Theorem 14.1) and since $\mathcal{G}$ is patently not isomorphic with a subdirect power of $\mathbf{\mathfrak{C}}$, a reference to Theorem A (§ 1) points up a sharp contrast between the finite and the infinite kernel. In Theorem 19.1, to follow, we shall be able to reestablish a (generalized) Theorem A, for a kernel functionally complete in the small, after strengthening the hypothesis of Theorem A from a (mere) extension to a subextension of the identities of the kernel. Further results, for a kernel primal in the small, are given in § 20.

17. Sub-extension of functions

We shall presently define the "subextension" of a function so that it will satisfy the

Lemma 17.1. *Let $\mathfrak{A}$ be a subalgebra of $\mathbf{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} < \mathbf{\mathfrak{A}}$, and where the identities of $\mathfrak{A}$ subextend to $\mathbf{\mathfrak{A}}$. Then each A-function $f(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ which is $\mathfrak{A}$-expressible in the small subextends to an* **A***-function $f(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k)$ which is $\mathbf{\mathfrak{A}}$-expressible in the small* (Def. 5.6), *and which agrees with the original $f(\xi, \ldots)$ for $\boldsymbol{\xi}, \ldots \in \mathfrak{A}$.*

Proof. With $f(\xi, \ldots)$ as hypothecated, let

$$\{\mathfrak{f}^{(N)}(\xi_1, \ldots, \xi_k)\} \tag{17.1}$$

be a class of $\mathfrak{A}$-functions, one for each finite subset N of $\mathfrak{A}$, and chosen so that $\mathfrak{f}^{(N)}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ represents $f(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ within N. Let

$$\{\mathfrak{f}^{(N)}(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k)\} \tag{17.2}$$

be the corresponding set of $\mathfrak{A}$-functions in $\mathbf{A}$, in which the $\mathfrak{A}$-indeterminates ξ_i are replaced by $\mathbf{\mathfrak{A}}$-indeterminates $\boldsymbol{\xi}_i$. If $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k$ are $\in \mathbf{\mathfrak{A}}$, the subextension $f(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k)$ is defined so

$$f(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k) = \text{def} = \mathfrak{f}^{(N_1)}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k) \tag{17.3}$$

where N_1 is any range bound of the set $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k$ (Def. 16.3). To show that $f(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k)$ is thus well defined we must show that, if N_2 is any other range bound for the same $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k$, then

$$\text{(17.4)} \qquad \mathfrak{f}^{(N_1)}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k) = \mathfrak{f}^{(N_2)}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k)\,.$$

Consider the $N_1 \cap N_2$ identity,

$$\mathfrak{f}^{(N_1)}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \mathfrak{f}^{(N_2)}(\xi_1, \ldots, \xi_k),\ (\xi_1, \xi_2, \ldots \in N_1 \cap N_2)\,.$$

From this, by Def. 16.2, follows

$$\text{(17.5)} \qquad \mathfrak{f}^{(N_1)}(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots) = \mathfrak{f}^{(N_2)}(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots)\,, \quad (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots \in \tau(N_1 \cap N_2), = \boldsymbol{N}_1 \cap \boldsymbol{N}_2)\,.$$

Since $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots \in \boldsymbol{N}_1 \cap \boldsymbol{N}_2$, (17.4) follows from (17.5).

Finally, to show that the subextended function $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ agrees with the original $f(\xi, \ldots)$ when $\boldsymbol{\xi}, \ldots \in \mathfrak{A}$, suppose $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ are all $\in \mathfrak{A}$, and let N_0 be a range bound for the (finite) set $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (Lemma 16.2). If the set $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ is not a subset of N_0, let N_1 be the union

$$N_1 = N_0 \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}\,.$$

Since $N_0 \subseteq N_1$ we have $\boldsymbol{N}_0 \subseteq \boldsymbol{N}_1$ (Lemma 16.1), and hence: N_1 is a range bound of $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ and $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \boldsymbol{N}_1$. Computing $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ in terms of the subextended $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ — by (17.3) — we have

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \mathfrak{f}^{(N_1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\,.$$

But the right side is precisely the value of $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ as computed from the original $f(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. This completes the proof of Lemma 17.1.

18. General-$\mathfrak{A}$-functions and identities

Def. 18. In an algebra $\mathfrak{A} = (A, \circ, \ldots)$, an A-function $q(\xi, \ldots)$ which is $\mathfrak{A}$-representable in the small is now also called a "general(ized)-$\mathfrak{A}$-function". A "general(ized)-$\mathfrak{A}$-identity"

$$q_1(\xi, \ldots) = q_2(\xi, \ldots)\ (\mathfrak{A})$$

is an identity in the algebra $\mathfrak{A}$, in which both members q_1 and q_2 are general-$\mathfrak{A}$-functions.

Naturally each $\mathfrak{A}$-function is also a general-$\mathfrak{A}$-function, though not (in general) conversely.

Theorem 18. *Let $\mathfrak{A}$ be a subalgebra of $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} < \boldsymbol{\mathfrak{A}}$, and let the identities of $\mathfrak{A}$ subextend to $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ (§ 16). Then each general-$\mathfrak{A}$-identity $q_1(\xi, \ldots) = q_2(\xi, \ldots)$ extends to an identity in $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, $q_1(\boldsymbol{\xi}, \ldots) = q_2(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$, where the two sides of the latter are the subextensions to $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ of $q_1(\xi, \ldots), q_2(\xi, \ldots)$.*

Proof. If the conclusion were false then for some $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\mathfrak{A}}$,

$$\text{(18.1)} \qquad q_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}) \neq q_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\gamma})\,.$$

Let N be a range bound for $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\gamma}\}$ and let $\mathfrak{q}_1^{(N)}(\xi, \ldots), \mathfrak{q}_2^{(N)}(\xi, \ldots)$ be $\mathfrak{A}$-functions which represent $q_1(\xi, \ldots), q_2(\xi, \ldots)$ within N. Then, since $q_1(\xi, \ldots) = q_2(\xi, \ldots)$ is a general-$\mathfrak{A}$-identity, we have

$$\mathfrak{q}_1^{(N)}(\xi, \ldots) = \mathfrak{q}_2^{(N)}(\xi, \ldots),\ (\xi, \ldots \in N)$$

Further, since the identities subextend,

$$q_1^{(N)}(\xi, \ldots) = q_2^{(N)}(\xi, \ldots), (\xi, \ldots \in N).$$

But from § 17, for the subextended functions we have

$$q_1(\xi, \ldots) = q_1^{(N)}(\xi, \ldots) \quad (\xi, \ldots \in N).$$
$$q_2(\xi, \ldots) = q_2^{(N)}(\xi, \ldots)$$

In particular we have $q_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots) = q_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots)$, in contradiction with (18.1), and the theorem is proved.

19. Fundamental structure theorem for functionally complete in the small algebras. The core of $\mathfrak{W}$

To the concept "bounded, normal subdirect power" of an algebra applicable when $\mathfrak{A}$ is framal/sm (§ 6), we add two more general notions, applicable to any $\mathfrak{A}$ whatever.

Def. 19.1. Let $\mathfrak{A}$ be an algebra. An algebra $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ is called a "bounded, scalar subdirect power" of $\mathfrak{A}$, if $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ is a subalgebra of some direct power $\mathfrak{A}^{(\mathfrak{N})}$ of $\mathfrak{A}$ in which each $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\mathfrak{A}}$ is bounded (§ 11) and where, for each $\alpha \in \mathfrak{A}$, the corresponding "scalar" $(\ldots, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \ldots)$ of $\mathfrak{A}^{(\mathfrak{N})}$ is $\in \boldsymbol{\mathfrak{A}}$.

Still more general is the concept: "$\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ is a bounded subalgebra of a direct power of $\mathfrak{A}$", where "bounded" means that each $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\mathfrak{A}}$ is bounded.

The proof of the following theorem is immediate, and in any event is essentially the same as that given in [1] for finite $\mathfrak{W}$.

Theorem 19.0. *If $\mathfrak{W}$ is functionally complete in the small, then the following two classes of algebras are coextensive, up to isomorphisms:*

(I) *The class of all bounded, normal subdirect powers of $\mathfrak{W}$.*

(II) *The class of all bounded scalar subdirect powers of $\mathfrak{W}$. If, further, $\mathfrak{W}$ is primal/sm (= functionally strictly complete in the small), then each of the above is coextensive with*

(III) *The class of all bounded subalgebras of direct powers of $\mathfrak{W}$.*

We may now formulate the basic

Theorem 19.1. *(Fundamental Structure Theorem). Let $\mathfrak{W}$ and $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ be algebras, neither isomorphic with the one-element algebra, and where* (i) *$\mathfrak{W}$ is f.c./sm. Then $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ is isomorphic with a bounded, scalar subdirect power of $\mathfrak{W}$ if and only if* (1°) *$\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ contains a subalgebra isomorphic with (and here again denoted by) $\mathfrak{W}$, and where* (2°) *the identities of $\mathfrak{W}$ subextend to $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$.*

Proof. Necessity. The necessity half of the theorem is at once obvious. Thus, if $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ is a bounded scalar subdirect power of $\mathfrak{W}$, the totality of scalar elements of $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ (Def. 19.1) constitutes a subalgebra isomorphic with $\mathfrak{W}$, and the identities of $\mathfrak{W}$ are easily seen to subextend to $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ via the mapping

$$N \to \tau(N) = (N)$$

where N is taken as the totality of elements of $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ whose direct range (§ 11) is $\subseteq N$.

Sufficiency. The sufficiency part of the theorem requires considerable preparation. Here we assume $\mathfrak{W}$ and $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ to satisfy (i), (1°) and (2°) above, and we shall show that $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ is isomorphic with a bounded scalar subdirect power of $\mathfrak{W}$.

Lemma 19.2. *With* $\mathfrak{W}$ *and* $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ *satisfying* (i), (1°) *and* (2°) *of Theorem* 19.1, *let* $(W, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ *be any frame in the class* W. *Then* (*a*) *this is a* $\mathfrak{W}$/*sm frame, and* (b) *the subextension of the operations* $\times, {}^\wedge, {}^\vee$ *to* $\boldsymbol{W}$ *yields a* $\mathfrak{W}$/*sm frame in* $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$, $(\boldsymbol{W}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$.

Proof. (*a*) is a consequence of the $\mathfrak{W}$/sm completeness of $\mathfrak{W}$. As for (b), since $\times, {}^\wedge, {}^\vee$ are now general-$\mathfrak{W}$-functions and since

$$0\times\xi=\xi\times 0=0\,,\quad 1\times\xi=\xi\times 1=\xi\,,\quad \xi^{\wedge\vee}=\xi$$

are general $\mathfrak{W}$-identities, by Theorem 18,

$$0\times\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}\times 0=0\,,\quad 1\times\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}\times 1=\boldsymbol{\xi}\,,\quad \boldsymbol{\xi}^{\wedge\vee}=\boldsymbol{\xi}\,,\quad (\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{\mathfrak{W}})\,. \tag{19.1}$$

The last of these says that $\boldsymbol{\xi}^\wedge$ is a permutation of $\boldsymbol{W}$, with $\boldsymbol{\xi}^\vee$ as inverse, which, with the rest of (19.1), completes the lemma.

We seek now to identify a "Boolean core" within $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$. Let μ be $\in\mathfrak{W}$ and let $\delta_\mu(\xi)$ be the characteristic W-function

$$\delta_\mu(\xi)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad \xi=\mu\\ 0 & \text{if}\quad \xi\neq\mu\end{cases}\quad (\xi\in W)\,,$$

where 0, 1 are the null and identity of the (arbitrary but fixed) frame $(W, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ — Lemma 19.2. Since $\mathfrak{W}$ is f.c./sm, each function $\delta_\mu(\xi)$ is a general-$\mathfrak{W}$-function, and therefore $\delta_\mu(\boldsymbol{\xi})$, the subextension of $\delta_\mu(\xi)$ to $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$, is uniquely defined (§ 17):

$$\delta_\mu(\boldsymbol{\xi})\in\boldsymbol{\mathfrak{W}}\quad\text{for}\quad \boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{\mathfrak{W}}\,.$$

We now have the

Def. 19.2. By the "core" of $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ we mean the totality J of those elements, a, of $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ such that

$$a\in J \text{ if and only if } a=\delta_\mu(\boldsymbol{\alpha}) \text{ for some } \mu\in\mathfrak{W} \text{ and some } \boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{\mathfrak{W}}\,.$$

Lemma 19.3. *Let* σ *be a fixed* $\in\mathfrak{W}$. *Then the core* J *of* $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ *is identical with the range* J_σ *of the function* $\delta_\sigma(\boldsymbol{\xi})$ *as* $\boldsymbol{\xi}$ *runs over* $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$:

$$J=J_\sigma\quad (\sigma=\textit{fixed}\in\mathfrak{W})\,.$$

Proof. We must show, for any two $\sigma, \nu\in W$, that $J_\sigma=J_\nu$. Let $p(\xi)$ be the W-function:

$$p(\xi)=\begin{cases}\nu & \text{if}\quad \xi=\sigma\\ \sigma & \text{if}\quad \xi=\nu\\ \xi & \text{if}\quad \xi\neq\sigma,\neq\nu\end{cases}\quad (\xi\in W)\,.$$

Since $\mathfrak{W}$ is f.c./sm, $p(\xi)$ is a general-$\mathfrak{W}$-function. We observe the general-$\mathfrak{W}$-identity,

$$\delta_\sigma(\xi)=\delta_\nu(p(\xi))\quad (\xi\in\mathfrak{W})$$

whence, by Theorem 18

$$\delta_\sigma(\boldsymbol{\xi})=\delta_\nu(p(\boldsymbol{\xi}))\quad (\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{\mathfrak{W}})\,.$$

From this follows $$a \in J_\sigma, a = \delta_\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \delta_\nu(p(\boldsymbol{\alpha})) = \in J_\nu ,$$
whence
$$J_\sigma \subseteq J_\nu .$$
The argument is symmetric on σ, ν and hence
$$J_\sigma = J_\nu$$
from which the lemma follows.

Lemma 19.4. *If* $\mathfrak{W}$, $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ *and the frames* $(W, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ *and* $(\mathbf{W}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ *are as in Lemma* 19.2, *and if J is the core of* $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$, *then* $(J, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ *is a subalgebra of* $(\mathbf{W}, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ *and is a Boolean algebra with*
$$a^\wedge = a^\vee = a^* = \textit{Boolean complement} \quad (a, b \in J) .$$
$$a \times b = \textit{Boolean product}$$

Proof. (1°): 0 and 1 are $\in J$. This follows since $\delta_0(1) = 0$, $\delta_0(0) = 1$. Hereafter we usually abbreviate
$$\delta_0(\xi) = \delta(\xi)$$

(2°) Closure. We must show that if $a, b \in J$, so also are $a \times b$, $a^\wedge$, $a^\vee$. By Lemma 19.3 we have
$$a = \delta(\boldsymbol{\alpha}) , \quad b = \delta(\boldsymbol{\beta})$$
for suitable $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\mathfrak{W}}$. The general-$\mathfrak{W}$-identity
$$(\delta(\xi))^\wedge = (\delta(\xi))^\vee = \delta(\delta(\xi)) \qquad (\xi \in \mathfrak{W})$$
then extends, via Theorem 18, to the identity
$$(\delta(\boldsymbol{\xi}))^\wedge = (\delta(\boldsymbol{\xi}))^\vee = \delta(\delta(\boldsymbol{\xi})) \qquad (\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\mathfrak{W}}) .$$
In particular

(19.1) $$a^\wedge = a^\vee = \delta(a) = \in J .$$

Similarly the general $\mathfrak{W}$-identity
$$\delta(\xi) \times \delta(\eta) = \delta(\{\delta(\xi)\,\delta(\eta)\}^\wedge) , \quad (\xi, \eta \in \mathfrak{W})$$
extends via Theorem 18 to the identity

(19.2) $$\delta(\boldsymbol{\xi}) \times \delta(\boldsymbol{\eta}) = \delta(\{\delta(\boldsymbol{\xi})\,\delta(\boldsymbol{\eta})\}^\wedge) , \quad (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\mathfrak{W}})$$

Thus

(19.3) $$a \times b = \delta((a \times b)^\wedge) = \in J ,$$

and closure is established.

(3°) In a similar manner the following general-$\mathfrak{W}$-identities, when extended to $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ via Theorem 18, yield identities in $\boldsymbol{\mathfrak{W}}$ — and in particular identities in J — and these are known to be definitive for the concept Boolean algebra:
$$\delta(\xi)\,\delta(\xi) = \delta(\xi)$$
$$\delta(\xi)\,\delta(\eta) = \delta(\eta)\,\delta(\xi)$$
$$\delta(\xi)\,(\delta(\eta)\,\delta(\zeta)) = (\delta(\xi)\,\delta(\eta))\,\delta(\zeta)$$
$$\delta^{\wedge\wedge}(\xi) = \delta(\xi)$$
$$\delta(\xi) \times_\wedge \delta(\eta) = \delta(\eta) \times_\wedge \delta(\xi) \quad (\text{where } \xi \times_\wedge \eta = (\xi^\wedge \times \eta^\wedge)^\vee)$$
$$(\delta(\xi) \times_\wedge \delta(\eta)) \times_\wedge \delta(\zeta) = \delta(\xi) \times_\wedge (\delta(\eta) \times_\wedge \delta(\zeta))$$
$$\delta(\xi)\,(\delta(\eta) \times_\wedge \delta(\zeta)) = \delta(\xi)\,\delta(\eta) \times_\wedge \delta(\xi)\,\delta(\zeta) .$$

The extension to $\mathfrak{W}$ of the first gives

$$\delta(\boldsymbol{\xi})\,\delta(\boldsymbol{\xi}) = \delta(\boldsymbol{\xi})\,, \quad \text{equiv. } a^2 = a\ (a \in J)\,.$$

Again, the extension of the last is equivalent to

$$a(b \times_\wedge c) = ab \times_\wedge ac \qquad (a, b, c \in J)\,,$$

and similarly for the others. This completes the lemma.

We refer to the Boolean algebra $(J, \times, {}^\wedge, {}^\vee; 0, 1)$ as the "core" of $\mathfrak{W}$.

Lemma 19.5. *Let* $\boldsymbol{\alpha}$ *be a fixed* $\in \mathfrak{W}$, *and let* N *be a range bound for* $\boldsymbol{\alpha}$. *Then for all* $\mu \in \mathfrak{W}$, $\mu \notin N$,

$$\delta_\mu(\boldsymbol{\alpha}) = 0\,.$$

Proof. Let N' be a finite subset of $\mathfrak{W}$ such that

$$N \subset N', \quad \mu \in N', \quad (\mu \notin N)\,.$$

Let $\delta_\mu^{(N')}(\xi)$ be a $\mathfrak{W}$-function which represents $\delta_\mu(\xi)$ within N',

$$\delta_\mu(\xi) = \delta_\mu^{(N')}(\xi)\,, \quad (\xi \in N')\,.$$

Consider the N-identity

$$\delta_\mu^{(N')}(\xi) = 0 \quad (\xi \in N)\,.$$

Since by hypothesis the identities subextend to $\mathfrak{W}$, we have

$$\delta_\mu^{(N')}(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{N})\,.$$

Therefore, in particular

$$\delta_\mu^{(N')}(\boldsymbol{\alpha}) = 0\,.$$

But by § 17 — since $N'\ (\supset N)$ is again a range bound of $\boldsymbol{\alpha}$ —

$$\delta_\mu(\boldsymbol{\alpha}) = \delta_\mu^{(N')}(\boldsymbol{\alpha}) = 0\,.$$

This proves the lemma.

We thus have the

Corollary 19.6. *If* $\boldsymbol{\alpha}$ *is a given* $\in \mathfrak{W}$, $\delta_\mu(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ *for all except a finite number of* $\mu \in \mathfrak{W}$.

Lemma 19.7. *With* $\mathfrak{W}$ *and* $\mathfrak{W}$ *as in Lemma* 19.4, *and with* $J =$ *core of* $\mathfrak{W}$, *the following general-identities hold*:

$$\boldsymbol{\xi}\,\delta(\boldsymbol{\eta}) = \delta(\boldsymbol{\eta})\,\boldsymbol{\xi} \quad \textit{equiv}: \quad \boldsymbol{\xi} a = a\boldsymbol{\xi} \quad (a \in J, \boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{W})$$

$$\boldsymbol{\xi}\{\delta(\boldsymbol{\eta})\,\delta(\boldsymbol{\zeta})\} = \{\boldsymbol{\xi}\,\delta(\boldsymbol{\eta})\}\,\delta(\boldsymbol{\zeta}) \quad \textit{equiv}: \quad \boldsymbol{\xi}(ab) = (\boldsymbol{\xi} a)b,\ (a, b \in J;\ \boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{W})$$

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta}\,\delta(\boldsymbol{\zeta})) = (\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta})\,\delta(\boldsymbol{\zeta}) \quad \textit{equiv}: \quad \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta} a) = (\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta})a,\ (a \in J;\ \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{W})$$

$$\delta_\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\delta_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \delta_\alpha(\boldsymbol{\xi})$$

$$\delta_\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\delta_\beta(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$\alpha\,\delta_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \times_\wedge \beta\,\delta_\beta(\boldsymbol{\xi}) = \beta\,\delta_\beta(\boldsymbol{\xi}) \times_\wedge \alpha\,\delta_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \quad (\alpha, \beta \in \mathfrak{W}, \alpha \neq \beta;\ \boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{W})\,.$$

$$\alpha\,\delta_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \times_\wedge (\beta\,\delta_\beta(\boldsymbol{\xi}) \times_\wedge \gamma\,\delta_\gamma(\boldsymbol{\xi})) = (\alpha\,\delta_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \times_\wedge \beta\,\delta_\beta(\boldsymbol{\xi})) \times_\wedge \gamma\,\delta_\gamma(\boldsymbol{\xi})$$
$$(\alpha, \beta, \gamma \ \textit{distinct} \ \in \mathfrak{W};\ \boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{W})\,.$$

Proof. Each of these is obtained by the extension to $\mathfrak{W}$, via Theorem 18, of the corresponding easily verified general $\mathfrak{W}$-identity.

A similar extension of the corresponding general-$\mathfrak{W}$-identities establishes the following lemma. In the general-identities below we particularly note — by appealing to Corollary 19.6 — that the (in general) infinite $\times_{\wedge}$ sums, $\overset{\times}{\hat{\sum}}_{\mu\in\mathfrak{W}}$, are actually "finite" in that they all involve merely a finite number of non-zero terms.

Lemma 19.8. *With $\mathfrak{W}$, $\mathbf{\mathfrak{W}}$ as in Lemma 19.7, and for any primitive operations $\sigma(\xi, \eta, \ldots, \zeta)$ of the algebra $\mathfrak{W}$, the following general-identities hold: for $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{\mathfrak{W}}$*

$$\boldsymbol{\xi} = \overset{\times}{\hat{\sum_{\mu\in\mathfrak{W}}}} \mu\, \delta_\mu(\boldsymbol{\xi})$$

$$\delta_\mu(\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\zeta})) = \overset{\times}{\hat{\sum_{\sigma(\alpha,\beta,\ldots,\gamma)=\mu}}} \delta_\alpha(\boldsymbol{\xi})\, \delta_\beta(\boldsymbol{\eta}) \ldots \delta_\gamma(\boldsymbol{\zeta})\,, \qquad (\mu \in \mathfrak{W})$$

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\zeta}) = \overset{\times}{\hat{\sum_{\alpha,\beta,\ldots,\gamma\in\mathfrak{W}}}} \sigma(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)\, \delta_\alpha(\boldsymbol{\xi})\, \delta_\beta(\boldsymbol{\eta}) \ldots \delta_\gamma(\boldsymbol{\zeta})$$

As in [1] for finite kernel, we now conceive the algebra $\mathfrak{W}$ and the Boolean core J of $\mathbf{\mathfrak{W}}$ abstractly, and synthesize the algebra $\mathfrak{W}_{[J]}$, the bounded J-extension of $\mathfrak{W}$. The elements of $\mathfrak{W}_{[J]}$ are the bounded J-partition vectors

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots] \qquad (\mu \in \mathfrak{W})$$
$$\left(a_\mu \in J;\, a_\mu a_\nu = 0\ (\mu \neq \nu);\, \overset{\times}{\hat{\sum_{\mu\in\mathfrak{W}}}} a_\mu = 1\right).$$

Only small ammendations of the corresponding proof for finite kernel ([1], Lemma 10, pp. 333—335) — and these involve replacing the identities employed in [1] by the corresponding general-identities established in the foregoing lemmas — then yield the following basic isomorphism:

Theorem 19.9. *Let $\mathfrak{W}$ be a subalgebra of $\mathbf{\mathfrak{W}}$, $\mathfrak{W} < \mathbf{\mathfrak{W}}$, let the identities of $\mathfrak{W}$ subextend to $\mathbf{\mathfrak{W}}$ and let $\mathfrak{W}$ be functionally complete in the small. Then if J is the core of $\mathbf{\mathfrak{W}}$, and $\mathfrak{W}_{[J]}$ the bounded J-extension of $\mathfrak{W}$, the two are isomorphic,*

$$\mathbf{\mathfrak{W}} \cong \mathfrak{W}_{[J]}\,. \tag{19.4}$$

By Theorem 11.1, the right side of (19.4), and hence also the left, is isomorphic with a normal subdirect power of $\mathfrak{W}$. A further reference to Theorem 19.0 then completes the proof of the sufficiency part of the fundamental structure, Theorem 19.1, and with it the entire theorem.

In partial summary, (with (B) below taken over from the finite kernel case of [1], we have

Theorem 19.10. *Let $\mathfrak{W}$ be functionally complete in the small, and distinct from the one-element algebra. Then the following classes of algebras* (A_1)—(A_2) *are coextensive up to isomorphisms*:

(A_1) *The class of all algebras $\mathbf{\mathfrak{W}}$ such that*

(a) *$\mathfrak{W}$ is a subalgebra of $\mathbf{\mathfrak{W}}$ and where*

(b) *the identities of $\mathfrak{W}$ subextend to $\mathbf{\mathfrak{W}}$.*

(A_2) *The class of all bounded normal subdirect powers of $\mathfrak{W}$.*

(A_3) *The class of all bounded scalar subdirect powers of* $\mathfrak{W}$.

(B) *In addition, if* $\mathbf{\mathfrak{W}}$ *is a finite algebra, it is isomorphic with a direct power of* $\mathfrak{W}$.

20. Primal/small algebras

If $\mathfrak{A}$ and $\mathbf{\mathfrak{A}}$ are algebras of the same species, S, all definitions and results of §§ 16—18 are easily seen to hold without the assumption that $\mathfrak{A}$ is a subalgebra of $\mathbf{\mathfrak{A}}$, provided we confine ourselves exclusively to strict $\mathfrak{A}$-functions, or what is the same, to S-expressions $\Phi(\xi, \ldots)$, (§ 2). For instance, corresponding to Def. 16.2 we have

Def. 20.1. If $\mathfrak{A}$, $\mathbf{\mathfrak{A}}$ are any algebras of the same species, S, the strict identities of $\mathfrak{A}$ are said to "subextend" to $\mathbf{\mathfrak{A}}$ if there exists a mapping,

$$\tau : N \to \tau(N) = \mathbf{N}$$

from the finite subsets N of $\mathfrak{A}$ into (not necessarily finite) subsets $\mathbf{N}$ of $\mathbf{\mathfrak{A}}$, where

(1) $\tau(N_1 \cap N_2) = \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2$.

(2) The image sets $\mathbf{N}$ cover $\mathbf{\mathfrak{A}}$.

(3) Let $\Phi(\xi, \ldots)$, $\Psi(\xi, \ldots)$ be any strict $\mathfrak{A}$-functions, and N a finite subset of $\mathfrak{A}$. If

$$\Phi(\xi, \ldots) = \Psi(\xi, \ldots)\,(N)$$

— i.e., $\Phi = \Psi$ for all $\xi, \ldots \in N$ — then also

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}, \ldots) = \Psi(\boldsymbol{\xi}, \ldots)\,(\mathbf{N}),$$

Similarly, corresponding to Def. 18, we have

Def. 20.2. In an algebra $\mathfrak{A} = (A, \sigma, \ldots)$, an A-function $f(\xi, \ldots)$ which is representable in the small by a strict $\mathfrak{A}$-function is called a "general-strict-$\mathfrak{A}$-function".

In like manner we shall make use of the "strict versions" of other results of §§ 16—18, where the assumption $\mathfrak{A} < \mathbf{\mathfrak{A}}$ is dropped, but where all $\mathfrak{A}$-functions, or general-$\mathfrak{A}$-functions considered are taken to be *strict*.

With this in mind, for a kernel $\mathfrak{P}$ which is primal in the small (§ 13), the fundamental structure is given by

Theorem 20.1. *Fundamental structure theorem for primal/sm algebras. Let* $\mathfrak{P}$ *and* $\mathbf{\mathfrak{P}}$ *be algebras of the same species, where neither is merely the one-element algebra and where* $\mathfrak{P}$ *is primal in the small. Then a necessary and sufficient condition for* $\mathbf{\mathfrak{P}}$ *to be isomorphic with a bounded subalgebra of a direct power of* $\mathfrak{P}$ *— or equivalently, with a bounded scalar subdirect power of* $\mathfrak{P}$ *— is that the strict identities of* $\mathfrak{P}$ *subextend to* $\mathbf{\mathfrak{P}}$.

Proof. The necessity is immediate — compare with the necessity part of Theorem 19.1.

Sufficiency. Since $\mathfrak{P}$ is primal/sm, any P-function $f(\xi, \ldots, \zeta)$ is representable in the small by strict $\mathfrak{P}$-functions, i.e., any $f(\xi, \ldots)$ is a general-strict-$\mathfrak{P}$-function, and therefore has a uniquely defined subextension to $\mathbf{\mathfrak{P}}$, (§ 17). In par-

ticular for $\alpha \in \mathfrak{P}$ and the constant function $f_\alpha(\xi) = \alpha$, $(\xi \in P)$, from the general-strict-$\mathfrak{P}$-identity $f_\alpha(\xi) = f_\alpha(\eta)$, $(\xi, \eta \in \mathfrak{P})$, follows the extended identity (Theorem 18)

$$f_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = f_\alpha(\boldsymbol{\eta}), \quad (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}).$$

Thus $f_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ is a constant function in $\boldsymbol{\mathfrak{P}}$, — denote its constant value by $\boldsymbol{\alpha}$,

$$f_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\alpha} \quad (\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}).$$

As α runs through P, under the mapping

$$\alpha \to \boldsymbol{\alpha} \tag{20.1}$$

let P' denote the image set

$$P' = \{\boldsymbol{\alpha}, \ldots\}, \quad P' \subseteq \boldsymbol{P}.$$

Lemma 20.2. *$\mathfrak{P}' = (P', \sigma, \ldots)$ is a subalgebra of $\boldsymbol{\mathfrak{P}}$, and is moreover isomorphic with $\mathfrak{P}$ under the correspondence* (20.1).

Proof. Let σ be a primitive operation, and let $\sigma(\alpha, \beta, \ldots) = \gamma$. We may write this as a general-strict-$\mathfrak{P}$-identity

$$\sigma(f_\alpha(\xi), f_\beta(\xi), \ldots) = f_\gamma(\xi), \quad (\xi \in \mathfrak{P}).$$

Since by hypothesis the strict identities subextend to $\boldsymbol{\mathfrak{P}}$, by applying the strict version of Theorem 18, we have the extended identity in $\boldsymbol{\mathfrak{P}}$,

$$\sigma(f_\alpha(\boldsymbol{\xi}), f_\beta(\boldsymbol{\xi}), \ldots) = f_\gamma(\boldsymbol{\xi}), \quad (\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\mathfrak{P}}).$$

But this says that $\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots) = \boldsymbol{\gamma}$, and we have thus shown that $\mathfrak{P}' = (P', \sigma, \ldots)$ is a homomorphic image of $\mathfrak{P}$ under (20.1). Since $\mathfrak{P}$ is primal/sm it has no proper ideals (= congruence relations, Theorem 13.2). Hence either $\mathfrak{P}'$ is isomorphic with $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}' \cong \mathfrak{P}$ — in which case we are through — or else $\mathfrak{P}'$ is a one-element algebra. We shall show that the latter is impossible, from which the lemma will follow.

Choose two distinct elements of P, call them 0 and 1, and choose a fixed binary function $\xi \times \eta$ in P, such that

$$0 \times \xi = \xi \times 0 = 0, \quad 1 \times \xi = \xi \times 1 = \xi \quad (\xi \in P).$$

Since $\mathfrak{P}$ is primal/sm, $\times$ is trictly expressible/sm, and, writing $f_0(\eta)$, $f_1(\eta)$ for 0, 1, we have the general-strict-$\mathfrak{P}$-identities

$$\begin{aligned} f_0(\eta) \times \xi = \xi \times f_0(\eta) = f_0(\eta) \\ f_1(\eta) \times \xi = \xi \times f_1(\eta) = \xi \end{aligned} \qquad (\xi, \eta \in P).$$

Under the hypotheses of Theorem 20.1, these extend — by application of the strict version of Theorem 18 — to the identities in $\boldsymbol{\mathfrak{P}}$,

$$\begin{aligned} f_0(\boldsymbol{\eta}) \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \times f_0(\boldsymbol{\eta}) = f_0(\boldsymbol{\eta}) \\ f_1(\boldsymbol{\eta}) \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \times f_1(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \qquad (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{P}).$$

If now P' is assumed to consist of a single element, say σ', we have

$$\begin{aligned} \sigma' \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \times \sigma' = \sigma' \\ \sigma' \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \times \sigma' = \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \qquad (\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{P}).$$

From these follow

$$\xi = \sigma', \quad (\xi \in P)$$

which is absurd, since $\mathfrak{P}$ by assumption is not the one-element algebra. So $\mathfrak{P}' \cong \mathfrak{P}$, and the lemma is established.

Returning to the proof of Theorem 20.1, we now simply identify $\mathfrak{P}$ with the isomorphic subalgebra $\mathfrak{P}'$ of $\mathfrak{P}$, and the proof of Theorem 20.1 follows from Theorem 19.1 together with Theorem 19.0.

In partial summary (with (B) taken from [1]), we have

Theorem 20.3. *Let $\mathfrak{P}$ be an algebra which is primal in the small and which is distinct from the one-element algebra. Then the following classes* (A_1)—(A_4) *are coextensive, up to isomorphisms*:

(A_1) *The class of all algebras $\mathfrak{P}$ such that*

(a) *the strict identities of $\mathfrak{P}$ subextend to $\mathfrak{P}$, and where*

(b) *$\mathfrak{P}$ contains at least two elements.*

(A_2) *The class of all bounded normal subdirect powers of $\mathfrak{P}$.*

(A_3) *The class of all bounded scalar subdirect powers of $\mathfrak{P}$.*

(A_4) *The class of all bounded subalgebras of direct powers of $\mathfrak{P}$. In addition*

(B) *If $\mathfrak{P}$ is a finite algebra, it is isomorphic with a direct power of $\mathfrak{P}$.*

In a subsequent communication we hope to generalize the second structure theorem — for primal clusters [3] — to "in the small" form. In this projected extension a further — and simpler — version of the concept "subextension" of strict identities will be exhibited.

Bibliography

[1] FOSTER, A. L.: Generalized "Boolean" theory of universal algebras, Part I: Subdirect sums and normal representation theorem. Math. Z. **58**, 306—336 (1953).

[2] FOSTER, A. L.: Part II: Identities and subdirect sums of functionally complete algebras. Math. Z. **59**, 191—199 (1953).

[3] FOSTER, A. L.: The identities of — and unique factorization within — classes of universal algebras. Math. Z. **62**, 171—188 (1955).

[4] FOSTER, A. L.: The generalized Chinese Remainder Theorem for universal algebras; Subdirect factorization. Math. Z. **66**, 452—469 (1957).

[5] MCCOY, N. H., and DEANE MONTGOMERY: A representation of generalized Boolean rings. Duke Math. J. **3**, 455—459 (1937).

[6] O'KEEFE, E. S.: On the independence of primal algebras. Math. Z. **73**, 79—94 (1960).

[7] SIOSON, F.: Contributions to primal algebra theory and independence. Doctoral Dissertation, University of Calif. Berkeley (1960).

[8] STONE, M. H.: The theory of representations of Boolean algebras. Trans. Am. Math. Soc. **40**, 37—111 (1936).

[9] WADE, L. I.: Post algebras and rings. Duke Math. J. **12**, 389—395 (1945).

(Received September 12, 1960)

MAEDA, F.
Math. Annalen 143, 59—74 (1961)

A Characterization of Spectral Operators on Locally Convex Spaces

By

FUMIYUKI MAEDA in Yale (New Haven, Conn.)

Introduction

The theory of spectral operators on Banach spaces was initiated by N. DUNFORD and developed by himself and other mathematicians. (See [4] for a complete bibliography.) Various parts of the theory were extended to certain locally convex spaces by C. IONESCU TULCEA [8]. In this paper, we generalize the concept of weak T-measures introduced by E. BISHOP [1] and use this extension for the study of spectral operators on locally convex spaces E which are separated, quasi-complete and barreled.

In § 0, the necessary notations are introduced. Properties of E-valued measures are studied in § 1, as tools for the following arguments. In § 2, we define, following E. BISHOP [1], weak T-measures with values in E; and we obtain several results parallel to those in [1]. These results are used in § 3 for the proof of the main theorems of this paper, namely Theorems 3 and 4, (which were suggested by the reading of [1]), which give a characterization of spectral operators on E in terms of weak T-measures. The same type of characterization is given, toward the end of § 3, for scalar operators and spectral operators of finite type. As an application of the theorems in § 3, we prove a convergence theorem in § 4.

We shall use various properties of locally convex spaces and of measures (set functions), which may be found in [2], [5] and [7].

0. Notations

Throughout this paper, let E denote a separated, locally convex space over the complex field C and let E' be its strong dual. Let $\langle x, x'\rangle$ be the value of x' at x for $x \in E$ and $x' \in E'$; let $\sigma(E, E')$ be the weak topology in E and $\sigma(E', E)$ the weak *-topology in E'. If E, F are two spaces, then the set of all linear continuous mappings of E into F is denoted by $\mathscr{L}(E, F)$; T, S, U, P and N will be used to denote the elements of $\mathscr{L}(E, F)$. If $T \in \mathscr{L}(E, F)$, then ${}^tT$ is the adjoint operator of T.

Let Z be a given locally compact space (in most cases, $Z = C =$ the complex numbers). Then $B(Z)$ will denote the algebra of all complex valued Baire functions on Z, $B^\infty(Z)$ will represent that of bounded Baire functions and $\overline{B}^\infty(Z)$ will represent that of functions $f \in B(Z)$ such that $f\varphi_\sigma \in B^\infty(Z)$ for any

characteristic function φ_σ of a compact set σ; $S_0(Z)$ is the σ-field (tribe) of all Baire sets in Z, i.e., those sets σ for which $\varphi_\sigma \in B(Z)$; σ, δ will be used to denote the elements of $S_0(Z)$ or of $S_0(C)$. The set of all bounded complex valued Radon measures on Z will be denoted by $M^1(Z)$. If $\mu \in M^1(Z)$, then $\|\mu\|$ is its total variation.

§ 1. Vector Valued Measures

1°. A set function m defined on $S_0(Z)$ with values in the space E is called an E-valued measure, if it is countably additive, i.e., if for any $\sigma_i \in S_0(Z)$, $i = 1, 2, \ldots$, such that $\sigma_i \cap \sigma_j = \Phi$ $(i \neq j)$, $\sum_{i=1}^{\infty} m(\sigma_i)$ exists and

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(\sigma_i) .$$

For a set function m on $S_0(Z)$ with values in E and for any $x' \in E'$, let us write

$$\langle m, x'\rangle(\sigma) = \langle m(\sigma), x'\rangle, \sigma \in S_0(Z) .$$

We can show that m is countably additive if and only if $\langle m, x'\rangle$ is countably additive for every $x' \in E'$. (This is a generalized form of the theorem of ORLICZ-PETTIS ([5], p. 318 and [7], p. 62).) Therefore, m is an E-valued measure if and only if $\langle m, x'\rangle \in M^1(Z)$ for every $x' \in E'$. We define the support of an E-valued measure as usual, so that we have

$$\operatorname{Supp} m = \overline{\bigcup_{x' \in E'} \operatorname{Supp}\langle m, x'\rangle} .$$

Let $M^1(Z; E)$ be the set of all E-valued measures and let $M^0(Z; E)$ be that of all E-valued measures with compact support. We define the topology ϱ in $M^1(Z; E)$ as follows: $m_\alpha \to m$ in ϱ if and only if $\langle m_\alpha, x'\rangle \to \langle m, x'\rangle$ in $M^1(Z)$ for every $x' \in E'$.

For a set function m' on $S_0(Z)$ with values in E' and for any $x \in E$, we write

$$\langle x, m'\rangle(\sigma) = \langle x, m'(\sigma)\rangle, \sigma \in S_0(Z) .$$

Let $M^1_*(Z; E')$ be the set of all E'-valued set functions on $S_0(Z)$ such that $\langle x, m'\rangle \in M^1(Z)$ for all $x \in E$[1]. The support of $m' \in M^1_*(Z; E')$ is defined by

$$\operatorname{Supp} m' = \overline{\bigcup_{x \in E} \operatorname{Supp}\langle x, m'\rangle} .$$

The set of measures in $M^1_*(Z; E')$ with compact support is denoted by $M^0_*(Z; E')$. The topology ϱ_* in $M^1_*(Z; E')$ is defined in a way similar to ϱ, i.e., $m'_\alpha \to m'$ in ϱ_* if and only if $\langle x, m'_\alpha\rangle \to \langle x, m'\rangle$ in $M^1(Z)$ for every $x \in E$.

Proposition 1. (i) *If* $m \in M^1(Z; E)$, *then* $x' \to \langle m, x'\rangle$ *is a continuous mapping of* E' *into* $M^1(Z)$. (ii) *Suppose* E *is barreled*[2]. *If* $m' \in M^1_*(Z; E')$,

[1]) If E is semi-reflexive, then $M^1_*(Z; E') = M^1(Z; E')$. In general, an E'-valued set function which is countably additive for $\sigma(E', E)$ is not necessarily countably additive in the strong dual topology in E'.

[2]) We recall that E is *barreled* (tonnelé) if and only if every weakly bounded set in E' is equi-continuous.

then $x \to \langle x, m' \rangle$ *is a continuous mapping of* E *into* $M^1(Z)$.

Proof: (i) We know that

$$\|\langle m, x' \rangle\| \leq 4 \sup_{\sigma \in S_0(Z)} |\langle m(\sigma), x' \rangle| .$$

Since $\langle m, x' \rangle$ is a complex valued measure, $\{m(\sigma) \mid \sigma \in S_0(Z)\}$ is weakly, hence strongly bounded in E. Therefore, if $x' \to 0$, then $\sup_{\sigma \in S_0(Z)} |\langle m(\sigma), x' \rangle| \to 0$. Thus, (i) is proved. The statement (ii) may be proved in a similar way if we remark that when E is barreled, a set $B' \subsetneq E'$ is bounded for $\sigma(E', E)$ if and only if it is equi-continuous.

2°. Let $m \in M^1(Z; E)$ and $f \in B^\infty(Z)$, or $m \in M^0(Z; E)$ and $f \in \overline{B}^\infty(Z)$. For each x',

$$\int_Z f(z)\, d\langle m(z), x' \rangle = \int_Z f\, d\langle m, x' \rangle$$

is defined and $x' \to \int_Z f\, d\langle m, x' \rangle$ is a continuous mapping of E' into C by Proposition 1, (i). Therefore, we can find $m(f) \in E''$ such that

$$\int_Z f\, d\langle m, x' \rangle = \langle m(f), x' \rangle \quad \text{for all} \quad x' \in E' .$$

Sometimes, we write $m(f) = \int_Z f\, dm = \int f\, dm$.

If E is barreled, then similar arguments show the existence of $m'(f) \in E'$ such that

$$\int_Z f\, d\langle x, m' \rangle = \langle x, m'(f) \rangle$$

for $m' \in M^1_*(Z; E')$, $f \in B^\infty(Z)$ or $m' \in M^0_*(Z; E')$ and $f \in \overline{B}^\infty(Z)$.

Proposition 2. (i) *If* E *is quasi-complete, then* $m(f) \in E$ *for all* $m \in M^1(Z; E)$ *and* $f \in B^\infty(Z)$ *and* $f \to m(f)$ *is a linear continuous mapping*[3]) *of* $B^\infty(Z)$ *into* E *for any* $m \in M^1(Z; E)$. (ii) *If* E *is barreled, then* $f \to m'(f)$ *is a linear continuous mapping of* $B^\infty(Z)$ *into* E' *for any* $m' \in M^1_*(Z; E')$.

Proof: (i) Let $\mathscr{S}$ be the vector space of simple functions on Z. It is easy to see that (i) is valid if we replace $B^\infty(Z)$ by $\mathscr{S}$. Now, $\mathscr{S}$ is dense in $B^\infty(Z)$. Therefore, E being quasi-complete, $\varphi \to m(\varphi)$ of $\mathscr{S}$ into E has a unique continuous extension to $B^\infty(Z)$ (see [2]). This extension obviously coincides with $f \to m(f)$. (ii) It is again easy to see that $f \to m'(f)$ is a linear mapping of $B^\infty(Z)$ into E' and that its restriction on $\mathscr{S}$ is continuous. Since $\mathscr{S}$ is dense in $B^\infty(Z)$, $f \to m'(f)$ is a continuous mapping on $B^\infty(Z)$. q. e. d.

An immediate consequence of the above proposition is the following:

Corollary. *If* E *is quasi-complete, then* $m(f) \in E$ *for* $m \in M^0(Z; E)$ *and* $f \in \overline{B}^\infty(Z)$.

Remark. Concerning Propositions 1 and (especially) 2, see [6], p. 164, Proposition 14 and [3], e 2,2. By our Proposition 2, we see that our definition of E-valued measure is stronger than that in [3].

Suppose E is quasi-complete. Let $m \in M^1(Z; E)$ and $f \in \overline{B}^\infty(Z)$. If $\sigma \in S_0(Z)$ is a compact set, then $\int f\, \varphi_\sigma\, dm \in E$ by Proposition 2. Consider the family $\mathscr{C}$ of

[3]) We consider on $B^\infty(Z)$ the topology defined by the norm $\|f\| = \sup\{|f(z)| \mid z \in Z\}$.

compact sets of Z. $\mathscr{C}$ is directed by inclusion. We say that $\int f\,dm$ exists if $\lim_{\sigma\in\mathscr{C}} \int f\,\varphi_\sigma\,dm$ exists in the topology $\sigma(E, E')$. Similarly, if E is barreled, we say that $\int f\,dm'$ exists if $\lim_{\sigma\in\mathscr{C}} \int f\,\varphi_\sigma\,dm'$ exists in the topology $\sigma(E', E)$, for any $m' \in M^1_*(Z; E')$ and $f \in \overline{B}^\infty(Z)$. If $\int f\,dm$ exists for $m \in M^1(Z; E)$ and $f \in \overline{B}^\infty(Z)$, then $\int_\sigma f\,dm = \int f\,\varphi_\sigma\,dm$ exists for every $\sigma \in S_0(Z)$.

3°. Given $m \in M^1(Z; E)$ and $T \in \mathscr{L}(E, E)$, we define $\tilde{m}$ on $S_0(Z)$ by the equation $\tilde{m}(\sigma) = T(m(\sigma))$ for $\sigma \in S_0(Z)$. Obviously, $\tilde{m} \in M^1(Z; E)$. We write $\tilde{m} = Tm$. Thus, T may be regarded as a linear transformation defined on $M^1(Z; E)$. It is obvious that T is continuous for the topology ϱ of $M^1(Z;E)$. $T'm'$ is similarly defined for $T' \in \mathscr{L}(E', E')$ and $m' \in M^1_*(Z; E')$. We know that $T'm' \in M^1_*(Z; E')$. It is easy to see that $\operatorname{Supp} Tm \subseteq \operatorname{Supp} m$. Therefore, $TM^0(Z; E) \subseteq M^0(Z; E)$. If T_1 and T_2 commute in $\mathscr{L}(E, E)$, then they commute as mappings on $M^1(Z; E)$. Similar arguments hold for $T' \in \mathscr{L}(E', E')$ on $M^1_*(Z; E')$.

Proposition 3. (i) *For $T \in \mathscr{L}(E, E)$, $m \in M^1(Z; E)$, $m' \in M^1_*(Z; E')$, $x \in E$ and $x' \in E'$, we have $\langle Tm, x'\rangle = \langle m, {}^tTx'\rangle$ and $\langle x, {}^tTm'\rangle = \langle Tx, m'\rangle$.* (ii) *Let $m \in M^1(Z; E)$, $T \in \mathscr{L}(E, E)$ and $f \in B^\infty(Z)$. If $m(f) \in E$, then $(Tm)(f) \in E$ and $(Tm)(f) = T(m(f))$.* (iii) *Let E be barreled, $m' \in M^1_*(Z; E')$, $T' \in \mathscr{L}(E', E')$ and $f \in B^\infty(Z)$. Then, $(T'm')(f) = T'(m'(f))$.*

Proof: (i) is immediate. To prove (ii), we remark that, for any $x' \in E'$, we have

$$\int f\,d\langle Tm, x'\rangle = \int f\,d\langle m, {}^tTx'\rangle = \langle m(f), {}^tTx'\rangle = \langle T(m(f)), x'\rangle .$$

Similarly, we obtain (iii).

4°. We assume in this paragraph that E is quasi-complete. For $m \in M^0(Z;E)$ and $f \in \overline{B}^\infty(Z)$, let us define an E-valued set function $\hat{m}_f$ by the equation

$$\hat{m}_f(\sigma) = \int f\,\varphi_\sigma\,dm,\ \sigma \in S_0(Z) .$$

We can easily see that $\hat{m}_f$ is countably additive and that $\operatorname{Supp}\hat{m}_f \subseteq \operatorname{Supp} m$; hence $\hat{m}_f \in M^0(Z; E)$. We write $\hat{m}_f = S_f m$. Obviously, S_f is a linear transformation of $M^0(Z; E)$ into itself, for each $f \in \overline{B}^\infty(Z)$. We remark that if $\int f\,dm$ exists for every $m \in M^1(Z; E)$ and $f \in \overline{B}^\infty(Z)$, then $S_f m$ can be defined by the same equation and $S_f m \in M^1(Z; E)$. We shall also denote by S_f, for all $f \in \overline{B}^\infty(Z)$, the mapping $\mu \to f \cdot \mu (f \cdot \mu(\sigma) = \int f\,\varphi_\sigma\,d\mu$ where $\sigma \in S_0(Z))$ of $M^0(Z)$ (= the vector space of all complex Radon measures on Z with compact support) into itself.

Proposition 4. *For $m \in M^0(Z; E)$, $x' \in E'$ and $f, g \in \overline{B}^\infty(Z)$, we have:*

(i) $\langle S_f m, x'\rangle = S_f\langle m, x'\rangle$;

(ii) $(S_f m)(g) = m(fg)$;

(iii) $S_f S_g = S_g S_f$, *i.e., S_f, S_g commute.*

Proof: (i) is immediate from our definition. (iii) is an immediate consequence of (ii). To show (ii), we remark first that the equation is valid for $g \in \mathscr{S}$. Since any $g \in \overline{B}^\infty(Z)$ is, on $\operatorname{Supp} m$, the uniform limit of a sequence of functions in $\mathscr{S}$, the equation is valid for any $g \in \overline{B}^\infty(Z)$.

Proposition 5. *For any* $T \in \mathscr{L}(E, E)$ *and* $f \in \overline{B}^{\infty}(Z)$, *$T$ and S_f commute on* $M^0(Z; E)$, i. e., $T(S_f m) = S_f(Tm)$ *for* $m \in M^0(Z; E)$.

Proof: For all $x' \in E'$ and $m \in M^0(Z; E)$, we have

$$\langle T(S_f m), x'\rangle = \langle S_f m, {}^tT x'\rangle = S_f\langle m, {}^tT x'\rangle = S_f\langle Tm, x'\rangle = \langle S_f(Tm), x'\rangle .$$

Similar results can be obtained for $m' \in M^0_*(Z; E')$, $T' \in \mathscr{L}(E', E')$ and $f \in \overline{B}^{\infty}(Z)$, provided that E is barreled. Analogous notations will be used for them.

5°. For $m \in M^1(Z; E)$ and $\sigma \in S_0(Z)$, define $m^\sigma \in M^1(Z; E)$ by the equations $m^\sigma(\delta) = m(\sigma \cap \delta)$ for $\delta \in S_0(Z)$. If σ is compact, then $m^\sigma \in M^0(Z; E)$. In this case, m^σ is called a *slice* of m. From this definition, it follows immediately that:

a) $(Tm)^\sigma = Tm^\sigma$ for $m \in M^1(Z; E)$, $T \in \mathscr{L}(E, E)$;

b) $(S_f m)^\sigma = S_f m^\sigma$ for $m \in M^0(Z; E)$, $f \in \overline{B}^{\infty}(Z)$;

c) $(m^\sigma)^\delta = m^{\sigma \cap \delta}$ for $m \in M^1(Z; E)$, $\sigma, \delta \in S_0(Z)$.

Similar definition of m'^σ and similar results are obtained for $m' \in M^1_*(Z; E')$.

§ 2. Weak T-measures

1°. In what follows, we take $Z = C$. We remark that the function $f(z) = z$ belongs to $\overline{B}^{\infty}(C)$. Following E. Bishop [1], we define weak T-measures as follows:

Definition. Let $T \in \mathscr{L}(E, E)$; then a measure m in $M^1(C; E)$ is called a *weak T-measure for* $x = m(C)$, if for any slice m^σ (σ compact) of m and for any $x' \in E'$,

$$\lim_{n\to\infty} \| \langle (T - S_z)^n m^\sigma, x'\rangle \|^{1/n} = 0 .$$

If $T' \in \mathscr{L}(E', E')$, then we define in a similar way a *weak T'-measure* m' in $M^1_*(C; E')$ for $x' = m'(C)$.

In particular, if $Tm^\sigma = S_z m^\sigma$ (resp. $T'm'^\sigma = S_z m'^\sigma$) for all slices m^σ (resp. m'^σ) of m (resp. m'), then m (resp. m') is called a *T-measure for* $x = m(C)$ (resp. *T'-measure for* $x' = m'(C)$). In this case, $\int z\, dm$ (resp. $\int z\, dm'$) exists and

$$Tm(\sigma) = \int_\sigma z\, dm \text{ (resp. } T'm'(\sigma) = \int_\sigma z\, dm')$$

for all $\sigma \in S_0(C)$. If $(T - S_z)^k m^\sigma = 0$ for all compact sets $\sigma \in C$, for some finite integer k, then m is called a *weak T-measure of type k*. Similar definition is made for a *weak T'-measure of type k*. A T-measure is a weak T-measure of type 1.

It is easy to see that if m is a weak T-measure (of type k), then m^σ is a weak T-measure (of type k) for any $\sigma \in S_0(C)$. The following result is also immediate: if m is a weak T-measure for x, then Tm is a weak T-measure for Tx. More generally, if $S \in \mathscr{L}(E, E)$ commute with T, then Sm is a weak T-measure for Sx.

2°. We now prove the following theorem:

Theorem 1. (i) *Suppose that E is quasi-complete. Let $T \in \mathscr{L}(E, E)$ and let m be a weak T-measure. Then for every compact set $\delta \subsetneq C$, there exists an analytic function $x_\lambda \in E''$ on $\complement\,\delta$ such that* $({}^{tt}T - \lambda I)\, x_\lambda = m(\delta)$ *for all* $\lambda \in \complement\,\delta$. *This func-*

tion has the property that $x_\lambda \to 0$ *and* $-\lambda x_\lambda \to m(\delta)$ *in* $\sigma(E'', E')$ *as* $|\lambda| \to \infty$. (ii) *Suppose that E is barreled. Let* $T' \in \mathscr{L}(E', E')$ *and let m' be a weak T'-measure. Then for every compact set* $\delta \subseteq C$, *there exists an analytic function* $x'_\lambda \in E'$ *on* $\complement\delta$ *such that* $(T' - \lambda I)\, x'_\lambda = m'(\delta)$ *for all* $\lambda \in \complement\delta$. *This function has the property that* $x'_\lambda \to 0$ *in* $\sigma(E', E)$ *as* $|\lambda| \to \infty$. *If, furthermore, T' is the adjoint of an element of* $\mathscr{L}(E, E)$, *then* $-\lambda x'_\lambda \to m'(\delta)$ *in* $\sigma(E', E)$ *as* $|\lambda| \to \infty$.

Proof: Let

$$x_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \int 1/(\lambda - z)^{n+1} d\,[(T - S_z)^n m^\delta](z)$$

for $\lambda \in \complement\delta$. We shall show that this series converges in $\sigma(E, E')$ and that the sum x_λ is what we want here. Each integral

$$x_n(\lambda) = \int 1/(\lambda - z)^{n+1}\, d\,[(T - S_z)^n m^\delta]\,(z)$$

is well defined for $\lambda \in \complement\delta$, since $\lambda/(\lambda - z) \in B(\delta)$; and each $x_n(\lambda)$ is an analytic function of λ on $\complement\delta$. For any $x' \in E'$, we have

$$\begin{aligned} |\langle x_n(\lambda), x'\rangle| &= |\langle \textstyle\int 1/(\lambda - z)^{n+1}\, d\,[(T - S_z)^n m^\delta]\,(z), x'\rangle| \\ &= |\textstyle\int 1/(\lambda - z)^{n+1}\, d\langle [(T - S_z)^n m^\delta]\,(z), x'\rangle| \\ &\leqq \max_{z\in\delta}(1/|\lambda - z|^{n+1}) \cdot \|\langle (T - S_z)^n m^\delta, x'\rangle\| \,. \end{aligned}$$

Hence,

$$|\langle x_n(\lambda), x'\rangle| \leqq (1/r_\lambda^{n+1}) \cdot \|\langle (T - S_z)^n m^\delta, x'\rangle\| \tag{1}$$

where $r_\lambda = \inf_{z\in\delta} |\lambda - z|$.

Since m is a weak T-measure, it follows that there is a sequence $\{a_n(x')\}_{n=0,1,2,\dots}$ of positive numbers for each $x' \in E'$ such that:

$$\|\langle (T - S_z)^n m^\delta, x'\rangle\|^{1/n} \leqq a_n(x') \,, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x') = 0 \tag{3}$$

for each $x' \in E'$. Then, from (1) and (2), we obtain

$$|\langle x_n(\lambda), x'\rangle| \leqq a_n(x')^n / r_\lambda^{n+1} \,. \tag{4}$$

Let $f_N(\lambda; x') = \left\langle -\sum_{n=0}^{N} x_n(\lambda), x'\right\rangle = -\sum_{n=0}^{N} \langle x_n(\lambda), x'\rangle$; the inequality (4) implies that $f_n(\lambda; x')$ tends to a function $f(\lambda; x')$ uniformly in $\lambda \in \delta_1$ where δ_1 is any compact set contained in $\complement\delta$. Since the functions $f_n(\lambda; x')$ are analytic in $\lambda \in \complement\delta$, $f(\lambda; x')$ is again analytic there. Thus, it is enough to show that there exists an $x_\lambda \in E''$ such that $\langle x_\lambda, x'\rangle = f(\lambda; x')$ for all $x \in E''$.

Since $\{f_n(\lambda; x')\, |\, n = 0, 1, 2, \dots\}$ is bounded for any $x' \in E'$,

$$\left\{-\sum_{n=0}^{N} x_n(\lambda)\, |\, N = 0, 1, 2, \dots\right\}$$

is bounded in E. This implies that $x' \to f(\lambda; x')$ is a continuous mapping of E' into C. Therefore, there is an $x_\lambda \in E''$ such that $f(\lambda; x') = \langle x_\lambda, x'\rangle$ and $-\sum_{n=0}^{N} x_n(\lambda) \to x_\lambda$ in $\sigma(E'', E')$.

Let us recall that for $x \in E \subseteq E''$ we have ${}^{tt}T x = T x$. By the same computation as in [1], p. 439, we have

$$({}^{tt}T - \lambda I)\left(-\sum_{n=0}^{N} x_n(\lambda)\right) = (T - \lambda I)\left(-\sum_{n=0}^{N} x_n(\lambda)\right)$$
$$= m^{\delta}(\delta) - \int 1/(\lambda - z)^{N+1}\, d[(T - S_s)^{N+1} m^{\delta}]\,(z)\,.$$

But, by (2) and (3), we have

$$|\langle \int 1/(\lambda - z)^{N+1} d[(T - S_s)^{N+1} m^{\delta}]\,(z), x'\rangle|$$
$$\leq (1/r_\lambda^{N+1}) \cdot \|\langle (T - S_s)^{N+1} m^{\delta}, x'\rangle\| \to 0 \qquad (N \to \infty)\,.$$

Hence, $({}^{tt}T - \lambda I)\, x_\lambda = m^{\delta}(\delta) = m(\delta)$.

By (3), $\{a_n(x') \mid n = 0, 1, \ldots\}$ is bounded by same constant, say $M_{x'}$. Therefore, by (4)

$$|\langle x_n(\lambda), x'\rangle| \leq M_{x'}^n / r_\lambda^{n+1}\,.$$

Hence, $|\langle x_\lambda, x'\rangle| \leq 1/(r_\lambda - M_{x'}) \to 0$ as $r_\lambda \to \infty$. Since $r_\lambda \to \infty$ when $|\lambda| \to \infty$, it follows that $x_\lambda \to 0$ as $|\lambda| \to \infty$, in $\sigma(E'', E')$. Furthermore,

$$\langle m(\delta) + \lambda x_\lambda, x'\rangle = \langle {}^{tt}T x_\lambda, x'\rangle = \langle x_\lambda, {}^{t}T x'\rangle \to 0$$

as $|\lambda| \to \infty$ for any $x' \in E'$. Hence, $-\lambda x_\lambda \to m(\delta)$ as $|\lambda| \to \infty$, in $\sigma(E'', E')$.

The second part of the theorem is proved in a similar way.

Remark. If E is semi-reflexive, then $x_\lambda \in E$ and we can show that the convergences are valid in the strong topology of E.

Corollary. *If m is a weak T-measure, then* $\operatorname{Supp} m \subseteq \operatorname{sp}(T)$ *where the spectrum* $\operatorname{sp}(T)$ *of T is defined in* WAELBROECK*'s sense* (see [9] and [8]).

Proof: Let $\sigma \subset C$ be any compact subset of $\varrho(T) = \complement \operatorname{sp}(T)$. By Theorem 1, there is an $x_\lambda \in E''$, analytic in $\complement\sigma$ such that $({}^{tt}T - \lambda I)\, x_\lambda = m(\sigma)$. The resolvent R_λ of T is analytic in $\varrho(T)$ and satisfies $(T - \lambda I)\, R_\lambda m(\sigma) = m(\sigma)$. Therefore, for any $x' \in E'$ and $\lambda \in \varrho(T) \cap \complement\sigma$,

$$\langle m(\sigma), x'\rangle = \langle x_\lambda, ({}^{t}T - \lambda I)\, x'\rangle = \langle R_\lambda m(\sigma), ({}^{t}T - \lambda I)\, x'\rangle\,.$$

Since $T - \lambda I$ has the inverse $(T - \lambda I)^{-1}$, ${}^{t}T - \lambda I$ has the inverse ${}^{t}((T - \lambda I)^{-1})$. Hence ${}^{t}T - \lambda I$ is an onto mapping. Therefore, we have

$$\langle x_\lambda, y'\rangle = \langle R_\lambda m(\sigma), y'\rangle$$

for all $y' \in E'$, so that $x_\lambda = R_\lambda m(\sigma) \in E$, if $\lambda \in \varrho(T) \cap \complement\sigma$. Hence, $\langle R_\lambda m(\sigma), x'\rangle$ has an analytic extension to the whole complex plane which tends to zero as $|\lambda| \to \infty$. Hence $R_\lambda m(\sigma) \equiv 0$, so that $m(\sigma) = 0$. By the regularity of m, $m(\sigma) = 0$ for all $\sigma \subseteq \varrho(T) \cap C$. This implies the corollary.

3°. The following lemma can be proved in the same way as Lemma 2.1, [1], p. 420:

Lemma. *Let σ_1, σ_2 be compact, disjoint sets in C and let $T \in \mathscr{L}(E, E)$. Suppose that there is an E-valued analytic function x_λ on $\complement\sigma_1$ such that $(T - \lambda I)\, x_\lambda = x$ for $\lambda \in \complement\sigma_1$ and that there is an E'-valued analytic function x'_λ on $\complement\sigma_2$ such that $({}^{t}T - \lambda I)\, x'_\lambda = x'$. Then $\langle x, x'_\lambda\rangle = \langle x_\lambda, x'\rangle$ on $\complement\sigma_1 \cap \complement\sigma_2$. Furthermore, if $x_\lambda \to 0$*

as $|\lambda| \to \infty$ *in* $\sigma(E, E')$, *then* $\langle x_\lambda, x'\rangle \equiv 0$ *for* $\lambda \in \complement\sigma_1$; *and if* $x'_\lambda \to 0$ *as* $|\lambda| \to \infty$ *in* $\sigma(E', E)$, *then* $\langle x, x'_\lambda\rangle \equiv 0$ *for* $\lambda \in \complement\sigma_2$. *In either case,* $\langle x, x'\rangle = 0$.

Theorem 2. *Suppose that* E *is quasi-complete and barreled. Let* $T \in \mathscr{L}(E, E)$. *If* m *is a weak* T*-measure and* m' *is a weak* ${}^tT$*-measure, then for any disjoint sets* $\sigma_1, \sigma_2 \in S_0(C)$, $\langle m(\sigma_1), m'(\sigma_2)\rangle = 0$.

Proof: If σ_1, σ_2 are compact, then the theorem is immediate from Theorem 1 and the preceding lemma. Let σ_2 be compact and σ_1 be arbitrary. Then $\mu(\sigma) = \langle m(\sigma), m'(\sigma_2)\rangle$ is a regular measure and $\mu(\sigma) = 0$ if σ is a compact subset of σ_1. Hence, $\mu(\sigma_1) = 0$. In the same way, we get $\langle m(\sigma_1), m'(\sigma_2)\rangle = 0$ for arbitrary disjoint sets σ_1, σ_2.

As corollaries of Theorem 2, we obtain the following results which can be proved in the same way as in [1], p. 421. Here we assume that E is quasi-complete and barreled.

Corollary 1. *If* m *is a weak* T*-measure such that* $m(C) = 0$ *and if* m' *is a weak* ${}^tT$*-measure, then* $\langle m(\sigma_1), m'(\sigma_2)\rangle = 0$ *for all* $\sigma_1, \sigma_2 \in S_0(C)$.

Corollary 2. *If the values of weak* T (resp. ${}^tT$)*-measures are dense in* E (resp. E' *for* $\sigma(E', E)$), *then each* x' *in* E' (resp. x *in* E) *has at most one weak* ${}^tT$ (resp. T)*-measure.*

Corollary 3. *If* m *is a weak* T*-measure for* x *and if* m' *is a weak* ${}^tT$*-measure for* x', *then* $\langle m(\sigma), x'\rangle = \langle x, m'(\sigma)\rangle$ *for all* $\sigma \in S_0(C)$.

§ 3. Spectral Theory

1°. In this section, let E be a locally convex space which is separated, quasi-complete and barreled. In this case, $\mathscr{L}(E, E)$ with the bounded convergence topology τ_b is quasi-complete.

Following C. IONESCU TULCEA [8], we shall give here the following definitions:

A) A family $\mathscr{F} = \{\mu_{x,x'}\}_{x\in E,\, x'\in E'}$ of bounded Radon measures on C is a *spectral family* if:

(1) $(x, x') \to \mu_{x,x'}$ is a bilinear, separately continuous mapping of $E \times E'$ into $M^1(C)$.[4])

(2) For every $f \in B^\infty(C)$, there is $U_{\mathscr{F},f} \in \mathscr{L}(E, E)$ satisfying the equation $\langle U_{\mathscr{F},f}\, x, x'\rangle = \int f\, d\mu_{x,x'}$ for all $x \in E$, $x' \in E'$.[5])

(3) For every $f \in B^\infty(C)$, $x \in E$, $x' \in E'$, we have

$$f \cdot \mu_{x,x'} = \mu_{U_{\mathscr{F},f}\, x,\, x'} = \mu_{x,\, {}^tU_{\mathscr{F},f}\, x'} .$$

(4) $U_{\mathscr{F},1} = I$.

For each $\sigma \in S_0(C)$, we write $P_{\mathscr{F}}(\sigma) = U_{\mathscr{F},\, \varphi_\sigma}$. Then $P_{\mathscr{F}}$ is a strongly countably additive spectral measure on $S_0(C)$. We say that $P_{\mathscr{F}}$ is the spectral measure corresponding to $\mathscr{F}$.

---

4) This implies that the bilinear mapping is $\mathscr{E}$-hypocontinuous, since E is barreled. See [8].

5) If we suppose that (1) is satisfied, then (2) is equivalent to saying "$U_{\mathscr{F},f}\, x \in E$ for all $f \in B^\infty(C)$ and $x \in E$".

B) An operator $T \in \mathscr{L}(E, E)$ is said to be *spectral* if there exists a spectral family $\mathscr{F}$ such that

(5) T commutes with $U_{\mathscr{F}, f}$ for any $f \in B^{\infty}(C)$,

(6) $\mathrm{sp}(T_\sigma) \subseteq \sigma$ for every compact set $\sigma \subseteq C$, where $T_\sigma = T|E_\sigma$ and $E_\sigma = P_{\mathscr{F}}(\sigma)(E)$.

The family $\mathscr{F}$ is uniquely determined by T([8]). We say that $\mathscr{F}$ is the spectral family corresponding to the spectral operator T. In this case, let us define:

(7) $m_x(\sigma) = P_{\mathscr{F}}(\sigma)\, x \in E$ for all $x \in E$;

(8) $m'_{x'}(\sigma) = {}^t P_{\mathscr{F}}(\sigma)\, x' \in E'$ for all $x' \in E'$.

It is easy to see that $m_x \in M^1(C; E)$, $m'_{x'} \in M^1_*(C; E')$, $\langle m_x, x'\rangle = \langle x, m'_{x'}\rangle = \mu_{x,x'}$, $m_x(C) = x$ and $m'_{x'}(C) = x'$.

2°. Let T be a spectral operator and let $\mathscr{F} = \{\mu_{x,x'}\}$ be the corresponding spectral family. For any compact set $\sigma_0 \subseteq C$, consider the family $\mathscr{F}_{\sigma_0}$ $\{\mu^{\sigma_0}_{x,x'}\}_{x \in E_{\sigma_0},\, x' \in E'_{\sigma_0}}$ defined on $S_0(C)$ by the equation $\mu^{\sigma_0}_{x,x'}(\sigma) = \mu_{x,\bar{x}'}(\sigma \cap \sigma_0)$ for $x \in E_{\sigma_0}$, $x' \in E'_{\sigma_0}$, $\sigma \in S_0(C)$, where $\bar{x}' \in E'$ is taken in such a way that its restriction to E_{σ_0} coincides with x'. It is easy to see that the definition of $\mu^{\sigma_0}_{x,x'}$ does not depend on the choice of $\bar{x}'$.

By direct computation, we see that T_{σ_0} is a spectral operator on E_{σ_0} and that $\mathscr{F}_{\sigma_0}$ is its corresponding spectral family. Let us remark that $U_{\mathscr{F}_{\sigma_0}, f} = (U_{\mathscr{F}, f})_{\sigma_0} = (U_{\mathscr{F}, f\varphi_{\sigma_0}})_{\sigma_0}$ for all $f \in B^{\infty}(C)$; in particular, we have $P_{\mathscr{F}_{\sigma_0}}(\sigma) = (P_{\mathscr{F}}(\sigma))_{\sigma_0}$ for $\sigma \in S_0(C)$. Hence, for all $x \in E_{\sigma_0}$,

$$\int \lambda\, d P_{\mathscr{F}_{\sigma_0}}(\lambda)\, x = \int_{\sigma_0} \lambda\, d P_{\mathscr{F}}(\lambda)\, x = \int \lambda\, d P_{\mathscr{F}}(\lambda)\, x\,.$$

3°. Since, for every $x \in E$, $x' \in E'$, $\mu^{\sigma_0}_{x,x'}$ has support contained in the compact set $\sigma_0 \subseteq C$, we can apply the theorem on the canonical decomposition for spectral operators ([8], Theorem 5.1) to the spectral operator T_{σ_0} on E_{σ_0}. Thus, the operator $T_{\sigma_0} - \int_{\sigma_0} \lambda\, d P_{\mathscr{F}_{\sigma_0}}(\lambda)$ is quasi-nilpotent[6]) in E_{σ_0}. Hence the operator

$$N = \Big(T_{\sigma_0} - \int_{\sigma_0} \lambda\, d P_{\mathscr{F}_{\sigma_0}}(\lambda)\Big) P_{\mathscr{F}}(\sigma_0) = \big(T - \int \lambda\, d P_{\mathscr{F}}(\lambda)\big)\, P_{\mathscr{F}}(\sigma_0)$$

is quasi-nilpotent in E. Now, for a fixed compact set $\sigma_0 \subseteq C$, $x \in E$ and $x' \in E'$, define $\nu_n \in M^1(C)$, $n = 1, 2, \ldots$ by the equations

(8) $\nu_n(\sigma) = \langle N^n P_{\mathscr{F}}(\sigma)\, x, x'\rangle$, $\sigma \in S_0(C)$.

By (7) and by the definition of N, we see that

(9) $\nu_n(\sigma) = \langle (T - S_z)^n m_x(\sigma \cap \sigma_0), x'\rangle$, $\sigma \in S_0(C)$.

We know that, for any $y' \in E'$, $\left|\Big\langle \sum_i \lambda_i P_{\mathscr{F}}(\sigma_i)\, x, y'\Big\rangle\right| \leqq \|\mu_{x,y'}\|$ if $|\lambda_i| \leqq 1$ and

---

[6]) An operator $N \in \mathscr{L}(E, E)$ is quasi-nilpotent if for all $x \in E$, $x' \in E'$,

$$\lim_{n\to\infty} |\langle N^n x, x'\rangle|^{1/n} = 0\,.$$

If E is barreled, then N is quasi-nilpotent if and only if for heat $\varepsilon > 0$, the set

$$\{(N/\varepsilon)^n \,|\, n = 1, 2, \ldots\}$$

is a bounded set of $\mathscr{L}(E, E)$.

$\sigma_i \cap \sigma_j = \Phi$ for $i \neq j$; hence

$$\left\{\sum_i \lambda_i P_{\mathscr{F}}(\sigma_i) \mid |\lambda_i| \leq 1,\ \sigma_i \cap \sigma_j = \Phi\ (i \neq j)\right\}$$

is bounded in $\mathscr{L}(E, E)$. On the other hand, for any $\varepsilon > 0$,

$$\|\nu_n\|/\varepsilon^n = (1/\varepsilon)^n \sup_{|\lambda_i| \leq 1, \sigma_i \cap \sigma_j = \Phi} \left|\sum_i \lambda_i \nu_n(\sigma_i)\right|$$

$$= \sup_{|\lambda_i| \leq 1, \sigma_i \cap \sigma_j = \Phi} \left|\left\langle (N/\varepsilon)^n \left(\sum_i \lambda_i P_{\mathscr{F}}(\sigma_i) x\right), x' \right\rangle\right| .$$

Therefore, $\|\nu_n\|/\varepsilon^n \leq M(\varepsilon)$ for all n. Since ε is arbitrary, $\lim_{n\to\infty} \|\nu_n\|^{1/n} = 0$. Then it follows from (9) that m_x is a weak ${}^tT$-measure (for x). For any compact set $\sigma_0 \subseteq C$, $x \in E$ and $x' \in E'$,

$$\langle x, ({}^tT - S_x)^n m'_{x'}(\sigma \cap \sigma_0)\rangle = \langle N^n P_{\mathscr{F}}(\sigma) x, x'\rangle = \nu_n(\sigma)$$

for all n. Therefore, we again deduce that $m'_{x'}$ is a weak ${}^tT$-measure for x'. Thus, we have proved:

Theorem 3. *Let E be a locally convex space which is separated, quasi-complete and barreled. If $T \in \mathscr{L}(E, E)$ is a spectral operator and $\mathscr{F}$ is the corresponding spectral family, then $m_x(.) = P_{\mathscr{F}}(.)x$ is a weak T-measure for x for each $x \in E$ and $m'_{x'}(.) = {}^tP_{\mathscr{F}}(.)x'$ is a weak ${}^tT$-measure for x' for each $x' \in E'$.*

4°. Conversely, we can prove:

Theorem 4. *Let E be a locally convex space which is separated, quasi-complete and barreled. Let $T \in \mathscr{L}(E, E)$. If every $x \in E$ has weak T-measure m_x and every $x' \in E'$ has weak ${}^tT$-measure $m'_{x'}$, then T is a spectral operator with the corresponding spectral family $\mathscr{F} = \{\mu_{x,x'}\}$ where $\mu_{x,x'} = \langle m_x, x'\rangle = \langle x, m'_{x'}\rangle$ for all $x \in E$, $x' \in E'$.*

Proof. By Corollary 2 to Theorem 2, m_x and $m'_{x'}$ are uniquely determined by x and x'. By Corollary 3 to Theorem 2, we have

$$\langle m_x(\sigma), x'\rangle = \langle x, m'_{x'}(\sigma)\rangle \text{ for all } \sigma \in S_0(C) . \tag{10}$$

Therefore, $\mu_{x,x'}$ are well defined. It is obvious that $\mu_{x,x'}$ are bounded Radon measures. By (10), $(x, x') \to \mu_{x,x'}$ is a bilinear mapping of $E \times E'$ into $M^1(C)$. Proposition 1 shows that $(x, x') \to \mu_{x,x'}$ is separately continuous. Thus, $\mathscr{F}$ has the property A), (1).

For $f \in B^\infty(C)$, $x \in E$ and $x' \in E'$, we have

$$\left\langle \int f\, dm_x, x'\right\rangle = \int f\, d\mu_{x,x'} .$$

This shows that $U_{\mathscr{F},f}\, x = \int f\, dm_x \in E$ (see Proposition 2.). Hence A), (2) is also satisfied. To verify A), (3), let $f \in B^\infty(C)$, $x \in E$ and $x' \in E'$. By (10), we have

$$\mu_{U_{\mathscr{F},f}x, x'} = \langle U_{\mathscr{F},f}\, x, m'_{x'}\rangle = \left\langle \int f\, dm_x, m'_{x'}\right\rangle ,$$

that is, for each $\sigma \in S_0(C)$

$$\mu_{U_{\mathscr{F},f}x, x'}(\sigma) = \left\langle \int f\, dm_x, m'_{x'}(\sigma)\right\rangle . \tag{11}$$

On the other hand, we have

(12) $$f\cdot\mu_{x,x'}(\sigma)=\int_\sigma f\,d\mu_{x,x'}=\int_\sigma f\,d\langle m_x, x'\rangle\,.$$

By Theorem 2, $\langle m_x(\sigma_1), m'_{x'}(\sigma)\rangle = 0$ if $\sigma_1\cap\sigma=\Phi$ and hence $\langle m_x(\sigma_2), m'_{x'}(\sigma)\rangle = \langle m_x(\sigma_2), x'\rangle$ if $\sigma_2\subseteq\sigma$. Therefore,

(13) $$\int_\sigma f\,d\langle m_x, x'\rangle=\langle\textstyle\int f\,dm_x, m'_{x'}(\sigma)\rangle\,.$$

Comparing (11), (12) and (13), we obtain $f\cdot\mu_{x,x'}=\mu_{U_{\mathscr{F},f}\,x,x'}$. In a similar way, we obtain $f\cdot\mu_{x,x'}=\mu_{x,{}^tU_{\mathscr{F},f}\,x'}$. Since $U_{\mathscr{F},1}\,x=\int 1\,dm_x=m_x(C)=x$ for all x, we deduce $U_{\mathscr{F},1}=I$. Hence, A), (4) is also satisfied, so that $\mathscr{F}$ is a spectral family.

As we remarked in § 2, 1°, Tm_x is a weak T-measure for Tx. Since weak T-measures are uniquely determined by x, we have $Tm_x=m_{Tx}$. Therefore,

$$\mu_{Tx,x'}=\langle m_{Tx}, x'\rangle=\langle Tm_x, x'\rangle=\langle m_x, {}^tTx'\rangle=\mu_{x,{}^tTx'}\,.$$

This implies B), (5). Finally, we shall show that B), (6) is satisfied. We know that

$$P_{\mathscr{F}}(\sigma)\,x=U_{\mathscr{F},\varphi_\sigma}x=\int\varphi_\sigma dm_x=m_x(\sigma)$$

for every $\sigma\in S_0(C)$. Let δ be a compact set. Then

$$S_z m_x^\delta=\int z\,dm_x^\delta(z)=\int z\,dP_{\mathscr{F}}(z)\,P_{\mathscr{F}}(\delta)\,x\,.$$

Hence $(T-S_z)^n m_x^\delta=\left(T-\int_\delta z\,dP_{\mathscr{F}}(z)\right)^n P_{\mathscr{F}}(\delta)x$. Since m_x is a weak T-measure, we have

$$\lim_{n\to\infty}\|\langle(T-S_z)^n m_x^\delta, x'\rangle\|^{1/n}=0\,.$$

Therefore

(14) $$\lim_{n\to\infty}\left|\left\langle\left(T-\int_\delta z\,dP_{\mathscr{F}}(z)\right)^n x, x'\right\rangle\right|^{1/n}=0\,,$$

for all $x\in E_\delta$, $x'\in E'$. But $\mathscr{F}_\delta=\{\mu^\delta_{x,x'}\}_{x\in E_\delta,\,x\in E_\delta'}$ is a spectral family of E_δ with the corresponding spectral measure $P_{\mathscr{F}_\delta}$. By Theorem 5.2 of [8], (14) implies that $T_\delta=T|E_\delta$ is a spectral operator on E_δ with the corresponding spectral family $\mathscr{F}_\delta$, so that $\mathrm{sp}(T_\delta|P_{\mathscr{F}_\delta}(\sigma)E_\delta)\subseteq\sigma$ for all compact set σ. Since $P_{\mathscr{F}_\delta}(\sigma)E_\delta=E_{\delta\cap\sigma}$, $T_\delta|P_{\mathscr{F}_\delta}(\delta)E_\delta=T|E_\delta=T_\delta$. Hence,

$$\mathrm{sp}(T_\delta)=\mathrm{sp}(T_\delta|P_{\mathscr{F}_\delta}(\delta)E_\delta)\subseteq\delta\,.$$

Thus, B), (6) is satisfied and Theorem 4 is completely proved.

Combining Theorems 3 and 4, we can state as follows:

"*If E is a locally convex space which is separated, quasi-complete and barreled, then $T\in\mathscr{L}(E,E)$ is spectral if and only if every $x\in E$ has a weak T-measure and every $x'\in E'$ has a weak ${}^tT$-measure.*"

5°. Let E be quasi-complete and barreled as before. Suppose that $T\in\mathscr{L}(E,E)$ is a spectral operator and that $\mathscr{F}=\{\mu_{x,x'}\}$ is the corresponding spectral family. We say that T is a *spectral operator of type n*, if

$$T=\int\lambda\,dP_{\mathscr{F}}(\lambda)+N$$

with $N^n = 0$. Here, we assume that $\int \lambda\, d P_{\mathscr{F}}(\lambda)$ exists[7]) and $\in \mathscr{L}(E, E)$. If $n = 1$, then T is called a *scalar operator*.

If T is a spectral operator of type n, then

$$(T - \int \lambda\, d P_{\mathscr{F}}(\lambda))^n x = N^n x = 0 \text{ for all } x \in E .$$

Therefore, $m_x = P_{\mathscr{F}}(.)x$, $x \in E$, are weak T-measures of type n and $m'_{x'} = {}^tP_{\mathscr{F}}(.)x'$, $x' \in E'$, are weak ${}^tT$-measures of type n.

Conversely, suppose that $T \in \mathscr{L}(E, E)$ and that every $x \in E$ has weak T-measure of type n and every $x' \in E'$ has weak T-measure of type n. Then, by Theorem 4, T is a spectral operator with the corresponding spectral family $\mathscr{F} = \{\mu_{x,x'}\}$. Furthermore, for any compact set σ, and for any $x \in E_\sigma = P_{\mathscr{F}}(\sigma)E$, we obtain $\left(T - \int_\sigma \lambda\, d P_{\mathscr{F}}(\lambda)\right)^n x = 0$. Suppose, in addition, that $\int \lambda\, d m_x(\lambda)$ exists for every $x \in E$. Then, $\int \lambda\, d P_{\mathscr{F}}(\lambda)$ exists and $\in \mathscr{L}(E, E)$, since E is barreled. Therefore, $N = T - \int \lambda\, d P_{\mathscr{F}}(\lambda) \in \mathscr{L}(E, E)$ and $N^n x = 0$ for all $x \in E_\infty = \bigcup_{\sigma \text{ compact}} E_\sigma$. Since E_∞ is dense in E, we conclude that $N^n x = 0$ for all $x \in E$, i. e., $N^n = 0$. Hence T is a spectral operator of type n. Thus, we have proved:

Theorem 5. *Let E be a locally convex space which is separated, quasi-complete and barreled. Then $T \in \mathscr{L}(E, E)$ is a spectral operator of type n if and only if every $x \in E$ has a weak T-measure m_x of type n, every $x' \in E'$ has a weak ${}^tT$-measure $m'_{x'}$ of type n and $\int \lambda\, d m_x(\lambda)$ exists for every $x \in E$. In particular, T is a scalar operator if and only if every $x \in E$ has a T-measure and every $x' \in E'$ has a ${}^tT$-measure.*

Remark. The existence of a T-measure for each $x \in E$ implies that $\int \lambda\, d m_x(\lambda)$ exists for all $x \in E$. In fact, given $x \in E$, we have $\int_\sigma \lambda\, d \mu_{x,x'} = \left\langle \int_\sigma \lambda\, d m_x, x' \right\rangle = \langle T m_x(\sigma), x' \rangle$ for all $x' \in E'$ and σ compact. Using the above relation, we deduce that $\int |\lambda|\, d|\mu_{x,x'}| < \infty$ for every $x' \in E'$ and $\int \lambda\, d \mu_{x,x'} = \langle T x, x' \rangle$. Hence, $\int \lambda\, d m_x$ exists and is equal to $T x$.

§ 4. Convergence Theorem

We obtain the following results concerning the convergence of spectral operators, as an application of the theorems in the previous section. Let E be as before, i. e., quasi-complete and barreled.

1°. Let $T \in \mathscr{L}(E, E)$. For each $x' \in E'$, let $\{a_k(x')\}_{k=0,1,\dots}$ be a sequence of positive numbers such that

$$\lim_{k \to \infty} a_k(x') = 0 . \tag{1}$$

We say that $m \in M^a(C; E)$ is a *weak T-measure of class* $\{a_k(x')\}$ if it satisfies

$$\| \langle (T - S_z)^k m^\delta, x' \rangle \|^{1/k} \leq a_k(x') \tag{2}$$

for all k and for any compact set $\delta \subseteq C$.

[7]) The existence of $\int \lambda\, d P_{\mathscr{F}}(\lambda)$ is understood in the following sense: There is an operator in $\mathscr{L}(E, E)$ which we denote by $\int \lambda\, d P_{\mathscr{F}}(\lambda)$, such that $\langle \int \lambda\, d P_{\mathscr{F}}(\lambda) x, x' \rangle = \int \lambda\, d \mu_{x,x'}$ for all $x \in E$, $x' \in E'$.

We define the *weak* T'-*measure* m' *of class* $\{a_k(x)\}$ for $T' \in \mathscr{L}(E', E')$ and $m' \in M^1_*(C; E')$, in a similar way where, for each $x \in E$, $\{a_k(x)\}$ is a sequence of positive numbers such that $\lim_{k\to\infty} a_k(x) = 0$.

Proposition 6. *Let* T_n, $n = 1, 2, \ldots$ *be a sequence of operators belonging to* $\mathscr{L}(E, E)$ *such that*

$$(3)\qquad T_n \to T,\ T \in \mathscr{L}(E, E), \textit{ in the topology } \tau_b.$$

(i) *If for each* n $m^{(n)}$ *is a weak* T_n-*measure of class* $a_k(x')$ *(independent of* n*) such that*

$$(4)\qquad m^{(n)} \to m,\ m \in M^1(C; E), \textit{ in the topology } \varrho,$$

then m *is a weak* T-*measure of class* $\{a_k(x')\}$.

(ii) *If for each* n $m'^{(n)}$ *is a weak* ${}^tT_n$-*measure of class* $\{a_k(x)\}$ *(independent of* n*) such that*

$$(5)\qquad m'^{(n)} \to m',\ m' \in M^1_*(C; E'), \textit{ in the topology } \varrho_*,$$

then m' *is a weak* ${}^tT$-*measure of class* $\{a_k(x)\}$.

Proof. We shall prove only (i). The statement (ii) can be proved in a similar way.

First, we remark that if $T_n \to T$ in τ_b, then $T_n^i \to T^i$ in τ_b for any positive integer i.

For fixed $k (k = 0, 1, 2, \ldots)$, compact set δ and $x' \in E'$, we have

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\|\langle (T - S_z)^k m^\delta, x'\rangle\|^{1/k} \\ &\leqq \|\langle (T - S_z)^k (m^\delta - m^{(n)\delta}), x'\rangle\|^{1/k} \\ &+ \|\langle [(T - S_z)^k - (T_n - S_z)^k]\, m^{(n)\delta}, x'\rangle\|^{1/k} \\ &+ \|\langle (T_n - S_z)^k m^{(n)\delta}, x'\rangle\|^{1/k}. \end{aligned}$$

The last term is less than $a_k(x')$ for all n, by hypotheses. We shall show that the first and the second terms of the right hand side of (6) tend to zero when n tends to ∞. We have

$$\begin{aligned} &\|\langle (T - S_z)^k (m^\delta - m^{(n)\delta}), x'\rangle\| \\ &\qquad = \left\|\left\langle \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} T^i S_z^{k-i} (m^\delta - m^{(n)\delta}), x'\right\rangle\right\| \\ &\qquad \leqq \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \|S_z^{k-i} \langle m^\delta - m^{(n)\delta}, {}^tT^i x'\rangle\|. \end{aligned}$$

Now let R be a positive number such that $\delta \subseteq \{z \mid |z| \leqq R\}$. Then,

$$\begin{aligned} \|S_z^{k-i} \langle m^\delta - m^{(n)\delta}, {}^tT^i x'\rangle\| &\leqq R^{k-i} \|\langle m - m^{(n)}, {}^tT^i x'\rangle\| \\ &\to 0\ (n \to \infty), \text{ by } (4). \end{aligned}$$

Hence $\|\langle (T-S_z)^k(m^\delta - m^{(n)\delta}), x'\rangle\| \to 0$ as $n\to\infty$. Next,

$$\begin{aligned}\|\langle [(T-S_z)^k-(T_n-S_z)^k]\, m^{(n)\delta}, x'\rangle\| &= \left\|\left\langle \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(T^i-T_n^i)\, S_z^{k-i} m^{(n)\delta}, x'\right\rangle\right\| \\ &\leqq \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\|S_z^{k-i}\langle (T^i-T_n^i)\, m^{(n)\delta}, x'\rangle\| \\ &\leqq \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}R^{k-i}\|\langle (T^i-T_n^i)\, m^{(n)}, x'\rangle\|.\end{aligned}$$

Since $m^{(n)}\to m$, $B=\{m^{(n)}(\sigma)\mid \sigma\in S_0(C),\ n=1,2,\dots\}$ is bounded in E. Hence,

$$\begin{aligned}\|\langle (T^i-T_n^i)\, m^{(n)}, x'\rangle\| &\leqq 4\sup_{\sigma\in S_0(C)}|\langle (T^i-T_n^i)\, m^{(n)}(\sigma), x'\rangle| \\ &\leqq 4\sup_{x\in B}|\langle (T^i-T_n^i)\, x, x'\rangle| \\ &\to 0\ (n\to\infty),\ \text{by (3)}.\end{aligned}$$

Therefore, $\|\langle [(T-S_z)^k-(T_n-S_z)^k]\, m^{(n)\delta}, x'\rangle\|^{1/k}\to 0$ as $n\to\infty$. Thus we obtain $\|\langle (T-S_z)^k m^\delta, x'\rangle\|^{1/k}\leqq a_k(x')$ and hence the proposition is proved.

Corollary. *Let T_n be a sequence of operators belonging to $\mathscr{L}(E,E)$ such that $T_n\to T\in\mathscr{L}(E,E)$ in the topology τ_b.*

(i) *If for each n $m^{(n)}$ is a weak T_n-measure of type k (k fixed) such that $m^{(n)}\to m$ in ϱ, then m is a weak T-measure of type k.*

(ii) *If for each n $m'^{(n)}$ is a weak ${}^tT_n$-measure of type k (k fixed) such that $m'^{(n)}\to m'$ in ϱ_*, then m' is a weak ${}^tT$-measure of type k.*

2°. Consider a spectral operator T which can be written in the form $T=S+N$, where S is a scalar operator (see § 3, 5°) and N is a quasi-nilpotent operator (see [8]). If, for each $x\in E$ and $x'\in E'$, we are given a sequence $\{a_k(x,x')\}_{k=0,1,\dots}$ of positive numbers such that $\lim_{k\to\infty}a_k(x,x')=0$, then we say that the spectral operator T is of class $\{a_k(x,x')\}$ if its nilpotent part N satisfies

$$(7)\qquad |\langle N^k x, x'\rangle|^{1/k}\leqq a_k(x,x')\qquad \text{for all } x\in E,\ x'\in E'.$$

Theorem 6. *Let E be a locally convex space which is separated and reflexive. Let T_n, $n=1,2,\dots$ be a sequence of spectral operators of class $\{a_k(x,x')\}$ (independent of n) and let $\mathscr{F}^{(n)}=\{\mu^{(n)}_{x,x'}\}$ be the corresponding spectral families. Suppose that*

(8) *$T_n\to T$, $T\in\mathscr{L}(E,E)$, in the topology τ_b,*

(9) *$\mu^{(n)}_{x,x'}\to\mu_{x,x'}$ in $M^1(C)$ for all $x\in E$, $x'\in E'$.*

Then T is a spectral operator and $\mathscr{F}=\{\mu_{x,x'}\}$ is the corresponding spectral family. If the T_n are spectral operators of type k ($k\geqq 2$ fixed) and if $\int|z|\,d|\mu_{x,x'}|(z)>\infty$ for all $x\in E$, $x'\in E'$, then T is a spectral operator of type k. If the T_n are scalar operators, then T is a scalar operator.

Proof. Let $m^{(n)}_x$ be the weak T_n-measure for $x\in E$. Then $\mu^{(n)}_{x,x'}=\langle m^{(n)}_x, x'\rangle$. Since E is reflexive, there is an $m_x\in M^1(C;E)$ such that $\mu_{x,x'}=\langle m_x, x'\rangle$, by (9).

Then $m_x^{(n)} \to m_x$ in the topology ϱ of $M^1(C; E)$. Since the nilpotent parts N_n of T_n satisfy (7) for all $n = 1, 2, \ldots$, we deduce that, for each $\varepsilon > 0$,

$$\{\langle (N_n/\varepsilon)^k x, x'\rangle \mid k = 0, 1, \ldots; n = 1, 2, \ldots\}$$

is bounded, so that $\{(N_n/\varepsilon)^k \mid k = 0, 1, \ldots; n = 1, 2, \ldots\}$ is a bounded set in $\mathscr{L}(E, E)$. Therefore, for any bounded set $B \subseteq E$ and for any $x' \in E'$, there is a sequence $\{b_k(B, x')\}_{k=0,1,\cdots}$ of positive numbers such that $\lim_{k\to\infty} b_k(B, x') = 0$ and

$$|\langle N_n^k x, x'\rangle|^{1/k} \leqq b_k(B, x') \qquad \text{for all } x \in B. \tag{10}$$

On the other hand, we know that

$$\begin{aligned} &\langle (T_n - S_z)^k m_x^{(n)\delta}, x'\rangle(\sigma) \\ &= \langle (T_n - \textstyle\int z\, d P_{\mathscr{F}_0}(n)(z))^k P_{\mathscr{F}(n)}(\sigma \cap \delta)\, x, x'\rangle \\ &= \langle N_n^k P_{\mathscr{F}(n)}(\delta \cap \sigma)\, x, x'\rangle . \end{aligned} \tag{11}$$

Since $\{\mu_{x,x'}^{(n)}\}$ $n = 1, 2, \ldots$ is convergent in $M^1(C)$, it is bounded in $M^1(C)$ for fixed $x \in E$, $x' \in E'$. Hence, from the equation $\mu_{x,x'}^{(n)}(\sigma) = \langle P_{\mathscr{F}(n)}(\sigma)\, x, x'\rangle$, we deduce that $B_x = \{P_{\mathscr{F}(n)}(\sigma)\, x \mid \sigma \in S_0(C), n = 1, 2, \ldots\}$ is a bounded set in E. Therefore, by (10), we obtain

$$|\langle N_n^k P_{\mathscr{F}(n)}(\delta \cap \sigma)\, x, x'\rangle|^{1/k} \leqq b_k(B_x, x') \quad \text{for all} \quad \sigma \in S_0(C), \tag{12}$$

$n = 1, 2, \ldots$. Hence, by (11), we have

$$\|\langle (T_n - S_z)^k m_x^{(n)\delta}, x'\rangle\|^{1/k} \leqq 4^{1/k} b_k(B_x, x') .$$

Taking $a_k(x') = 4^{1/k} b_k(B_x, x')$ for fixed x, we see that $m_x^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ are weak T_n-measures of class $\{a_k(x')\}$. Hence, by Proposition 6, (i), we conclude that m_x is a weak T-measure (for x).

Next let $m_{x'}^{\prime(n)}$ be the weak ${}^tT_n$-measure for x'. Since E is barreled, there is an $m'_{x'} \in M^1_*(C; E')$ such that $\mu_{x,x'} = \langle x, m'_{x'}\rangle$ and $m_{x'}^{\prime(n)} \to m'_{x'}$ in ϱ_*. By the equation $\langle x, ({}^tT_n - S_z)^k m_{x'}^{\prime(n)\delta}\rangle = \langle (T_n - S_z)^k m_x^{(n)\delta}, x'\rangle$ and by (12), we obtain

$$\|\langle x, ({}^tT_n - S_z)^k m_{x'}^{\prime(n)\delta}\rangle\|^{1/k} \leqq 4^{1/k} b_k(B_x, x') .$$

Taking $a_k(x) = 4^{1/k} b_k(B_x, x')$ for fixed x', we again see that $m_{x'}^{\prime(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ are weak ${}^tT_n$-measures of class $\{a_k(x)\}$. Therefore, by Proposition 6, (ii), $m'_{x'}$ is a weak ${}^tT$-measure for x'. Thus, by Theorem 4, T is a spectral operator and $\mathscr{F} = \{\mu_{x,x'}\}$ is the corresponding spectral family.

Now suppose that T_n are spectral operators of type k. If $\int |z|\, d|\mu_{x,x'}| < \infty$ for every $x \in E$, $x' \in E'$, then, using the reflexivity of E, we may show that $S = \int z\, d P_{\mathscr{F}}(z)$ exists (in the sense of footnote [7])). Hence, by the corollary to Proposition 6 and by Theorem 5, we conclude that T is a spectral operator of type k.

If T_n are scalar operators, then it follows from (8) and (9) that $\langle T m_x(\delta), x'\rangle = \int_\delta z\, d\mu_{x,x'}$ for every compact set δ, $x \in E$, $x' \in E'$. Therefore m_x is a T-measure (for x). Similarly, we see that $m'_{x'}$ is a ${}^tT$-measure for x'. Hence, by Theorem 5, T is a scalar operator. (See the remark following that theorem.) Thus, the theorem is completely proved.

References

[1] BISHOP, E.: Spectral theory for operators on a Banach space. Trans. Am. Math. Soc. **86**, 414—445 (1957).
[2] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. Livre V. Paris 1953, 1955.
[3] BOURBAKI, N.: Intégration. Livre VI, Chap. 6. Paris 1960.
[4] DUNFORD, N.: A survey of the theory of spectral operators. Bull. Am. Math. Soc. **64**, 217—274 (1958).
[5] DUNFORD, N., and J. T. SCHWARTZ: Linear operators, Part I. New York 1958.
[6] GROTHENDIECK, A.: Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$. Canad. J. Math. V, 129—173 (1953).
[7] HILLE, E., and R. S. PHILLIPS: Functional analysis and semi-groups. Am. Math. Soc. Coll. Pub. **31** (1957).
[8] IONESCU TULCEA, C.: Spectral operators on locally convex spaces. Bull. Am. Math. Soc. **67**, 125—128 (1961).
[9] WAELBROECK, L.: Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives. J. de Math. 9t Série, **33**, pp. 147—186 (1954).

(Received September 1, 1960)

Wirsing, E.
Math. Annalen 143, 75—102 (1961)

Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen*)

Von

Eduard Wirsing in Braunschweig

Inhalt

1. Eine Reihe von Fragen über Häufigkeit und Verteilung von Zahlen, die durch arithmetische Eigenschaften charakterisiert sind, laufen darauf hinaus, für eine multiplikative Funktion $f(n)$ das asymptotische Verhalten der Summe

(1) $$\sum_{n \leq x} f(n)$$

für $x \to \infty$ zu untersuchen. Da eine multiplikative Funktion durch Angabe ihrer Werte für alle Primzahlpotenzen bestimmt ist, kann es nicht überraschen, daß zwischen dem asymptotischen Verhalten der eben angeschriebenen und dem der folgenden Summe

(2) $$\sum_{p \leq x} f(p) \quad (p \text{ prim})$$

Zusammenhänge bestehen (die Potenzen p^ν, $\nu \geq 2$, spielen wegen ihrer Seltenheit gewöhnlich keine Rolle). Während jedoch bisher für die Untersuchung von Summen der Gestalt (1) meist spezielle arithmetische Eigenschaften der Funktion $f(n)$ bzw. funktionentheoretische Bedingungen über die erzeugende Funktion $\sum f(n) n^{-s}$ zum Ausgangspunkt genommen wurden, wobei sich dann nachträglich asymptotische Beziehungen zwischen (1) und (2) konstatieren lassen, sind im folgenden gerade solche Beziehungen (Satz 1 und Satz 2 sowie Nr. 2.5) Ziel der Untersuchung[1]). Satz 1 betrifft nichtnegative Funktionen $f(n)$ und eignet

*) Von der Naturwissenschaftlich-Philosophischen Fakultät der Technischen Hochschule Braunschweig als Habilitationsschrift genehmigt. Die vorliegende Fassung stellt eine Umarbeitung dar.

[1]) Delange [5, 6] kündigt zwei Sätze an, die wesentliche Teile von Satz 1 und 2 der vorliegenden Arbeit sind.

sich speziell zur Abschätzung von Anzahlfunktionen, während Satz 2 sich auf komplexwertige Funktionen $f^*(n)$ bezieht und insbesondere zum Nachweis von Gleichverteilungseigenschaften solcher Zahlenmengen brauchbar ist, deren Anzahlfunktion sich mit Satz 1 abschätzen läßt. Einige Anwendungsbeispiele werden wir ausführen.

Ein spezieller Fall von Satz 1 ist in einer früheren Veröffentlichung des Verfassers [17] bewiesen. Die dort verwandte Methode, welche funktionale Eigenschaften der Reihe $\sum f(n) n^{-s}$ für reelles s heranzieht, wäre auch zum Beweis der hier vorgelegten Sätze brauchbar. Bei den im folgenden dargestellten Beweisen spielt dagegen die erzeugende Funktion (also die Laplace-Transformierte) keine Rolle, daher werden auch Taubersche Sätze überflüssig. Berücksichtigt man, daß der Primzahlsatz (auch für Progressionen) nach A. SELBERG [14] elementar zugänglich ist, so ergeben sich für eine Anzahl bekannter Sätze elementare Beweise.

2.1. Bezeichnungen

$\mathfrak{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *sei die Menge der natürlichen Zahlen,*

$\mathfrak{P} = \{2, 3, 5, \ldots\}$ *die Menge der Primzahlen.*

Die Buchstaben n, p bezeichnen stets natürliche bzw. Primzahlen.

Eine Funktion $f(n)$ heißt multiplikativ, wenn

$$(n_1, n_2) = 1 \frown f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2)$$

Abkürzungen:

$$M(x) = \sum_{n \leq x} f(n), \quad l(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \log n,$$

$$m(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} f(n), \quad \Pi(x) = \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \cdots\right),$$

$$T(x) = \sum_{p \leq x} f(p), \quad \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} f(p) \log p.$$

Wenn neben f andere Funktionen f_1, $\bar{f}$, f^*, ... betrachtet werden, so werden die zugehörigen Bildungen M, m, Π usw. mit dem entsprechenden Index versehen.

Rz ist der Realteil von z.

Θ darf für jede Funktion (von einer oder mehreren Variablen) geschrieben werden, die in dem betrachteten Bereich $|\Theta| \leq 1$ erfüllt. Verschiedene Θ werden nur gelegentlich durch Indizierung unterschieden. Für $f = (1 + o(1))g$ wird auch $f \sim g$ geschrieben.

$\omega(n)$ bezeichne die Anzahl der Primteiler, $\Omega(n)$ die Anzahl der Primfaktoren von n; für $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ ist also $\omega(n) = r$, $\Omega(n) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$.

2.2. Satz 1: *Ist $f(n)$ multiplikativ,*

$$f(n) \geq 0 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$f(p^\nu) \leq \gamma_1 \gamma_2^\nu \quad \text{mit} \quad \gamma_2 < 2 \quad \text{für} \quad \nu = 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

$$\sum_{p \leq x} f(p) = (\tau + o(1)) \frac{x}{\log x} \quad \text{für} \quad x \to \infty, \tag{4}$$

so gilt für $x \to \infty$

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \left(\frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(\tau)} + o(1)\right) \frac{x}{\log x} \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \cdots\right), \tag{5}$$

worin C die Euler-Mascheronische Konstante bedeutet.

Das Produkt in (5) läßt sich leicht weiter auswerten: Wegen (3) konvergiert[2])

$$\prod_p e^{-\frac{1}{p} f(p)} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \cdots\right) = P\,,$$

also ist für $x \to \infty$

$$\Pi(x) \sim P e^{\sum\limits_{p \leq x} \frac{1}{p} f(p)}.$$

Wegen

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} f(p) = \int_0^x \frac{1}{t}\, d\,T(t) = \int_1^x \frac{T(t)}{t^2}\, dt + \frac{T(x)}{x}$$

$$= \int_1^x \frac{T(t)}{t^2}\, dt + o(1)$$

nimmt die Behauptung dann die Gestalt

$$(5') \qquad \sum_{n \leq x} f(n) = \left(\frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(\tau)} + o(1)\right) \frac{P x}{\log x}\, e^{\int_1^x T(t)\, t^{-2}\, dt}$$

an, in der sie den rechnerischen Zusammenhang von $\sum f(p)$ und $\sum f(n)$ am besten beleuchtet, während (5) strukturell aufschlußreicher ist.

Satz 2: $f(n)$ *erfülle die Bedingungen von Satz* 1, *außerdem* $\tau \neq 0$. $f^*(n)$ *sei eine weitere multiplikative Funktion,*

$$(6) \qquad |f^*(n)| \leq f(n) \quad (n = 1, 2, \ldots)\,,$$

$$(4^*) \qquad \sum_{p \leq x} f^*(p) = (\tau^* + o(1)) \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty)\,,$$

und es gelte

$$(7) \qquad \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{f^*(p)}{p} + \frac{f^*(p^2)}{p^2} + \cdots\right) = o\left(\prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \cdots\right)\right);$$

dann ist

$$(8) \qquad \sum_{n \leq x} f^*(n) = o\left(\sum_{n \leq x} f(n)\right).$$

Die Bedingung (7) läßt sich in eine rechnerisch übersichtlichere Form bringen. Zunächst ist sie natürlich erfüllt, wenn für irgend eine Primzahl p

$$1 + \frac{f^*(p)}{p} + \frac{f^*(p^2)}{p^2} + \cdots = 0$$

ist. Lassen wir diesen trivialen Fall außer acht, so erkennen wir aus

$$\Pi^*(x) = e^{\sum\limits_{p \leq x} \frac{1}{p} f^*(p) + \mathrm{const} + o(1)}$$

sofort die Äquivalenz von (7) mit

$$(9) \qquad \sum_p \frac{1}{p} (f(p) - R f^*(p)) = \infty\,.$$

---

[2]) $\Sigma\, p^{-2} f(p)^2$ ist konvergent; s. Hilfssatz 1.

Ist $\tau^* \neq \tau$, so folgt (9) *und damit* (7) *aus den übrigen Voraussetzungen:* Wegen (6) ist ja $|\tau^*| \leqq \tau$, also $R\tau^* < \tau$ falls $\tau^* \neq \tau$. (4) und (4*) liefern dann (9) durch partielle Summation.

2.3. Beweisskizzen

2.3.1. Der Beweis von Satz 1 gliedert sich hauptsächlich in zwei Schritte: Im ersten Schritt (Hilfssatz 2) wird die Formel

$$\sum_{n \leqq x} f(n) \sim \frac{\tau x}{\log x} \sum_{n \leqq x} \frac{f(n)}{n} \tag{10}$$

bewiesen, durch die unser Problem auf die Untersuchung von $\sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} f(n)$ reduziert wird. Der Beweis beruht auf einer Umsummierung, die im einfachsten Fall, (f vollständig multiplikativ) sich kurz so darstellt:

$$\begin{aligned} \log x \sum_{n \leqq x} f(n) &\sim \sum_{n \leqq x} f(n) \log n \\ &= \sum_{n \leqq x} f(n) \sum_{p^\nu \mid n} \log p \\ &= \sum_{m \leqq x} f(m) \sum_{p^\nu \leqq \frac{x}{m}} f(p^\nu) \log p \qquad (n = m\, p^\nu) \\ &= \sum_{m \leqq x} f(m) \left(\tau \frac{x}{m} + o\left(\frac{x}{m}\right)\right) \\ &\sim \tau x \sum_{m \leqq x} \frac{f(m)}{m}. \end{aligned} \tag{11}$$

Hilfssatz 1 zeigt, daß die Funktionswerte bei den Primzahlpotenzen p^ν, $\nu \geqq 2$ nur Restglieder von untergeordneter Größe hervorbringen, so daß die vorgeführte Schlußweise unter den allgemeineren Bedingungen von Satz 1 brauchbar bleibt.

Der zweite, übrigens schwierigere, Schritt hat die Formel

$$\sum_{n \leqq x} \frac{f(n)}{n} \sim \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(1+\tau)} \prod_{p \leqq x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \cdots\right) \tag{12}$$

zum Ziel (Hilfssatz 6). Wie in [17] vom Verfasser an einem Beispiel ausgeführt ist, kann man dies Ziel folgendermaßen erreichen:

Aus (4) bestimmt man das asymptotische Verhalten von

$$\sum_p f(p) p^{-s} \quad \text{für} \quad s \to 1+,$$

daraus das gleiche für $\sum_n f(n) n^{-s}$; es ist nämlich

$$\sum_n f(n) n^{-s} \sim P e^{\sum_p f(p) p^{-s}} \qquad (s \to 1+),$$

und schließt dann mit Hilfe eines Taubersatzes von Hardy und Littlewood auf den Verlauf von $\sum_{n \leqq x} f(n) \frac{1}{n}$.

Um den Gegenstand jedoch besser zu durchleuchten, soll (12) ohne Zuhilfenahme der erzeugenden Funktion $\sum_n f(n)n^{-s}$ bewiesen werden. Dadurch erübrigt sich auch die Anwendung eines Taubersatzes.

Auf den ersten Blick erkennt man, daß beim Ausrechnen von

$$\Pi(x) = \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \cdots\right)$$

alle Summanden von

$$m(x) = \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n}$$

und noch beträchtlich mehr auftreten. Dagegen ist nicht so leicht zu erkennen, daß der Überschuß gerade durch den Faktor $e^{-C\tau}\Gamma(1+\tau)^{-1}$ kompensiert wird. Der Beweis setzt bei kleinen Dichten an, wo Formel (12) das übersichtlichste Äußere hat: für $\tau \to 0$ ist nämlich $e^{C\tau}\Gamma(1+\tau) = 1 + O(\tau^2)$. Dementsprechend behauptet Hilfssatz 3: Für $0 < \tau \leq \tau_0$ und $x \geq x_0$ ist

$$m(x) = (1 + 2\Theta\tau^2)\,\Pi(x)\,. \tag{13}$$

Wie gesagt, ist natürlich $m(x) \leq \Pi(x)$; es verbleibt, $\Pi(x)$ nach oben abzuschätzen.

X sei groß und zunächst fest. Man erkläre durch

$$\bar{f}(p^\nu) = \begin{cases} f(p^\nu) & \text{für} \quad p \leq X\,, \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad p > X \end{cases} \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

eine neue multiplikative Funktion $\bar{f}(n)$ und betrachte

$$\bar{m}(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}\bar{f}(n)\,.$$

Offenbar ist

$$\bar{m}(X) = m(X)\,, \quad \bar{m}(\infty) = \Pi(X)\,. \tag{14}$$

In einer gewissen Näherung gilt

$$\sum_{p \leq x} \frac{\bar{f}(p)}{p} \log p \approx \begin{cases} \tau \log x & \\ \tau \log X & \end{cases} \textit{für} \quad \begin{matrix} x \leq X \\ x \geq X\,. \end{matrix}$$

Dies läßt sich ausnutzen, um $\bar{m}(x)$ analog (11) umzuformen $\left(\frac{\bar{f}(n)}{n} \text{ statt } f(n)\right)$. Man erhält

$$\sum_{n \leq x} \frac{\bar{f}(n)}{n} \log n \approx \tau \sum_{\frac{x}{X} < m \leq x} \frac{\bar{f}(m)}{m} \log \frac{x}{m} + \tau \log X \sum_{m \leq \frac{x}{X}} \frac{\bar{f}(m)}{m}\,,$$

was nach partieller Integration übergeht in

$$\bar{m}(x) \log x \approx \int_1^x \bar{m}(t)\, d\log t + \tau \int_{\frac{x}{X}}^x \bar{m}(t)\, d\log t\,. \tag{15}$$

Wäre dies eine wirkliche Gleichung, so könnte man $\tilde{m}(x)$ hieraus bestimmen: Differenzieren und „Auflösen" der entstehenden Differentialgleichung würde auf

$$\frac{\tilde{m}(x)}{\log^\tau x} = \frac{\tilde{m}(X)}{\log^\tau X} + \int\limits_{t=X}^{x} \tilde{m}\left(\frac{t}{X}\right) d\,\frac{1}{\log^\tau t} \tag{16}$$

führen. Wegen $\tilde{m}(x) = 0$ für $x < 1$ ließe sich damit $\tilde{m}(x)$ rekursiv in den Intervallen $[1, X]$, $[X, X^2]$, ... berechnen. Aber abgesehen davon, daß es sich eben nur um eine Näherung handelt, scheint es auch schwierig zu sein, aus (16) den Grenzwert $\tilde{m}(\infty)$ zu entnehmen. Wir verfolgen daher den Ansatz auch nur bis zu dem durch (13) gestellten geringeren Ziel. Zunächst liefert (15) für $x = X$

$$\int\limits_1^X \tilde{m}(t)\, d\log t \approx \frac{1}{1+\tau}\,\tilde{m}(X)\log X\,. \tag{17}$$

Wird dies für $x \geqq X$ in (15) eingesetzt, so folgt, da $\tilde{m}(x)$ monoton wächst,

$$\begin{aligned}\tilde{m}(x)\log x &\approx \frac{1}{1+\tau}\,\tilde{m}(X)\log X + \int\limits_X^x + \tau \int\limits_{\frac{x}{X}}^{X} \\ &\leqq \frac{1}{1+\tau}\,\tilde{m}(X)\log X + \tilde{m}(x)\left(\log\frac{x}{X} + \tau\log X\right).\end{aligned}$$

Das „Hauptglied" $\tilde{m}(x)\log x$ hebt sich aus dieser Ungleichung fort und es bleibt nach Kürzen durch $\log X$

$$(1-\tau^2)\,\tilde{m}(x) \gtrapprox \tilde{m}(X)$$

Läßt man hier $x \to \infty$ streben, so folgt wegen (14) das gewünschte Ergebnis. Die Berechtigung dieser Näherungsrechnung muß selbstverständlich die Durchführung erweisen.

Um von (13) zu (12) zu kommen, zerlegen wir die Primzahlmenge $\mathfrak{P}$ in eine große Anzahl r von Klassen $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_r$, auf denen $f(p)$ kleine Dichten τ_ϱ hat $\left(\text{z. B. alle } \tau_\varrho = \frac{\tau}{r}\right)$, das soll heißen

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathfrak{T}_\varrho}} f(p)\,\frac{\log p}{p} \sim \tau_\varrho \log x\,,$$

ordnen jeder Klasse eine Funktion

$$f_\varrho(n) = \begin{cases} f(n) & \textit{wenn} \quad p \mid n \rightarrow p \in \mathfrak{T}_\varrho \\ 0 & \textit{sonst}\,, \end{cases}$$

zu und wenden (13) auf die daraus gebildeten Ausdrücke $m_\varrho(x)$ und $\Pi_\varrho(x)$ an:

$$m_\varrho(x) = (1 + 2\,\Theta\tau_\varrho^2)\,\Pi_\varrho(x) \qquad (x \geqq x_0)\,. \tag{18}$$

Aus den $m_\varrho(x)$ erhält man $m(x)$ als Faltprodukt, z. B. für $r = 2$:

$$\begin{aligned} m(x) &= \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} = \sum_{n_1 n_2 \leq x} \frac{f_1(n_1)\, f_2(n_2)}{n_1 n_2} \\ &= \sum_{n_2 \leq x} m_1\left(\frac{x}{n_2}\right) \frac{f(n_2)}{n_2} \qquad (19) \\ &= \int_{1-}^{x} m_1\left(\frac{x}{t}\right) dm_2(t)\,. \end{aligned}$$

Um dieses Faltprodukt asymptotisch auswerten zu können (Hilfssatz 5), zeigen wir in Hilfssatz 4

$$m(y) \sim m(x)\left(\frac{\log y}{\log x}\right)^{\tau} \quad \text{für} \quad x \to \infty,\ x^{\varepsilon} \leq y \leq x\,. \tag{20}$$

Damit geht (19) über in

$$\begin{aligned} m(x) &\sim m_1(x)\, m_2(x) \int_1^x \left(\frac{\log \frac{x}{t}}{\log x}\right)^{\tau_1} d\left(\frac{\log t}{\log x}\right)^{\tau_2} \\ &= m_1(x)\, m_2(x) \int_0^1 (1-u)^{\tau_1}\, d u^{\tau_2} \quad \left(u = \frac{\log t}{\log x}\right) \\ &= m_1(x)\, m_2(x)\, \frac{\Gamma(1+\tau_1)\, \Gamma(1+\tau_2)}{\Gamma(1+\tau_1+\tau_2)}\,. \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für das r-fache Faltprodukt, wenn alle $\tau_\varrho = \frac{\tau}{r}$ genommen werden,

$$m(x) \sim \frac{\Gamma\left(1+\frac{\tau}{r}\right)^r}{\Gamma(1+\tau)}\, m_1(x) \ldots m_r(x)\,.$$

Wird hier (18) eingesetzt und $\prod\limits_{\varrho=1}^{r} \Pi_\varrho(x) = \Pi(x)$ beachtet, so folgt

$$m(x) \sim \left(1 + 2\Theta \frac{\tau^2}{r^2}\right)^r \frac{\Gamma\left(1+\frac{\tau}{r}\right)^r}{\Gamma(1+\tau)}\, \Pi(x)\,.$$

Für $r \to \infty$ folgt dann leicht die Behauptung (I2).

Der Beweis von (20) stützt sich auf die Beziehung (17), die wir mit x statt X jetzt so lesen

$$\int_1^x m(t)\, d\log t \sim \frac{1}{1+\tau}\, m(x) \log x \quad (x \to \infty)\,.$$

Im übrigen sei deswegen auf die Durchführung verwiesen.

Statt (20) könnte man schneller

$$\frac{\Pi(y)}{\Pi(x)} \sim \left(\frac{\log y}{\log x}\right)^{\tau} \quad (x \to \infty,\ x^{\varepsilon} \leq y \leq x)$$

zeigen:

$$\log \Pi(x) - \log \Pi(y) = \sum_{y \leq p \leq x} \log\left(1 + \frac{f(p)}{p} + \cdots\right)$$
$$= \sum_{y < p \leq x} \frac{f(p)}{p} + o(1)$$
$$= (\tau + o(1))\,[\log\log t]_y^x + o(1),$$
$$= \log\left(\frac{\log x}{\log y}\right)^\tau + o(1)\,.$$

Man muß die Faltung dann aber mit der gegenüber (20) schwächeren Abschätzung

$$m(y) \sim (1 + 2\Theta\tau^2)\left(\frac{\log y}{\log x}\right)^\tau \Pi(x)$$

durchführen

2.3.2. Zum Beweis von Satz 2 wird zuerst (**Hilfssatz 2***)

$$\text{(10*)} \qquad \sum_{n \leq x} f^*(n) = \frac{\tau^* x}{\log y} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} f^*(n) + o\left(\sum_{n \leq x} f(n)\right)$$

gezeigt, was in Behauptung und Beweis analog zu (10) ist; nur ist in allen Restgliedern f statt f^* zu schreiben. Das Restglied $o\left(\frac{x}{\log x} \sum_{n \leq x}' \frac{f(n)}{n}\right)$, das zunächst ebenfalls auftritt, läßt sich nach Satz 1 als $o\left(\sum_{n \leq x} f(n)\right)$ schreiben (unter anderem hierfür wird $\tau \neq 0$ gebraucht).

Als zweiter Schritt bleibt

$$\text{(21)} \qquad \sum_{n \leq x} \frac{f^*(n)}{n} = o\left(\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n}\right)$$

zu zeigen. Nach Voraussetzung (7) ist für genügend großes X

$$|\Pi^*(X)| \leq \varepsilon\, \Pi(X)\,.$$

Bildet man nun je zwei neue Funktionen f_1, f_1^*, f_2, f_2^*:

$$f_1^{(*)}(n) = \begin{cases} f^{(*)}(n) & \textit{wenn} \quad p \mid n \to p \leq X \\ 0 & \textit{sonst}\,, \end{cases}$$

$$f_2^{(*)}(n) = \begin{cases} f^{*}(n) & \textit{wenn} \quad p \mid n \to p > X \\ 0 & \textit{sonst}\,, \end{cases}$$

so ist $m^{(*)}(x)$ das Faltprodukt aus $m_1^{(*)}(x)$ und $m_2^{(*)}(x)$. Da $m_1^{(*)}(x)$ gegen $\Pi^{(*)}(X)$ strebt, ist $m_1^*(x)$ für große x klein gegen $m_1(x)$, und dies überträgt sich auf die Faltprodukte $m^*(x)$ und $m(x)$, womit (21) gezeigt ist. Die einzige Schwierigkeit besteht bei der Durchrechnung darin, für beliebiges festes Y

$$m_2\left(\frac{x}{Y}\right) \sim m_2(x) \quad \textit{für} \quad x \to \infty$$

zu zeigen. Dies folgt aber sofort durch Anwendung von (20) (Hilfssatz 4) auf $f_2(n)$.

2.4. Anwendungen

2.4.1. $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{P}$ *habe die Relativdichte* $\tau > 0$, *d. h.*

$$\sum_{\substack{p \le x \\ p \in \mathfrak{T}}} 1 \sim \tau \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty).$$

Eine multiplikative Funktion $f_0(n)$ werde durch

$$f_0(p) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p \in \mathfrak{T} \\ 0 & \phantom{\text{wenn }} p \notin \mathfrak{T}, \end{cases} \quad f_0(p^\nu) = 0 \quad \textit{oder} = 1 \ \textit{beliebig für} \ \nu = 2, 3, \ldots$$

definiert. Dann ist $T_0(x)$ die Anzahlfunktion von $\mathfrak{T}$ und $M_0(x)$ die der Menge

$$\mathfrak{M}_0 = \{n; f(n) = 1\}.$$

Die Voraussetzungen von Satz 1 sind erfüllt, und man bekommt mit der an den Satz angefügten Bemerkung

$$M_0(x) \sim P_0 \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} e^{\sum\limits_{p \le x, p \in \mathfrak{T}} \frac{1}{p}}.$$

Danach hängt das asymptotische Verhalten von $M_0(x)$ im wesentlichen von $\mathfrak{T}$ ab, und die willkürlich gelassenen Werte $f(p^\nu)$ beeinflussen nur die Konstante P_0. So erhält man durch Spezialisierung z. B. die Mengen

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{T}^\infty = \{n; p \mid n \curvearrowright p \in \mathfrak{T}\}$$

mit

$$P_1 = \prod_{p \in \mathfrak{T}} e^{-\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1},$$

$$\mathfrak{M}_2 = \{n; n \ k\text{-frei}, p \mid n \curvearrowright p \in \mathfrak{T}\}$$

mit

$$P_2 = P_1 \prod_{p \in \mathfrak{T}} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right).$$

Man sehe hierzu DELANGE [2], LANDAU [9, 10], WIRSING [17].

Analog lassen sich die im Falle $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{N}$ klassischen Summen

$$\sum_{\substack{n \le x \\ n \in \mathfrak{M}_0}} 2^{\omega(n)}, \quad \sum_{\substack{n \le x \\ n \in \mathfrak{M}_0}} \tau(n), \quad \sum_{\substack{n \le x \\ n \in \mathfrak{M}_0}} \frac{\varphi(n)}{n}$$

behandeln.

2.4.2. n durchlaufe $\mathfrak{M}_0$ (siehe 2.4.1.). Dann sind $\omega(n)$ und $\Omega(n)$ gleichverteilt mod m. Spezialfälle ($\mathfrak{T} = \mathfrak{P}$) siehe S. SELBERG [15], S. PILLAI [12], S. RAO [13]; allgemeiner DELANGE [2].

Es werde also

$$\mathfrak{M}_3 = \{n; n \in \mathfrak{M}_0, \omega(n) \equiv r \bmod m\}$$

untersucht.

Mit $|\varepsilon| = 1$, $\varepsilon \neq 1$ setze man $f^*(n) = f(n)\,\varepsilon^{\omega(n)}$. Wegen $f^*(p) = \varepsilon f(p)$ ist $\tau^* = \varepsilon\tau \neq \tau$ und nach der Bemerkung im Anschluß an Satz 2 folgt

$$\sum_{\substack{n \le x \\ n \in \mathfrak{M}_0}} \varepsilon^{\omega(n)} = o(M_0(x)). \tag{22}$$

ε durchlaufe nun die m-ten Einheitswurzeln. Mit der bekannten Formel

$$\sum_{\varepsilon^m=1} \varepsilon^s = \begin{cases} m & \text{wenn } s \equiv 0 \bmod m \\ 0 & \phantom{\text{wenn }} s \not\equiv 0 \bmod m \end{cases}$$

erhält man aus (22)

$$\begin{aligned} M_3(x) &= \sum_{\substack{n \le x \\ n \in \mathfrak{M}_3}} 1 = \frac{1}{m} \sum_{\substack{n \le x \\ n \in \mathfrak{M}_0}} \sum_{\varepsilon^m=1} \varepsilon^{\omega(n)-r} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\varepsilon^m=1} \varepsilon^{-r} \sum_{\substack{n \le x \\ n \in \mathfrak{M}_0}} \varepsilon^{\omega(n)} \\ &= \frac{1}{m} M_0(x) + o(M_0(x)), \end{aligned}$$

also

$$M_3(x) \sim \frac{1}{m} M_0(x).$$

Der Beweis für $\Omega(n)$ verläuft ganz genauso.

2.4.3. *Es sei*

$$\mathfrak{M}_4 = \{n;\, n \in \mathfrak{M}_0,\ \omega(n) \equiv r_1 \bmod m_1,\ \Omega(n) \equiv r_2 \bmod m_2\}$$

und $(m_1, m_2) = 1$. *Dann ist* $M_4(x) \sim \frac{1}{m_1 m_2} M_0(x)$, *d. h.* $\omega(n)$ *und* $\Omega(n)$ *sind simultan* $\bmod m_1$ *bzw.* $\bmod m_2$ *gleichverteilt.*

Beweis: Man setze $f^*(n) = \varepsilon_1^{\omega(n)} \varepsilon_2^{\Omega(n)} f_0(n)$ mit $\varepsilon_1^{m_1} = \varepsilon_2^{m_2} = 1$. Es wird $f^*(p) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f_0(p)$ also $\tau^* = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \tau$. Da $(m_1, m_2) = 1$ ist, wird $\tau^* = \tau$ nur für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Weiter wie oben.

(Bei DELANGE [2], Theorem 10, 20, 32 fehlt versehentlich die Bedingung $(m_1, m_2) = 1$.)

2.4.4. α sei reell irrational, n durchlaufe $\mathfrak{M}_0$; dann ist $\alpha\,\omega(n) \bmod 1$ gleichverteilt, ebenso $\alpha\,\Omega(n)$. (Für spezielle $\mathfrak{T}$ bei DELANGE [4].)

Zum Beweis genügt es, das WEYLsche Kriterium zu bestätigen:

$$\sum_{\substack{n \le x \\ n \in \mathfrak{M}_0}} e^{2\pi i \varrho \alpha \omega(n)} = o(M_0(x)) \quad \textit{für} \quad x \to \infty,\ \varrho = 1, 2, \ldots.$$

Das ist aber mit $\varepsilon = e^{2\pi i \varrho \alpha}$ in (22) enthalten.

2.4.5. Entsprechend erhält man folgendes Ergebnis von ERDÖS [7] (siehe auch DELANGE [3]): $\psi(n)$ sei additiv, $\psi(p) = o(1)$ $(p \to \infty,\ p \in \mathfrak{P})$, $\sum \frac{1}{p} \psi(p)^2 = \infty$. Dann ist $\psi(n)$ gleichverteilt $\bmod 1$. Zum Beweis betrachte man $f(n) = 1$, $f^*(n) = e^{2\pi i \varrho \psi(n)}$. Da $1 - \cos(2\pi\varrho\psi(p)) \geqq \text{const}\, \psi(p)^2$ ist für große p, divergiert $\sum \frac{1}{p}(f(p) - R f^*(p)) = \sum \frac{1}{p}[1 - \cos(2\pi\varrho\psi(p))]$. Also ist $\sum_{n \le x} f^*(n) = o(x)$ für $\varrho = 1, 2, \ldots$.

2.4.6. Wie muß $\mathfrak{T}$ beschaffen sein, damit $\mathfrak{M}_0$ auf die primen Restklassen $\bmod m$ gleichverteilt ist?

Es sei $(r, m) = 1$ und

$$\mathfrak{M}_5 = \{n;\, n \in \mathfrak{M}_0,\, n \equiv r \bmod m\}\,,$$

$\mathfrak{T}$ habe wieder die Relativdichte τ.

Man wird natürlich erwarten, daß es hinreicht, $\mathfrak{T}$ mod$m$ gleichverteilt anzunehmen. Tatsächlich genügen schwächere Voraussetzungen, wie wir zeigen werden.

$\mathfrak{G}_m$ sei die Gruppe der primen Restklassen mod$m$, $\mathfrak{R}$ sei die Menge der Restklassen $\hat{r}$ mod m, für die

$$\sum_{\substack{p \in \mathfrak{T} \\ p \equiv r \bmod m}} \frac{1}{p} = \infty$$

ist, $(\mathfrak{R})$ die von $\mathfrak{R}$ erzeugte Untergruppe in $\mathfrak{G}_m$. Dann gilt der folgende **Satz**:
Existiert für jede prime Restklasse die Dichte

$$\tau_r = \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} \sum_{\substack{p \equiv r \bmod m \\ p \leq x,\, p \in \mathfrak{T}}} 1$$

und ist $(\mathfrak{R}) = \mathfrak{G}_m$, *so ist für jede prime Restklasse* $\hat{r}$

$$M_5(x) = \sum_{\substack{n \equiv r \bmod m \\ n \leq x,\, n \in \mathfrak{M}_0}} 1 \sim \frac{M_0(x)}{\varphi(m)} \prod_{p \mid m} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \cdots\right)^{-1};$$

$\mathfrak{M}_0$ *hat also auf allen primen Restklassen die gleiche Dichte.*

Beweis: χ durchlaufe die Charaktere mod$m$. Für $(n, m) \neq 1$ sei $\chi(n) = 0$ gesetzt. $1(n)$ sei der Hauptcharakter. Wird Satz 1 auf $f_1(n) = 1(n)\, f_0(n)$ angewendet, so folgt sofort

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathfrak{M}_0}} 1(n) \sim M_0(x) \prod_{p \mid m} \left(1 + \frac{f_0(p)}{p} + \frac{f_0(p^2)}{p^2} + \cdots\right).$$

Nun sei $\chi \neq 1$ und $f^*(n) = f_0(n)\, \chi(n)$. Die Dichte

$$\tau_\chi = \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} \sum_{p \leq x} f^*(p) = \lim_{x \to \infty} \sum_{r \bmod m} \chi(r) \frac{\log x}{x} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv r \bmod m}} f_0(p) = \sum_{r \bmod m} \chi(r)\, \tau_r$$

existiert. In $\mathfrak{R}$ gibt es eine Restklasse $\hat{r}_0$, für die $\chi(r_0) \neq 1$ ist. Anderenfalls wäre $\chi(r) = 1$ auch für alle $\hat{r} \in (\mathfrak{R}) = \mathfrak{G}_m$, also $\chi = 1$ entgegen der Voraussetzung. Daraus folgt

$$\sum_p \frac{1}{p} (f_0(p) - R f^*(p)) \geq \sum_{\substack{p \in \mathfrak{T} \\ p \equiv r_0 \bmod m}} \frac{1}{p} (1 - R\chi(r_0)) = \infty\,.$$

Damit ist Satz 2 anwendbar und liefert

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathfrak{M}_0}} \chi(n) = o(M_0(x))\,.$$

Nach der bekannten Formel

$$\sum_\chi \chi^{-1}(r)\, \chi(n) = \begin{cases} \varphi(m) & \\ 0 & \end{cases} \text{wenn} \quad \begin{matrix} n \equiv r \bmod m \\ n \not\equiv r \bmod m\,, \end{matrix}$$

erhält man nun die Behauptung:

$$\sum_{\substack{n \leq x, n \in \mathfrak{M}_0 \\ n \equiv r \bmod m}} 1 = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} \chi^{-1}(r) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathfrak{M}_0}} \chi(n)$$

$$= \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathfrak{M}_0}} 1(n) + o(M_0(x))$$

$$\sim \frac{M_0(x)}{\varphi(m)} \prod_{p \mid m} \left(1 + \frac{f_0(p)}{p} + \frac{f_0(p^2)}{p^2} + \cdots\right).$$

2.4.7. Es fällt leicht, weitere Aufgaben zu stellen, die sich in dieser Weise lösen lassen. Beispiele sind bei OSTMANN [11] in den Fußnoten S. 23, 45, 66 zu finden. Diese Sätze waren vom Verfasser ursprünglich mit Hilfe des Taubersatzes von IKEHARA bewiesen worden. Die vorgesehene Veröffentlichung erübrigte sich dann durch die Arbeiten von DELANGE [1, 2], der eine große Anzahl derartiger Ergebnisse mit der genannten Methode ausführlich beweist. Will man die Sätze auf dem hier ausgeführten Wege gewinnen, so hat man den Primzahlsatz für arithmetische Progressionen und die Beziehung

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv r \bmod m}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi(m)} \log\log x + \text{const} + o(1) \ (x \to \infty, (r, m) = 1)$$

vorauszusetzen, die beide elementar zu beweisen sind[3]).

2.5. Erweiterungen

2.5.1. Eine Mittelstellung zwischen den Sätzen 1 und 2 nimmt der folgende Satz ein:

Satz 3: *f und f^* mögen die Bedingungen von Satz 1 und Satz 2 erfüllen, ausgenommen (7). Statt dessen gelte*

(23) $$|\Pi^*(x)| \geq \gamma_3 \Pi(x), \quad \gamma_3 > 0.$$

Dann ist

$$M^*(x) \sim \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} \Pi^*(x).$$

Nach der Bemerkung bei Satz 2 ist hier $\tau = \tau^*$.

Diesen Satz braucht man z. B., wenn man in Anwendung 2.4.6 auch den Fall $(\mathfrak{R}) \neq \mathfrak{S}_m$ betrachten möchte.

Zum Beweis kann man, außer bei Hilfssatz 3, dem Beweis von Satz 1 folgen und dabei in allen Restgliedern die ungesternten Größen benutzen. Der Beweis von Hilfssatz 3 läßt sich nicht in dieser Weise übertragen, weil er die Monotonie von $m(x)$ benutzt. Man erhält das entsprechende Resultat aber schnell so: Denkt man sich $\Pi^*(x)$ und $\Pi(x)$ ausmultipliziert, so sieht man, daß

$$|\Pi^*(x) - m^*(x)| \leq \Pi(x) - m(x)$$
$$= 2\Theta\tau^2\Pi(x) \qquad (0 < \tau \leq \tau_0, x \geq x_0)$$

---

[3]) SHAPIRO [16] zeigt elementar $\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv r}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\varphi(m)} \log x + O(1)$.

ist, also

$$m^*(x) = \Pi^*(x) + 2\Theta\tau^2\Pi(x) .$$

Auf die geschilderte Weise erhält man

$$m^*(x) = \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(1+\tau)}\left(\Pi^*(x) + o(\Pi(x))\right) \quad (\tau < 0)$$

und

$$M^*(x) = \frac{\tau x}{\log x}\left(m^*(x) + o(m(x))\right) .$$

Nach (23) ist nun $o(\Pi(x))$ auch $o(|\Pi^*(x)|)$, also

$$m^*(x) \sim \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(1+\tau)}\Pi^*(x) .$$

Vergleicht man dies mit Hilfssatz 6, so folgt für große x

$$|m^*(x)| \geqq (\gamma_3 - \varepsilon)\, m(x) ,$$

so daß man für $o(m(x))$ auch $o(|m^*(x)|)$ schreiben darf. Man erhält also

$$M^*(x) \sim \frac{\tau x}{\log x} m^*(x) \sim \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(\tau)}\frac{x}{\log x}\Pi^*(x) .$$

2.5.2. *Läßt man n statt der natürlichen Zahlen die Zahlen der Form*

$$\Pi p^{\nu_p} \quad \textit{mit} \quad \nu_p = 0, 1, 1 + \frac{1}{k}, 1 + \frac{2}{k} + \cdots$$

durchlaufen (k fest) so gelten für multiplikative Funktionen über diesem Bereich die Sätze ganz entsprechend. Abgesehen von Trivialitäten $\left(\nu \geqq 1 + \frac{1}{k} \textit{ statt } \nu \geqq 2\right)$ *können die Beweise wörtlich übernommen werden.*

Daraus läßt sich z. B. die Anzahlfunktion der Zahlenmenge asymptotisch bestimmen, deren Elemente nur Primteiler aus einer Menge $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{P}$ der Dichte τ enthalten und jeden Primteiler mindestens k-fach. Diese Abschätzung führt Hornfeck [8] auf dem zu [17] parallelen Wege durch.

2.5.3. Schließlich kann man von den zahlentheoretischen Funktionen zu Funktionen einer reellen Veränderlichen übergehen und als Argumentbereich die Zahlen $x \geqq 1$ zulassen.

Satz 4: *$T(x)$ sei monoton wachsend, $T(x) = 0$ für $x < 1$, und*

$$T(x) \sim \frac{\tau x}{\log x} \quad (\tau \neq 0,\ x \to \infty) .$$

$M(x)$ sei durch

$$\int_0^\infty t^{-s}\, dM(t) = e^{\int_0^\infty t^{-s} dT(t)} \quad (s < 1)$$

und $M(x+) = M(x)$ definiert. Dann ist für $x \to \infty$

$$M(x) \sim \frac{\tau x}{\log x}\int_0^x \frac{1}{t}\, dM(t) \sim \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(\tau)}\frac{x}{\log x} e^{\int_0^x t^{-1} dT(t)}$$

Die Laplace-Transformation kann dabei rein formal aufgefaßt werden: Man setze $T(x) = T_1(x)$,

$$T_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 1 \\ 1 & \phantom{\text{für}} \quad x \geqq 1, \end{cases}$$

$$T_{n+1}(x) = \int_0^\infty T_n\left(\frac{x}{t}\right) d\,T_1(t) = \int_{1-}^\infty T_n\left(\frac{x}{t}\right) d\,T_1(t),$$

$$M(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} T_n(x).$$

Die Integrale können an höchstens abzählbar vielen Stellen x durch gemeinsame Unstetigkeitsstellen von Integrand und Integrator sinnlos werden (alle $T_n(x)$ wachsen monoton!). An diesen Stellen soll $T_{n+1}(x) = T_{n+1}(x+)$ sein. Da $\left(\int_0^\infty t^{-s}\,d\,T(t)\right)^n = \int_0^\infty t^{-s}\,d\,T_n(t)$ ist ($s > 1$, $n = 0, 1, \ldots$), stimmt diese Definition von $M(x)$ mit der zuerst gegebenen überein.

Der Beweis ist wieder parallel dem von Satz 1, nur einfacher, weil der störende Einfluß der Primzahlpotenzen fehlt. Statt der Klassenzerlegung bei Hilfssatz 5 und 6 betrachtet man hier einfach die Funktion $\frac{1}{r}\,T(t)$ mit der Dichte $\frac{\tau}{r}$. Das Analogon zu (11) ist hier die Identität

$$\int_0^x \log t\, d\,M(t) = \int_0^x M\left(\frac{x}{t}\right) d\vartheta(t)$$

mit

$$\vartheta(x) = \int_0^x \log t\, d\,T(t).$$

Ebenso läßt sich ein Seitenstück zu Satz 2 aufstellen; die Bedingungen für $T^*(x)$ *sind dabei* $T^*(x) \sim \frac{\tau^* x}{\log x}$, $|T^*(x_1) - T^*(x_2)| \leqq |T(x_1) - T(x_2)|$, $\int_1^\infty t^{-2}(T(t) - R\,T^*(t))\,dt = \infty$, *die Behauptung:* $M^*(x) = o(M(x))$.

2.5.4. *Wir betrachten wieder zahlentheoretische Funktionen* $f(n)$. *Hat* $T(x)$ *allgemeiner als bisher die Größenordnung*

$$T(x) \sim \tau \frac{x^\alpha}{\alpha \log x} \quad (\alpha > 0)$$

(bzw. $\vartheta(x) \sim \tau x^\alpha$*), so führt die Transformation* $f_1(n) = n^{1-\alpha} f(n)$ *auf die alte Größenordnung zurück:* Partielle Integration liefert

$$T_1(x) \sim \tau \frac{x}{\log x}.$$

War $f(p^\nu) \leqq \gamma_1 \gamma_2^\nu p^{\nu(\alpha-1)}$ für $\nu \geqq 2$, $\gamma_2 < 2$, so ist Satz 1 auf $f_1(n)$ anwendbar und liefert

$$M_1(x) \sim \frac{\tau x}{\log x} m_1(x) \sim \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\log x} P_1 e^{\int_1^x T_1(t)\,t^{-2}\,dt}$$

Entnimmt man daraus zunächst

$$M_1(t) = O\left(\frac{t}{\log t} m_1(x)\right) \quad \text{für} \quad t \leq x,$$

$$M_1(t) \sim \frac{t}{x} M_1(x) \quad \text{für} \quad \frac{x}{\log x} \leq t \leq x$$

(gleichmäßig in t), so kann man leicht zurücktransformieren

$$\begin{aligned} M(x) &= x^{\alpha-1} M_1(x) + (1-\alpha)\int_1^x M_1(t)\, t^{\alpha-2}\, dt \\ &= x^{\alpha-1} M_1(x) + \int_1^{\frac{x}{\log x}} O\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\log t} m_1(x)\right) dt + (1-\alpha+o(1))\frac{M_1(x)}{x} \int_{\frac{x}{\log x}}^{x} t^{\alpha-1}\, dt \\ &= x^{\alpha-1} M_1(x) + O\left(\frac{x^\alpha}{\log^{1+\alpha} x} m_1(x)\right) + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} + o(1)\right) x^{\alpha-1} M_1(x) \\ &\sim \frac{1}{\alpha} x^{\alpha-1} M_1(x) \\ &\sim \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x^\alpha}{\alpha \log x} P_1 e^{1-\int_1^x t^{-1}\, dT_1(t)}, \end{aligned}$$

$$M(x) \sim \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x^\alpha}{\alpha \log x} \prod_{p \leq x}\left(1 + \frac{f(p)}{p^\alpha} + \frac{f(p^2)}{p^{2\alpha}} + \cdots\right).$$

Zum gleichen Ziel kommt man mit der Substitution $T(x) = T_2(x^\alpha)$, wobei man $f(n) = f_2(n^\alpha)$ als Funktion über dem Bereich der n^α, $n = 1, 2, \ldots$ betrachtet.

2.5.5. *Auch auf den Fall*

$$T(x) \sim \sigma \frac{x}{\log^\beta x}, \; \beta > 1, \quad x \to \infty$$

läßt sich die Methode mit einigen Modifikationen anwenden.

Die Hilfssätze 3—6 erübrigen sich hier, weil $\int_1^\infty T(t)\, t^{-2}\, dt$ konvergiert. Unter geeigneten Bedingungen über $f(p^\nu)$ ($\nu \geq 2$), etwa (3), folgt dann, daß die Grenzwerte $\Pi(\infty) = m(\infty)$ existieren. Das Analogon von Hilfssatz 2 lautet hier

$$M(x) \sim \frac{\sigma x}{\log^\beta x} m(\infty). \tag{24}$$

Die Ergebnisse für beide Größenordnungen, $\beta = 1$ und ≥ 1, lassen sich, wie man sieht, in einer Formel zusammenfassen:

$$M(x) \sim T(x)\, m(x) \sim T(x)\, \Pi(x) \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(1+\tau)}. \tag{25}$$

(Für $\beta > 1$ ist $\tau = 0$!)

Der **Beweis** von (24) gelingt zunächst nicht parallel zu dem von Hilfssatz 2. Wenn man aber vorweg

$$M(x) = O\left(\frac{x}{\log^\beta x}\right) \tag{26}$$

zeigt, fallen diese Schwierigkeiten weg, indem sich

$$\sum_{x^\delta < n \leqq x} f(n)\, \vartheta\left(\frac{x}{n}\right) \quad (0 < \delta < 1)$$

als Restglied erweist.

Man setze, um zu (26) zu kommen,

$$U_k(x) = \sum_{\substack{p_1^{\nu_1}, \ldots, p_k^{\nu_k} \\ p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k} \leqq x}} f(p_1^{\nu_1}) \ldots f(p_k^{\nu_k}) .$$

Nach Voraussetzung ist mit einer geeigneten Konstanten K

$$U_1(x) \leqq \frac{K x}{(1 + \log x)^\beta}$$

für alle $x \geqq 1$. Wegen

$$U_k(x) = \sum_{p^\nu \leqq x} U_{k-1}\left(\frac{x}{p^\nu}\right) f(p^\nu)$$

läßt sich $U_k(x)$ durch vollständige Induktion abschätzen; man erhält dabei

$$U_k(x) \leqq \frac{K_1^k x}{(1 + \log x)^\beta} \quad (x \geqq 1),$$

mit einer neuen Konstanten K_1. Da jedes Potenzprodukt von k verschiedenen Primzahlen in U_k genau $k!$ mal gezählt ist, wird nun

$$\begin{aligned} M(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n \leqq x \\ \omega(n) = k}} f(n) \\ &\leqq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} U_k(x) \\ &\leqq 1 + \frac{x}{(1 + \log x)^\beta} \sum_1^\infty \frac{1}{k!} K_1^k \\ &= O\left(\frac{x}{\log^\beta x}\right). \end{aligned}$$

2.6. Es sollen noch einige Fragen formuliert werden, die vielleicht einer weiteren Untersuchung wert sind.

2.6.1. Was läßt sich für

$$T(x) \sim \frac{x}{\log^\beta x} \quad \text{mit} \quad \beta < 1$$

über $M(x)$ und $m(x)$ aussagen? Heuristische Rechnungen lassen

$$\log m(x) \sim (\log x)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}}$$

erwarten. Möglicherweise braucht man in diesem Falle ganz andere Methoden.

2.6.2. Die Relation (25)

$$M(x) \sim T(x)\, m(x),$$

die sich für $\beta = 1$ und $\beta > 1$ ergeben hat, könnte wohl auch für $\beta < 1$ noch gelten; vielleicht sogar unabhängig von speziellen Vergleichsfunktionen, wenn man $T(x)$ geeignete Schwankungsbedingungen auferlegt.

2.6.3. Da für gegebene Funktionen $f(n)$ die Frage schwierig zu sein pflegt, ob

$$\tau = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} T(x)$$

existiert (Primzahlsatz!), wäre es von Interesse, diese Voraussetzung bei Satz 1 und Satz 2 abzuschwächen. Speziell: Ist Satz 1 schon richtig, wenn statt (4) nur

$$\sum_{p\leqq x} \frac{f(p)}{p} \log p = (\tau + o(1)) \log x \tag{27}$$

verlangt wird? Oder welche Zusatzbedingungen braucht man? Da die Hilfssätze 3—6 tatsächlich nur (27) voraussetzen, bleibt zu untersuchen, ob sich Hilfssatz 2 schon mit (27) beweisen läßt.

Entsprechende Fragen betreffen τ^*; um so mehr, als τ^* in den Behauptungen gar nicht auftritt. Für $f(n) = 1$, $f^*(n) = n^i$ ist andererseits $\tau = 1$ und $\sum_{p\leqq x} f^*(p) \frac{\log p}{p} = O(1) = o(\log x)$, ohne daß $M^*(x) = o(M(x))$ wäre.

3.1. Beweis von Satz 1

Für das folgende sei vorausgesetzt: $f(n) \geqq 0$, (3) *und* (4); *für die Hilfssätze* 3—6 *sowie* (32), *was für Hilfssatz* 3 *gebraucht wird, setzen wir statt* (4) *nur* (27) *voraus.*

(27) folgt aus (4):

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqq x} f(p)\frac{\log p}{p} &= \int_1^x \frac{\log t}{t}\, dT(t)\\ &= \frac{\log x}{x} T(x) + \int_1^x T(t)\, \frac{\log t - 1}{t^2}\, dt\\ &= O(1) + \int_1^x (\tau + o(1))\, \frac{dt}{t}\\ &= (\tau + o(1)) \log x\,.\end{aligned}$$

Ebenso sieht man, daß

$$\vartheta(x) = (\tau + o(1))x$$

mit (4) gleichwertig ist.

Hilfssatz 1: *Es gelten folgende Abschätzungen:*

$$\sum_{\substack{p^\nu\leqq x\\ \nu\geqq 2,\, p}} f(p^\nu) \log p^\nu = o(x)\,, \tag{28}$$

$$\sum_{\substack{p^{\nu+\mu}\leqq x\\ \nu\geqq 1,\, \mu\geqq 1,\, p}} f(p^\nu)\, f(p^\mu) \log p^\mu = o(x)\,, \tag{29}$$

$$\sum_p \frac{f(p)^2}{p^2} < \infty\,, \tag{30}$$

$$\sum_{\substack{\nu\geqq 2\\ p}} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \log p^\nu < \infty\,, \tag{31}$$

$$\sum_{\substack{p\leqq x\\ \nu\geqq 1,\, \mu\geqq 1}} \frac{f(p^\nu)\, f(p^\mu)}{p^{\nu+\mu}} \log p^\mu = o(\log x)\,. \tag{32}$$

Beweise: Es ist

$$\sum_{p^{\nu+\mu}\le x} f(p^\nu)\, f(p^\mu) \log p^\mu \le \log x \sum_{p^{\nu+\mu}\le x} f(p^\nu)\, f(p^\mu)$$
$$= \log x \left(\sum_{\nu=\mu=1} + \sum_{\nu=1,\,\mu\ge 2} + \sum_{\nu\ge 2,\,\mu\ge 2} \right).$$

Davon ist

$$\sum_{\nu=\mu=1} = \sum_{p^2\le x} f(p)^2 \le \Big(\sum_{p^2\le x} f(p)\Big)^2 = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right),$$

$$\sum_{\nu=1,\,\mu\ge 2} \le \sum_{p^2\le x} f(p) \sum_{\mu\le\frac{\log x}{\log p}} \gamma_1 \gamma_2^\mu$$

$$= O(\log x) \sum_{p^2\le x} f(p)\, \gamma_2^{\frac{\log x}{\log p}}$$

$$= O(\log x) \sum_{p^2\le x} f(p)\, x^{\frac{\log\gamma_2}{\log p}}, \tag{33}$$

$$\sum_{\nu\ge 2,\,\mu\ge 2} \le \sum_{p^4\le x} \sum_{\nu+\mu\le\frac{\log x}{\log p}} \gamma_1^2 \gamma_2^{\nu+\mu}$$

$$= O(\log^2 x) \sum_{p^4\le x} \gamma_2^{\frac{\log x}{\log p}}$$

$$= O(\log^2 x) \sum_{p^4\le x} x^{\frac{\log\gamma_2}{\log p}}. \tag{34}$$

Die Summen (33) und (34) sind $O(x^\alpha)$ mit $\alpha < 1$. Für $p \ge \gamma_2^2$ ist nämlich $\frac{\log\gamma_2}{\log p} \le \frac{1}{2}$, also

$$\sum_{\gamma_2^2\le p\le x^{\frac{1}{2}}} f(p)\, x^{\frac{\log\gamma_2}{\log p}} \le x^{\frac{1}{2}} \sum_{p\le x^{\frac{1}{2}}} f(p) = O\left(x^{\frac{5}{6}}\right),$$

$$\sum_{\gamma_2^2\le p\le x^{\frac{1}{4}}} x^{\frac{\log\gamma_2}{\log p}} \le x^{\frac{3}{4}}.$$

In den restlichen Summanden $p < \gamma_2^2$ sind wegen $\gamma_2 < 2 \le p$ die Exponenten kleiner als 1. Insgesamt folgt also (29). (28) erhält man ebenso.

Zu (30): Aus (4) folgt

$$f(p) = o\left(\frac{p}{\log p}\right).$$

Damit wird

$$\sum_p \frac{f(p)^2}{p} = \sum_p f(p)\, o\left(\frac{1}{p\log p}\right) = O\left(\int_{2-}^{\infty} \frac{1}{t\log t}\, dT(t)\right).$$

Dieses Integral konvergiert, wie man durch partielle Integration sieht.

Aus (27) kann man offenbar nur $f(p) = o(p)$ schließen. Das genügt aber, um

$$\sum_{p \leq x} \frac{f(p)^2}{p^2} \log p = \sum_{p \leq x} o\left(\frac{f(p)}{p} \log p\right) = o(\log x)$$

zu beweisen. Das ist das Hauptglied von (32). Der Rest besteht aus

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq x \\ \nu = 1, \mu \geqq 2}} &\leqq \sum_p \frac{f(p)}{p} \log p \sum_{\mu \geqq 2} \mu \gamma_1 \left(\frac{\gamma_2}{p}\right)^\mu \\ &= \sum_p O\left(\frac{f(p)}{p^2} \log p\right) = \sum_p o\left(\frac{\log p}{p^2}\right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq x \\ \nu \geqq 2, \mu \geqq 2}} &\leqq \sum_p \log p \sum_{\nu \geqq 2, \mu \geqq 2} \mu \gamma_1^2 \left(\frac{\gamma_2}{p}\right)^{\nu + \mu} \\ &= \sum_p O\left(\frac{\log p}{p^4}\right) \\ &< \infty . \end{aligned}$$

(31) folgt ebenso.

Hilfssatz 2: *Für $x \to \infty$ ist*

$$M(x) = (\tau + o(1)) \frac{x}{\log x} m(x) .$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} l(x) &= \sum_{n \leq x} f(n) \log n = \sum_{n \leq x} f(n) \sum_{\substack{p, \nu \\ p^\nu \mid n, p^{\nu+1} \nmid n}} \log p^\nu \\ &= \sum_{\substack{p, \nu, n \\ n \leq x, n = p^\nu n' \\ p \nmid n'}} f(n) \log p^\nu = \sum_{\substack{p, \nu, n \\ p^\nu n' \leq x \\ p \nmid n'}} f(n') f(p^\nu) \log p^\nu \\ &= \sum_{p^\nu n \leq x} f(n) f(p^\nu) \log p^\nu - \sum_{\substack{p^\nu n \leq x \\ p \mid n}} f(n) f(p^\nu) \log p^\nu \qquad (35) \\ &= \sum_{p^\nu n \leq x} f(n) f(p^\nu) \log p^\nu - \sum_{\substack{p^{\nu+\mu} n' \leq x \\ p \nmid n', \mu \geqq 1}} f(n') f(p^\nu) f(p^\mu) \log p^\nu , \end{aligned}$$

$$l(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \left(\sum_{p^\nu \leq \frac{x}{n}} f(p^\nu) \log p^\nu - \sum_{\substack{p^{\nu+\mu} \leq \frac{x}{n} \\ p \nmid n, \mu \geqq 1, \nu \geqq 1}} f(p^\nu) f(p^\mu) \log p^\nu \right) .$$

Der erste Anteil in der Klammer ist

$$\vartheta\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{\substack{p^\nu \leq \frac{x}{n} \\ \nu \geqq 2}} f(p^\nu) \log p^\nu .$$

also wegen (28)

$$\tau \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right) \quad \left(\frac{x}{n} \to \infty\right),$$

während der zweite Anteil nach (29) ein $o\left(\frac{x}{n}\right)$ ist. Wir haben damit

$$\begin{aligned} l(x) &= \sum_{n\leq x} f(n)\left(\frac{\tau x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)\right) \\ &= \tau x\, m(x) + \sum_{n\leq x} f(n)\, o\left(\frac{x}{n}\right). \end{aligned}$$

$h(x)$ sei eine beliebige Funktion, die für $x \to \infty$ gegen ∞ strebt. Dann wird

$$\begin{aligned} l(x) - \tau x\, m(x) &= \sum_{1\leq\frac{x}{n}\leq h(x)} f(n)\, o\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{\frac{x}{n} > h(x)} f(n)\, o\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= O\left(\sum_{1\leq\frac{x}{n}\leq h} f(n)\frac{x}{n}\right) + o\left(x \sum_{n\leq\frac{x}{h}} \frac{f(n)}{n}\right) \\ &= O(h(x)\, M(x)) + o(x\, m(x)). \end{aligned}$$

Da offensichtlich $M(x) = o(l(x))$ ist, bleibt für ein genügend schwach wachsendes $h(x)$ auch noch $h(x)\cdot M(x) = o(l(x))$, so daß wir

$$l(x)\,(1 + o(1)) = (\tau + o(1))\, x\, m(x)$$

bzw.

$$l(x) = (\tau + o(1))\, x\, m(x)$$

erhalten. Die Behauptung folgt nun durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_{2-}^{x} \frac{1}{\log t}\, dl(t) = \frac{l(x)}{\log x} + \int_{2}^{x} \frac{l(t)}{t\log^2 t}\, dt \\ &= (\tau + o(1))\frac{x}{\log x}\, m(x) + O\left(\int_{2}^{x} \frac{m(x)}{\log^2 t}\, dt\right) \\ &= (\tau + o(1))\frac{x}{\log x}\, m(x) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\, m(x)\right) \\ &= (\tau + o(1))\frac{x}{\log x}\, m(x). \end{aligned}$$

Hilfssatz 3: *Wenn in* (4) *bzw.* (27) $0 < \tau \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ *ist, so gibt es ein* x_0, *so daß*

$$(1-2\tau^2)\,\Pi(x) \leq m(x) \leq \Pi(x) \quad \textit{für} \quad x \geq x_0$$

ist. Ist $\tau = 0$, *so gilt für* $x \to \infty$

$$m(x) \sim \Pi(x).$$

Beweis: $X \geq 1$ sei zunächst beliebig (groß). Es werde

$$\bar{f}(p^\nu) = \begin{cases} f(p^\nu) & \textit{für} \quad p \leq X \\ 0 & \quad p > X \end{cases}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

gesetzt, womit eine multiplikative Funktion $\bar{f}(n)$ definiert ist. Nach (27) ist zu beliebigem $\varepsilon > 0$

$$\sum_{p \leq x} f(p) \frac{\log p}{p} = (\tau + \varepsilon\Theta) \log x\,, \quad \textit{wenn} \quad x \geq x_1(\varepsilon)\,.$$

Es sei $X \geq x_1(\varepsilon)$, dann folgt

$$\sum_{p \leq x} \bar{f}(p) \frac{\log p}{p} = \begin{cases} (\tau + \varepsilon\Theta) \log x \\ (\tau + \varepsilon\Theta) \log X \end{cases} \textit{für} \quad \begin{matrix} x_1 \leq x \leq X \\ x \geq X\,. \end{matrix} \tag{36}$$

Offenbar ist

$$m(X) = \bar{m}(X) \leq \Pi(X) = \bar{m}(\infty)\,. \tag{37}$$

In die Identität (35) setzen wir $\frac{\bar{f}(n)}{n}$ für $f(n)$ und erhalten

$$\sum_{n \leq x} \frac{\bar{f}(n)}{n} \log n = \sum_{n \leq x} \frac{\bar{f}(n)}{n} \left(\sum_{p^\nu \leq \frac{x}{n}} \bar{f}(p^\nu) \frac{\log p^\nu}{p^\nu} - \sum_{\substack{p^{\nu+\mu} \leq \frac{x}{n} \\ p \nmid n,\, \mu \geq 1,\, \nu \geq 1}} \frac{\bar{f}(p^\nu)\, \bar{f}(p^\mu)}{p^{\nu+\mu}} \log p^\nu \right)$$
$$= S + S_1 - S_2\,,$$

worin

$$S = \sum_{np \leq x} \bar{f}(n)\, \bar{f}(p) \frac{\log p}{np}\,,$$
$$S_1 = \sum_{\substack{p^\nu n \leq x \\ \nu \geq 2}} \bar{f}(n)\, \bar{f}(p^\nu) \frac{\log p^\nu}{np^\nu}\,,$$
$$S_2 = \sum_{\substack{p^{\nu+\mu} n \leq x \\ \nu,\mu \geq 1,\, p \nmid n}} \bar{f}(n)\, \bar{f}(p^\nu)\, \bar{f}(p^\mu) \frac{\log p^\nu}{n p^{\nu+\mu}}$$

sind.

Nun ist

$$S_1 \leq \sum_{n \leq x} \frac{\bar{f}(n)}{n} \sum_{\substack{\nu \geq 2 \\ p}} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \log p^\nu,$$
$$S_2 \leq \sum_{n \leq x} \frac{\bar{f}(n)}{n} \sum_{\substack{p \leq X \\ \nu \geq 1,\, \mu \geq 1}} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \frac{f(p^\mu)}{p^\mu} \log p^\nu.$$

Wegen (31) und (32) folgt, falls $X \geq x_2(\varepsilon)$ genommen wird,

$$|S_1 - S_2| \leq \varepsilon\, \bar{m}(x) \log X\,.$$

Unter Verwendung von (36) folgt weiter

$$S = \sum_{n \leq x} \frac{\bar{f}(n)}{n} \sum_{p \leq \frac{x}{n}} \bar{f}(p) \frac{\log p}{p}$$
$$= \sum_{n \leq \frac{x}{X}} \frac{\bar{f}(n)}{n} (\tau + \varepsilon\Theta) \log X + \sum_{\frac{x}{X} < n \leq x} \frac{\bar{f}(n)}{n} (\tau + \varepsilon\Theta) \log \frac{x}{n}$$
$$+ \sum_{\frac{x}{x_1} < n \leq x} \frac{f(n)}{n} \left(\sum_{p \leq \frac{x}{n}} \bar{f}(p) \frac{\log p}{p} - (\tau + \varepsilon\Theta) \log \frac{x}{n} \right).$$

Wegen

$$\left|\sum_{p\leq\frac{x}{n}} \bar{f}(p)\frac{\log p}{p} - (\tau+\varepsilon\Theta)\log\frac{x}{n}\right|$$
$$\leq \sum_{p\leq x_1} \bar{f}(p)\frac{\log p}{p} + (\tau+\varepsilon)\log x_1$$
$$= K(\varepsilon) \quad \textit{für} \quad \frac{x}{x_1} < n \leq x$$

ist also

$$S = (\tau+\varepsilon\Theta)\left[\bar{m}\left(\frac{x}{X}\right)\log X + \bar{m}(x)\log x - \bar{m}\left(\frac{x}{X}\right)\log x\right.$$
$$\left. - \sum_{\frac{x}{X}<n\leq x} \bar{f}(n)\frac{\log n}{n}\right] + \Theta K\bar{m}(x).$$

Insgesamt haben wir, wenn wir noch $\log X \geq \frac{1}{\varepsilon}K(\varepsilon)$ annehmen,

$$\sum_{n\leq x}\bar{f}(n)\frac{\log n}{n} = (\tau+\varepsilon\Theta)\left[\bar{m}(x)\log x - \bar{m}\left(\frac{x}{X}\right)\log\frac{x}{X}\right.$$
$$\left. - \sum_{\frac{x}{X}<n\leq x} \bar{f}(n)\frac{\log n}{n}\right] + 2\varepsilon\Theta\bar{m}(x)\log X. \tag{38}$$

Speziell für $x = X$ liefert (38) mit (37)

$$(1+\tau+\varepsilon\Theta)\sum_{n\leq X}\bar{f}(n)\frac{\log n}{n} = (\tau+3\varepsilon\Theta)\bar{m}(X)\log X,$$
$$\sum_{n\leq X}\bar{f}(n)\frac{\log n}{n} \geq \frac{\tau-3\varepsilon}{1+\tau+\varepsilon}m(X)\log X. \tag{39}$$

Für $x \geq X$ formen wir die Klammer in (38) durch partielle Integration um und können wegen $\bar{m}(t) \leq \bar{m}(\infty) = \Pi(X)$ abschätzen:

$$\sum_{n\leq x}\bar{f}(n)\frac{\log n}{n} = (\tau+\varepsilon\Theta)\int_{\frac{x}{X}}^{x}\bar{m}(t)\,d\log t + 2\varepsilon\Theta\bar{m}(x)\log X$$
$$\leq (\tau+\varepsilon)\Pi(X)\log X + 2\varepsilon\Pi(X)\log X.$$

Diese Schranke ist von x unabhängig, also ist

$$\sum_{n}\bar{f}(n)\frac{\log n}{n} \leq (\tau+3\varepsilon)\Pi(X)\log X. \tag{40}$$

Aus (39) und (40) folgt jetzt

$$(\Pi(X) - m(X))\log X = \sum_{n>X}\frac{\bar{f}(n)}{n}\log X \leq \sum_{n>X}\bar{f}(n)\frac{\log n}{n} \leq$$
$$\leq (\tau+3\varepsilon)\Pi(X)\log X - \frac{\tau-3\varepsilon}{1+\tau+\varepsilon}m(X)\log X,$$
$$(1-\tau-3\varepsilon)\Pi(X) \leq \left(1-\frac{\tau-3\varepsilon}{1+\tau+\varepsilon}\right)m(X),$$
$$m(X) \geq \frac{(1+\tau+\varepsilon)(1-\tau-3\varepsilon)}{1+4\varepsilon}\Pi(X).$$

Ist $\tau \neq 0$ und ε genügend klein, so wird der Faktor $\geqq 1-2\tau^2$, so daß

$$\Pi(X) \geqq m(X) \geqq (1-2\tau^2)\,\Pi(X) \quad \textit{für} \quad X \geqq x_0$$

gezeigt ist. Für $\tau = 0$ haben wir

$$\Pi(X) \geqq m(X) \geqq (1 + O(\varepsilon))\,\Pi(X) \quad \textit{für} \quad X \geqq x_0(\varepsilon)\,.$$

Wenn statt X nun x geschrieben wird, sind das die Behauptungen.

Hilfssatz 4: *Für $\delta > 0$, $x^\delta \leqq y \leqq x$, $x \to \infty$ gilt gleichmäßig in y*

$$m(y) = (1 + o(1))\, m(x) \left(\frac{\log y}{\log x}\right)^\tau.$$

Beweis: Für $t \leqq X$ ist $\bar{m}(t) = m(t)$. Werden für $x = X$ beide Seiten von (38) partiell integriert, so erhält man

$$m(X)\log X - \int_1^X m(t)\,d\log t = (\tau + \varepsilon\Theta)\int_1^X m(t)\,d\log t + 2\varepsilon\Theta\, m(X)\log X\,,$$

$$(1 + 2\varepsilon\Theta)\, m(X)\log X = (1 + \tau + \varepsilon\Theta)\int_1^X m(t)\,d\log t \quad \textit{für} \quad X \geqq x_0(\varepsilon)\,,$$

d. h.

$$m(x)\log x \sim (1+\tau)\int_1^x m(t)\,d\log t \quad (x \to \infty) \tag{41}$$

Die für $x > 1$ stetige Funktion $\log \int_1^x m(t)\,d\log t$ hat für nichtganzes x die für solche x stetige Ableitung

$$\frac{m(x)}{x}\left(\int_1^x m(t)\,d\log t\right)^{-1},$$

das ist nach (41)

$$= \frac{1 + \tau + o(1)}{x \log x}\,.$$

Daraus folgt durch Integration

$$\log \frac{\int_1^x}{\int_1^y} = \int_y^x \frac{1+\tau+o(1)}{t\log t}\,dt = (1 + \tau + o(1))\log\frac{\log x}{\log y}\,.$$

Das $o(1)$ bezieht sich hier zunächst auf den Grenzübergang $y \to \infty$, was aber wegen $x^\delta \leqq y \leqq x$ mit $x \to \infty$ zusammenfällt. Da $1 \leqq \frac{\log x}{\log y} \leqq \frac{1}{\delta}$ ist, ergibt sich

$$\frac{\int_1^x}{\int_1^y} = \left(\frac{\log x}{\log y}\right)^{1+\tau+o(1)} = (1 + o(1))\left(\frac{\log x}{\log y}\right)^{1+\tau}.$$

Mit (41) erhalten wir nun die Behauptung:

$$\frac{m(x)}{m(y)} = (1 + o(1))\,\frac{\log y}{\log x}\,\frac{\int_1^x}{\int_1^y} = (1 + o(1))\left(\frac{\log x}{\log y}\right)^\tau.$$

Hilfssatz 5: *$\mathfrak{P}$ sei in r Klassen zerlegt:*

$$\mathfrak{P} = \bigcup_{\varrho=1}^{r} \mathfrak{T}_\varrho, \quad \mathfrak{T}_\varrho \cap \mathfrak{T}_\sigma = \theta \quad \text{für} \quad \varrho \neq \sigma .$$

Jeder Klasse sei die Funktion

$$f_\varrho(n) = \begin{cases} f(n) & \text{wenn} \quad p \mid n \rightarrow p \in \mathfrak{T}_\varrho \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zugeordnet. Für jede Funktion f_ϱ existiere die Dichte

$$\tau_\varrho = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{p \leq x} f_\varrho(p) \frac{\log p}{p}$$

und sei nicht Null. Dann ist

$$m(x)\, \Gamma(1 + \tau) \sim \prod_{\varrho=1}^{r} m_\varrho(x)\, \Gamma(1 + \tau_\varrho) \qquad (x \to \infty) .$$

Beweis: Da man mit vollständiger Induktion leicht zu beliebigem r aufsteigt, genügt es, im folgenden $r = 2$ anzunehmen.

Es ist

$$f(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} f_1(n_1)\, f_2(n_2);$$

denn für die Zerlegung $n = n_1 n_2$, bei der n_ϱ nur Primteiler aus $\mathfrak{T}_\varrho$ enthält ($\varrho = 1, 2$), ist $f_\varrho(n_\varrho) = f(n_\varrho)$ und $(n_1, n_2) = 1$, also $f_1(n_1)\, f_2(n_2) = f(n)$. Alle übrigen Summanden verschwinden. Damit wird

$$\begin{aligned} m(x) = \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} &= \sum_{n_1 n_2 \leq x} \frac{f_1(n_1)\, f_2(n_2)}{n_1 n_2} \\ &= \sum_{n_1 \leq x} \frac{f_1(n_1)}{n_1} \sum_{n_2 \leq \frac{x}{n_1}} \frac{f_2(n_2)}{n_2} \\ &= \sum_{n \leq x} \frac{f_1(n)}{n}\, m_2\left(\frac{x}{n}\right). \end{aligned}$$

Auf $m_1(x)$ und $m_2(x)$ läßt sich Hilfssatz 4 anwenden. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x^\varepsilon} \frac{f_1(n)}{n}\, m_2\left(\frac{x}{n}\right) &\leq m_1(x^\varepsilon)\, m_2(x) \\ &= O(\varepsilon^{\tau_1})\, m_1(x)\, m_2(x) , \\ \sum_{x^{1-\varepsilon} < n \leq x} \frac{f_1(n)}{n}\, m_2\left(\frac{x}{n}\right) &\leq m_1(x)\, m_2(x^\varepsilon) \\ &= O(\varepsilon^{\tau_2})\, m_1(x)\, m_2(x) \end{aligned}$$

und

$$\sum_{x^\varepsilon < n \leq x^{1-\varepsilon}} \frac{f_1(n)}{n}\, m_2\left(\frac{x}{n}\right) = (1 + o(1))\, m_2(x) \sum_{x^\varepsilon < n \leq x^{1-\varepsilon}} \frac{f_1(n)}{n} \left(\frac{\log \frac{x}{n}}{\log x}\right)^{\tau_2} .$$

Mit $u = \dfrac{\log \frac{x}{t}}{\log x}$ ist

$$\sum_{x^\varepsilon < n \leq x^{1-\varepsilon}} \frac{f_1(n)}{n} \left(\frac{\log \frac{x}{n}}{\log x} \right)^{\tau_2} = \int_{t=x^\varepsilon}^{x^{1-\varepsilon}} u^{\tau_2}\, dm_1(t)$$

$$= \varepsilon^{\tau_2} m_1(x^{1-\varepsilon}) - (1-\varepsilon)^{\tau_2} m_1(x^\varepsilon) - \int_{x^\varepsilon}^{x^{1-\varepsilon}} m_1(t)\, du^{\tau_2}$$

$$= O(\varepsilon^{\tau_1} + \varepsilon^{\tau_2})\, m_1(x) - (1 + o(1))\, m_1(x) \int_{x^\varepsilon}^{x^{1-\varepsilon}} \left(\frac{\log t}{\log x} \right)^{\tau_1} du^{\tau_2}$$

$$= m_1(x) \left[O(\varepsilon^{\tau_1} + \varepsilon^{\tau_2}) + (1 + o(1)) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (1-u)^{\tau_1}\, du^{\tau_2} \right]$$

$$= m_1(x) \left[O(\varepsilon^{\tau_1} + \varepsilon^{\tau_2}) + (1 + o(1)) \int_{0}^{1} (1-u)^{\tau_1}\, du^{\tau_2} \right].$$

Das Integral hat bekanntlich den Wert

$$\frac{\Gamma(1+\tau_1)\,\Gamma(1+\tau_2)}{\Gamma(1+\tau_1+\tau_2)}.$$

Es ist also für $x \to \infty$

$$\frac{m(x)}{m_1(x)\, m_2(x)} = O(\varepsilon^{\tau_1} + \varepsilon^{\tau_2}) + (1 + o(1)) \frac{\Gamma(1+\tau_1)\,\Gamma(1+\tau_2)}{\Gamma(1+\tau_1+\tau_2)}.$$

Da ε beliebig war und $\tau_1 + \tau_2 = \tau$ ist, folgt die Behauptung

$$\frac{m(x)}{m_1(x)\, m_2(x)} \to \frac{\Gamma(1+\tau_1)\,\Gamma(1+\tau_2)}{\Gamma(1+\tau)}.$$

Hilfssatz 6: *Für $x \to \infty$ ist*

$$m(x) \sim \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(1+\tau)}\, \Pi(x).$$

Beweis: Für $\tau = 0$ ist das schon in Hilfssatz 3 enthalten. Es sei also weiterhin $\tau > 0$. Da

$$\sum_{p \leq x} f(p) \frac{\log p}{p} \sim \tau \log x$$

ist, lassen sich die Primzahlen offenbar so in r Klassen $\mathfrak{T}_\varrho$ sortieren, daß für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathfrak{T}_\varrho}} f(p) \frac{\log p}{p} \sim \frac{\tau}{r} \log x$$

ist. Darauf ist Hilfssatz 5 anwendbar und liefert

$$m(x)\, \Gamma(1+\tau) \sim \Gamma\left(1 + \frac{\tau}{r}\right)^r \prod_{\varrho=1}^{r} m_\varrho(x) \quad (x \to \infty).$$

Indem wir auf jedes $m_\varrho(x)$ Hilfssatz 3 anwenden, folgt

(42) $$m(x)\,\Gamma(1+\tau) = (1+o(1))\,\Gamma\Big(1+\frac{\tau}{r}\Big)^r \prod_{\varrho=1}^{r}\Big(1+2\Theta_\varrho\frac{\tau^2}{r^2}\Big)\,\Pi_\varrho(x)\,.$$

Davon ist

$$\prod_{\varrho=1}^{r}\Pi_\varrho(x) = \Pi(x)\,,$$

$$\prod_{\varrho=1}^{r}\Big(1+2\Theta_\varrho\frac{\tau^2}{r^2}\Big) = 1 + O\Big(\frac{1}{r}\Big) \quad (r\to\infty)\,,$$

und

$$\lim_{r\to\infty}\Gamma\Big(1+\frac{\tau}{r}\Big)^r = e^{-C\tau},$$

letzteres wegen

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\Gamma(1+\tau x) = \frac{\tau\,\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -C\tau\,.$$

Aus (42) erhält man also beim Grenzübergang $r\to\infty$

$$m(x) \sim \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(1+\tau)}\,\Pi(x) \quad (x\to\infty)\,.$$

Satz 1 folgt nun unmittelbar durch Verbindung der Hilfssätze 2 und 6:

$$M(x) \sim \frac{\tau x}{\log x}\,m(x) \sim \frac{\tau e^{-C\tau}}{\Gamma(1+\tau)}\,\frac{x}{\log x}\,\Pi(x) = \frac{e^{-C\tau}}{\Gamma(\tau)}\,\frac{x}{\log x}\,\Pi(x)$$

wenn $\tau > 0$,

$$M(x) = o\Big(\frac{x}{\log x}\,m(x)\Big) = o\Big(\frac{x}{\log x}\,\Pi(x)\Big)$$

wenn $\tau = 0$.

3.2. Beweis von Satz 2

Hilfssatz 7: *$f(n)$ und $f^*(n)$ seien multiplikativ,*

$$|f^*(n)| \leqq f(n) \quad (n = 1, 2, \ldots)\,,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu} < \infty \quad (p\in\mathfrak{P})\,,$$

(43) $$m(cx) \sim m(x) \quad \textit{für} \quad x\to\infty \quad \textit{und jedes} \quad c>0\,,$$

$$\Pi^*(x) = o(\Pi(x)) \quad (x\to\infty)\,.$$

Dann ist

$$m^*(x) = o(m(x))\,.$$

Beweis: $\varepsilon > 0$ sei beliebig, X so groß, daß

(44) $$|\Pi^*(X)| \leqq \varepsilon\,\Pi(X)$$

ist. Zu f und f^* werden je zwei neue Funktionen gebildet:

$$f_1^{(*)}(n) = \begin{cases} f^{(*)}(n) & \textit{wenn} \quad p\mid n \frown p\leqq X \\ 0 & \textit{sonst}\,, \end{cases}$$

$$f_2^{(*)}(n) = \begin{cases} f^{(*)}(n) & \textit{wenn} \quad p\mid n \frown p > X \\ 0 & \textit{sonst}\,. \end{cases}$$

Damit ist offenbar

$$m_1(\infty) = \Pi(X), \quad m_1^*(\infty) = \Pi^*(X),$$

also wegen (44)

$$|m_1^*(x)| \leqq 2\varepsilon\, m_1(x) \quad \textit{für} \quad x \geqq Y, \tag{45}$$

wenn nur Y genügend groß gewählt wird.

Nach Voraussetzung ist $m\left(\frac{x}{Y}\right) \sim m(x)$, also

$$m_2(x) - m_2\left(\frac{x}{Y}\right) \leqq m(x) - m\left(\frac{x}{Y}\right) = o(m(x)) \quad (x \to \infty). \tag{46}$$

Aus (45) und (46) folgt die Behauptung nun so:

$$m^*(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{f_2^*(n)}{n} m_1^*\left(\frac{x}{n}\right),$$

$$\begin{aligned}
|m^*(x)| &\leqq \sum_{n \leqq \frac{x}{Y}} \frac{f_2(n)}{n} \left|m_1^*\left(\frac{x}{n}\right)\right| + \sum_{\frac{x}{Y} < n \leqq x} \frac{f_2(n)}{n} m_1\left(\frac{x}{n}\right) \\
&\leqq 2\varepsilon \sum_{n \leqq \frac{x}{Y}} \frac{f_2(n)}{n} m_1\left(\frac{x}{n}\right) + m_1(Y) \sum_{\frac{x}{Y} < n \leqq x} \frac{f_2(n)}{n} \\
&\leqq 2\varepsilon\, m(x) + m_1(Y)\left(m_2(x) - m_2\left(\frac{x}{Y}\right)\right),
\end{aligned}$$

$$|m^*(x)| \leqq (2\varepsilon + o(1))\, m(x) \quad \textit{für} \quad x \to \infty.$$

Hilfssatz 2*: *Die multiplikativen Funktionen f, f^* mögen* (3), (4), (4*) *und* (6) *erfüllen, außerdem sei $\tau \neq 0$. Dann ist*

$$M^*(x) = \frac{\tau^* x}{\log x} m^*(x) + o(M(x)).$$

Der Beweis von Hilfssatz 2 überträgt sich vollständig, wenn nur in allen Restgliedern die mit f statt f^* gebildeten Ausdrücke genommen werden. Die Restglieder

$$o\left(\frac{l(x)}{\log x}\right), \quad o\left(\frac{x}{\log x} m(x)\right),$$

die man zunächst erhält, lassen sich wegen

$$l(x) \sim \tau\, x m(x) \sim M(x) \log x$$

als $o(M(x))$ schreiben.

Satz 2 ist nun rasch bewiesen: Unter den Voraussetzungen von Satz 2 sind die Bedingungen der Hilfssätze 2* und 7 erfüllt; insbesondere gilt (43) nach Hilfssatz 4. Es ist also

$$\begin{aligned}
M^*(x) &= O\left(\frac{x}{\log x} |m^*(x)|\right) + o(M(x)) \\
&= o\left(\frac{x}{\log x} m(x)\right) + o(M(x)) \\
&= o(M(x)).
\end{aligned}$$

Literatur

[1] Delange, H.: Théorèmes taubériens et applications arithmétiques. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège (4) **16**, no. 1—2 (1955).

[2] Delange, H.: Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés. Ann. sci. école norm. super. (3) **73**, 15—74 (1956).

[3] Delange, H.: On a theorem of Erdös. Scripta Math. **23**, 109—116 (1957).

[4] Delange, H.: On some arithmetical functions. Illinois J. Math. **2**, 81—87 (1958).

[5, 6] Delange, H.: Sur certaines fonctions arithmétiques, Sur la distribution des certain entiers. C. R. Acad. Sci. Paris **246**, 514—517 und 2205—2207 (1958).

[7] Erdös, P.: On the distribution function of additive functions. Ann. Math. **47**, 1—20 (1946).

[8] Hornfeck, B.: Über die Zahlen, deren Primteiler in mindestens k-ter Potenz auftreten. Math. Ann. **138**, 442—449 (1959).

[9] Landau, E.: Lösung des Lehmerschen Problems. Am. J. Math. **31**, 86—102 (1909).

[10] Landau, E.: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. 2 (1909).

[11] Ostmann, H.-H.: Additive Zahlentheorie II. Ergeb. Math. **11** (1956).

[12] Pillai, S.: Generalization of a theorem of Mangoldt. Proc. Indian Acad. Sci. A **10**, 13—20 (1939).

[13] Rao, S.: Generalization of a theorem of Pillai-Selberg. Proc. Indian Acad. Sci. A **11**, 502—504 (1940).

[14] Selberg, A.: An elementary proof of the prime number theorem for arithmetic progressions. Canad. J. Math. **2**, 66—78 (1950).

[15] Selberg, S.: Zur Theorie der quadratfreien Zahlen. Math. Z. **44**, 306—318 (1938).

[16] Shapiro, H. N.: On primes in arithmetic progressions II. Ann. Math. (2) **52**, 231—243 (1950).

[17] Wirsing, E.: Über die Zahlen, deren Primteiler einer gegebenen Menge angehören. Arch. Math. **7**, 263—272 (1956).

(Eingegangen am 1. September 1960)

Siddiqi, J. A.
Math. Annalen 143, 103—108 (1961)

The Fourier Coefficients of Continuous Functions of Bounded Variation

By

Jamil A. Siddiqi in Heidelberg

1. Let $f(x)$ be a function integrable in the sense of Lebesgue in $[0, 2\pi]$ and periodic with period 2π. Let

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

be the Fourier series of $f(x)$ and let

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos n x - a_n \sin n x)$$

be its conjugate series. If $\Lambda = (\lambda_{n,k})$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; k = 0, 1, 2, \ldots, n; \lambda_{n,0} = 1)$ is a triangular matrix of real or complex numbers, a sequence (s_n) is said to be summable (Λ) if

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\triangle\lambda_{n,k}s_k \quad (\triangle\lambda_{n,k} = \lambda_{n,k} - \lambda_{n,k+1})$$

exists. The conditions of regularity are

$$\text{(1)} \qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_{n,k} = 1 \quad \text{for every fixed } k;$$

$$\text{(2)} \qquad \sum_{k=0}^{n}|\triangle\lambda_{n,k}| \leq M \quad \text{independently of } n.$$

In a paper [2] published earlier we proved the following

Theorem. *Let $f(x)$ be a function of bounded variation in $[0, 2\pi]$ and periodic with period 2π. If (Λ) is regular and if*

$$\text{(3)} \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|\triangle^2\lambda_{n,k}| = 0 \quad (\triangle^2\lambda_{n,k} = \triangle\lambda_{n,k} - \triangle\lambda_{n,k+1})$$

the sequence $\{n(b_n \cos n x - a_n \sin n x)\}$ is summable (Λ) to $\pi^{-1}D(x) = \pi^{-1}\{f(x+0) - f(x-0)\}$.

The object of this paper is to give a necessary and sufficient condition on Λ for the validity of the above theorem and to derive certain consequences for the Fourier coefficients of continuous functions of bounded variation.

2. Let $V[0, 2\pi]$ denote the class of all functions of bounded variation in $[0, 2\pi]$ which are periodic with period 2π. We first prove the following

Theorem 1. *If* (Λ) *is regular, then for every* $f \in V[0, 2\pi]$ *and for every* $x \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k}\, k(b_k \cos kx - a_k \sin kx) = \pi^{-1} D(x)$$

if and only if

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k} \cos kt = 0 \tag{4}$$

in every $0 < \delta \leqq t \leqq \pi$.

Proof: Since

$$\sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k}\, k(b_k \cos kx - a_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_x(t) k \sin kt\, dt$$

$$= \pi^{-1} D(x) \sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k} + \pi^{-1} \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k} \cos kt\, d\psi_x(t)$$

$$= \pi^{-1} D(x) + \pi^{-1} \int_0^{\pi} K_n(t)\, d\psi_x(t),$$

where $\psi_x(t) = \psi_x(f; t) = f(x+t) - f(x-t)$ and $K_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k} \cos kt$, we have to show that if (4) holds then for every f in $V[0, 2\pi]$ and for every x in $[0, 2\pi]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} K_n(t)\, d\psi_x(t) = 0 \tag{5}$$

and conversely. Condition (5) is equivalent to the following condition:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} K_n(t)\, d\psi_x(t) = 0 \tag{6}$$

for every f in $V[0, 2\pi]$, for every x in $[0, 2\pi]$ and for every $0 < \delta \leqq \pi$. Suppose (5) holds. If $f \in V[0, 2\pi]$ and $x \in [0, 2\pi]$ then for every $0 < \delta \leqq \pi$ we can construct a function $g \in V[0, 2\pi]$ such that g is constant in $[x-\delta, x+\delta]$ and g coincides with f elsewhere. Since

$$\int_{\delta}^{\pi} K_n(t)\, d\psi_x(f; t) = \int_0^{\pi} K_n(t)\, d\psi_x(g; t)$$

and the right-hand integral tends to 0 as $n \to \infty$ by (5), so does the left-hand integral. Thus (5) implies (6). Suppose now that (6) holds. If $f \in V[0, 2\pi]$ and $x \in [0, 2\pi]$, given any $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that

$$\int_0^{\delta} |d\psi_x(t)| < \varepsilon/2M \tag{7}$$

where M is the positive constant in (2) and, therefore, by virtue of (2)

$$\left| \int_0^{\delta} K_n(t)\, d\psi_x(t) \right| < \varepsilon/2.$$

Since (6) holds, there exists an $n_0 = n_0(\varepsilon)$ such that for $n \geqq n_0$

(8) $$\left|\int_\delta^\pi K_n(t)\, d\,\psi_x(t)\right| < \varepsilon/2.$$

Combining (7) and (8) we have for $n \geqq n_0$

$$\left|\int_0^\pi K_n(t)\, d\,\psi_x(t)\right| < \varepsilon$$

i.e. (5) holds. Thus (6) implies (5).

By a well-known theorem on the weak convergence of sequences in the Banach space of all continuous functions defined in a finite closed interval (c.f. [1], pp. 134—135) it follows that (6) holds if and only if (i) $|K_n(t)| \leqq K$ for all n and for all t in $[\delta, \pi]$ whatever be $\delta > 0$ and (ii) (4) holds. Since (i) is automatically satisfied by virtue of the regularity condition (2), it follows that (6) holds if and only if (4) holds and the proof of the theorem is completed.

Similarly we have

Theorem 2. *If* (A) *is regular, then for every* $f \in V[0, 2\pi]$ *and for every* $x \in [0, 2\pi]$

(9) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\triangle \lambda_{n,k}| \{k(b_k \cos kx - a_k \sin kx) - \pi^{-1} D(x)\} = 0$$

if and only if

(10) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\triangle \lambda_{n,k}| \cos kt = 0$$

in every $0 < \delta \leqq t \leqq \pi$.

3. We now pass on to various applications of the above theorems. Let f and g be two functions belonging to the class $V[0, 2\pi]$. We define

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)\, dg(t)$$

where the integral is taken in the Riemann-Stieltjes sense. h exists for every x which does not belong to an enumerable set D of numbers $\xi_j + \eta_k$, where $\{\xi_j\}$ and $\{\eta_k\}$ are the discontinuities of f and g respectively. If we take any finite system of non-overlapping intervals with end points in the complement of D, then it is easily seen that the variation of h over this system is majorized by the product of the total variations of f and g over $[0, 2\pi]$. It follows that h is of bounded variation over $[0, 2\pi]$ if we define $h(x') = \lim_{x\to x'+0} h(x)$ at every point $x' \in D$. If f is continuous so is h and, in particulary, if $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1)$ then so does h.

If

$$f \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

and we define

$$h(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\, df(t),$$

then $h \in V[0, 2\pi]$ in the sense explained above and

$$h \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) \sin nx .$$

It is known (c.f. [4], p. 40) that

$$h(+0) - h(-0) = \frac{1}{\pi}\sum |d_j|^2$$

where d_j is the jump of f at a point x_j of discontinuity and the summation on the right is over all such points. Applying theorems 1 and 2 to the function h we get the following theorems.

Theorem 3. *If* (Λ) *is regular and* $f \in V[0, 2\pi]$, *then*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k}\{k^2(a_k^2 + b_k^2) - \pi^{-1}\sum |d_j|^2\} = 0 \tag{11}$$

(where d_j *is the jump of* f *at the point* x_j *of discontinuity and the summation extends over all these points) if and only if* (4) *holds.*

Theorem 4. *If* (Λ) *is regular and* $f \in V[0, 2\pi]$, *then*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\triangle\lambda_{n,k}|\, \{k^2(a_k^2 + b_k^2) - \pi^{-1}\sum |d_j|^2\} = 0 \tag{12}$$

(where d_j *is the jump of* f *at the point* x_j *of discontinuity and the summation extends over all these points) if and only if* (10) *holds.*

Theorems 3 and 4 include as a particular case the following theorem of WIENER [3].

Theorem W. *If* $f \in V[0, 2\pi]$ *then*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k^2(a_k^2 + b_k^2) = \pi^{-1}\sum |d_j|^2 .$$

We denote by $CV[0, 2\pi]$ the class of all continuous functions[1]) belonging to the class $V[0, 2\pi]$. As a corollary of theorem 4 we get

Theorem 5. *If* (Λ) *is regular and* $f \in CV[0, 2\pi]$ *then*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\triangle\lambda_{n,k}|\, k(|a_k| + |b_k|) = 0 \tag{13}$$

provided (10) *holds.*

Proof: It follows from (12) that

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\triangle\lambda_{n,k}|\, k^2 a_k^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\triangle\lambda_{n,k}|\, k^2 b_k^2 = 0 .$$

---

[1]) Functions with removable discontinuities are here regarded as continuous.

Now applying Schwarz inequality we have

$$\sum_{k=0}^{n} |\triangle \lambda_{n,k}| \, k|a_k| \leqq \left(\sum_{k=0}^{n} |\triangle \lambda_{n,k}|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} |\triangle \lambda_{n,k}| \, k^2 a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \sqrt{M} \left(\sum_{k=0}^{n} |\triangle \lambda_{n,k}| \, k^2 a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

and taking limits we obtain

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\triangle \lambda_{n,k}| \, k|a_k| = 0 \, .$$

Similarly

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\triangle \lambda_{n,k}| \, k|b_k| = 0$$

so that (13) holds.

Further we have

Theorem 6. ***If** (A) **is regular and satisfies** (3) **and** $f \in V[0, 2\pi]$, **then** f **is continuous if and only if** (13) **holds.***

Proof: Using Abel's transformations it can be seen that for every $0 < \delta \leqq t \leqq \pi$ both $\left|\sum_{k=0}^{n} \triangle \lambda_{n,k} \cos kt\right|$ and $\left|\sum_{k=0}^{n} |\triangle \lambda_{n,k}| \cos kt\right|$ are majorized by the expression

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |\triangle^2 \lambda_{n,k}|\right) \left(2 \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\delta\right) + \frac{1}{2} |\triangle \lambda_{n,0}|$$

which tends to 0 as $n \to \infty$ by virtue of (3) and (1). Thus conditions (4) and (10) are satisfied. If f is continuous, it follows from Theorem 5 that (13) holds since (10) is satisfied. Conversely suppose that (13) holds. Then since (4) is satisfied, it follows from theorem 1 that

$$|D(x)| = \pi \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} \triangle \lambda_{n,k} \, k(b_k \cos kx - a_k \sin kx)\right| \leqq$$

$$\leqq \pi \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\triangle \lambda_{n,k}| \, k(|a_k| + |b_k|) = 0$$

so that $D(x) = 0$ and the function f is continuous.

Theorem 6 includes as a particular case the following theorem of Wiener [3]

Theorem W'. ***If** $f \in V[0, 2\pi]$, f **is continuous if and only if***

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k(|a_k| + |b_k|) = 0 \, .$$

4. If we choose

$$\lambda_{n,k} = \frac{\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i+1}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}}$$

so that

$$\triangle \lambda_{n,k} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}},$$

then it is easily seen that on the one hand (1) and (2) are satisfied and on the other (3), so that if $f \in CV[0, 2\pi]$, it follows from theorem 6 that

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} (|a_k| + |b_k|) = o(\log n)$$

which implies that

$$\sum_{k=0}^{n} (|a_k| + |b_k|) = o(\log n) .$$

Thus we obtain the following

Theorem 7. *If $f \in CV[0, 2\pi]$, then*

$$\sum_{k=0}^{n} (|a_k| + |b_k|) = o(\log n) .$$

References

[1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932.
[2] SIDDIQI, J. A.: Math. Z. **61**, 79—81 (1954).
[3] WIENER, N.: Massachusetts J. Math. **3**, 72—94 (1924).
[4] ZYGMUND, A.: Trigonometric series vol. 1, Cambridge 1959.

(Received October 10, 1960)

READ, R. C.
Math. Annalen 143, 109—110 (1961)

A note on the number of functional digraphs

By
RONALD C. READ in Kingston (Jamaica)

In a recent paper [2], HARARY obtained the formula

$$v(x) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{\infty} Z(C_k, T(x^m))$$

for the counting series $v(x)$ of all functional digraphs[1]), and conjectured that it might be possible to simplify it. In this note we show how this can be done.

Since

$$Z(C_k) = \frac{1}{k} \sum_{d \mid k} \varphi(d) f_d^{k/d},$$

we have

$$\begin{aligned}
v(x) &= \exp \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{\infty} Z(C_k, T(x^m)) \right\} \\
&= \exp \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{d \mid k} \varphi(d)\, [T(x^{md})]^{k/d} - \frac{1}{m} T(x^m) \right\} \\
&= \exp \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{dr} \varphi(d)\, [T(x^{md})]^r - \frac{1}{m} T(x^m) \right\} \\
&= \exp \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{d} \varphi(d) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} [T(x^{md})]^r \right) - \frac{1}{m} T(x^m) \right\} \\
&= \exp \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{-\varphi(d)}{d} \sum_{r=1}^{\infty} \log(1 - T(x^{md})) \right) - \frac{1}{m} T(x^m) \right\} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{m} \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{-\varphi(d)}{d} \sum_{r=1}^{\infty} \log(1 - T(x^{md})) \right) \right\} \cdot \\
&\qquad \exp \left\{ - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} T(x^m) \right\} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{d=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{-\varphi(d)}{md} \log(1 - T(x^{md})) \right\} \cdot \exp \left\{ - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} T(x^m) \right\} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{d=1}^{\infty} \{1 - T(x^{md})\}^{-\varphi(d)/md} \cdot \exp \left\{ - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} T(x^m) \right\} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{d \mid n} \{1 - T(x^n)\}^{-\varphi(d)/n} \cdot \exp \left\{ - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} T(x^m) \right\} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \{1 - T(x^n)\}^{-\frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \varphi(d)} \cdot \exp \left\{ - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} T(x^m) \right\}.
\end{aligned}$$

---

[1]) For the nomenclature and notation see Harary's paper.

But $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ (see [3], p. 52), and

$$\exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} T(x^m) = \frac{1}{x} T(x)$$

(see [2]). Hence

$$v(x) = \frac{x}{T(x)} \prod_{n=1}^{\infty} \{1 - T(x^n)\}^{-1}.$$

This counting series enumerates functional digraphs which contain no slings. If slings are allowed then the second summation in Harary's formula goes from $k = 1$ upwards, and we obtain the counting series for the function $fcn(n)$ of DAVIS [1]. The simplification proceeds as before, and we have

$$\sum fcn(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \{1 - T(x^n)\}^{-1}.$$

Using the result

$$T(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 20x^6 + 48x^7 + \\ + 115x^8 + 286x^9 + 719x^{10} + 1842x^{11} + 4766x^{12} + \cdots .$$

I find that

$$v(x) = 1 + x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 13x^5 + 40x^6 + 100x^7 + 291x^8 + \\ + 797x^9 + 2273x^{10} + 6389x^{11} + \cdots$$

and

$$\sum fcn(n) x^n = 1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 19x^4 + 47x^5 + 130x^6 + \\ + 343x^7 + 951x^8 + 2615x^9 + 7318x^{10} + 20491x^{11} + 57902x^{12} + \cdots .$$

References

[1] DAVIS, R. L.: The number of structures of finite relations. Proc. Am. Math. Soc. 4, 486—495 (1953).
[2] HARARY, F.: The number of functional digraphs. Math. Ann. 138, 203—210 (1959).
[3] HARDY, G. H., and E. M. WRIGHT: An introduction to the theory of numbers. Oxford 1945.

(Received November 1, 1960)

Gottschling, E.
Math. Annalen 143, 111—149 (1961)

Über die Fixpunkte der Siegelschen Modulgruppe

Von
Erhard Gottschling in Berlin

§ 1. Bezeichnungen, Definitionen und Ergebnisse

Die homogene symplektische Gruppe n-ten Grades besteht aus allen reellen $2n$-reihigen Matrizen M, die der Bedingung

$$(1) \qquad M J M' = J$$

genügen. Dabei ist M' die zu M transponierte Matrix, ferner $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ und E die n-reihige Einheitsmatrix. Setzt man

$$(2) \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad (A, B, C, D \ n\text{-reihig}),$$

so ist (1) mit

$$(3) \qquad AB' = BA', \quad CD' = DC', \quad AD' - BC' = E$$

äquivalent. Die homogene Modulgruppe n-ten Grades ist die Gruppe der symplektischen Matrizen mit ganzzahligen Elementen. Eine Modulmatrix (2) heißt ganz, wenn $C = 0$ ist. Aus (3) folgt, daß die ganzen Modulmatrizen genau durch

$$(4) \qquad G = \begin{pmatrix} U & S U'^{-1} \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix}$$

gegeben sind, wobei U eine beliebige n-reihige unimodulare Matrix und S eine beliebige n-reihige symmetrische Matrix mit ganzzahligen Elementen ist. Die ganzen Modulmatrizen bilden eine Untergruppe der homogenen Modulgruppe.

Es sei $\mathfrak{H}$ der Bereich aller komplexen n-reihigen symmetrischen Matrizen $Z = X + iY$, deren Imaginärteil Y positiv definit ist. Untermengen von $\mathfrak{H}$ sollen mit großen deutschen Buchstaben bezeichnet werden.

Jede symplektische Matrix (2) definiert eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich, die in jedem Element $z_{kl}(k, l = 1, \ldots, n)$ von Z analytisch ist: Man ordne nämlich jedem Punkt $Z \in \mathfrak{H}$ den Bildpunkt

$$(5) \qquad M(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

zu. In [4] wird gezeigt, daß zwei symplektische Matrizen M_1 und M_2 genau dann die gleiche Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich liefern, wenn $M_2 = \pm M_1$ ist, und daß (5) die allgemeinste eineindeutige analytische Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich ist. Die Gruppe der eineindeutigen analytischen Abbildungen von $\mathfrak{H}$ auf sich ist also isomorph zur Faktorgruppe der homogenen symplektischen Gruppe nach dem aus $\pm E_{2n}$ bestehenden Normalteiler $\{\pm E_{2n}\}$; dabei ist E_{2n} die

$2n$-reihige Einheitsmatrix. Diese Faktorgruppe soll mit Σ bezeichnet werden und Untermengen von Σ mit großen griechischen Buchstaben. Insbesondere soll die Faktorgruppe der homogenen Modulgruppe nach $\{\pm E_{2n}\}$ mit Δ bezeichnet werden und die Faktorgruppe der Gruppe ganzer Modulmatrizen nach $\{\pm E_{2n}\}$ mit Γ. Man bezeichnet Σ bzw. Δ auch als inhomogene symplektische Gruppe bzw. inhomogene Modulgruppe. Wir werden schlechthin von der symplektischen Gruppe und der Modulgruppe sprechen. Die Elemente von Σ und Δ werden wir auch symplektische Matrizen und Modulmatrizen nennen und jedesmal irgendeinen der beiden Repräsentanten meinen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Diese Abhandlung befaßt sich mit den Fixpunkten der Abbildung (5), d. h. mit der Gleichung

$$AZ + B = Z(CZ + D) \tag{6}$$

für den Fall, daß die Matrix (2) eine Modulmatrix ist. Es wird die Menge der Lösungen Z von (6) bei vorgegebener Modulmatrix M untersucht. Wir bezeichnen diese Lösungsmenge mit $\mathfrak{H}(M)$. In einer folgenden Arbeit (Über die Fixpunktuntergruppen der Siegelschen Modulgruppe) wird die Menge der Modulmatrizen untersucht, die (6) bei vorgegebenem Z erfüllen. Diese Menge bezeichnen wir mit $\Delta(Z)$, den Durchschnitt $\Gamma \cap \Delta(Z)$ mit $\Gamma(Z)$. Offenbar ist $\Delta(Z)$ eine Untergruppe von Δ, und zwar eine endliche Untergruppe, weil Δ diskontinuierlich in $\mathfrak{H}$ ist. Um auch für die simultanen Lösungen von mehreren Gleichungen der Art (6) einen einfachen Ausdruck zu haben, setzen wir noch für jede beliebige Menge Ω von Modulmatrizen

$$\bigcap_{M \in \Omega} \mathfrak{H}(M) = \mathfrak{H}(\Omega) \qquad (\Omega \subset \Delta); \tag{7}$$

und für jede Menge $\mathfrak{M}$ von Punkten aus $\mathfrak{H}$ definieren wir

$$\bigcap_{Z \in \mathfrak{M}} \Delta(Z) = \Delta(\mathfrak{M}), \quad \bigcap_{Z \in \mathfrak{M}} \Gamma(Z) = \Gamma(\mathfrak{M}) \qquad (\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}). \tag{8}$$

Definition 1: *Eine Punktmenge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ soll ausgezeichnet heißen, wenn es ein $\Omega \subset \Delta$ mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}(\Omega)$ gibt.*

Definition 2: *Eine Matrizenmenge $\Omega \subset \Delta$ soll ausgezeichnet heißen, wenn es ein $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ mit $\Omega = \Delta(\mathfrak{M})$ gibt. Die Menge Ω ist dann notwendig eine endliche Untergruppe von Δ.*

Die ausgezeichneten Untermengen von $\mathfrak{H}$ und Δ sind also genau die Lösungsmengen von Systemen von Gleichungen der Art (6). Unser Ziel ist, eine vollständige Übersicht über alle ausgezeichneten Untermengen von $\mathfrak{H}$ und Δ zu geben. Für den Fall $n = 2$ wird dieses Problem vollständig gelöst. Bevor der dabei eingeschlagene Weg beschrieben wird, formulieren wir zwei Sätze, die für beliebiges n gelten und in § 2 bewiesen werden.

Satz 1: *Eine Punktmenge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ausgezeichnet, wenn*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{H}(\Delta(\mathfrak{M})) \tag{9}$$

gilt; eine Matrizenmenge $\Omega \subset \Delta$ ist dann und nur dann ausgezeichnet, wenn

$$\Omega = \Delta(\mathfrak{H}(\Omega)) \tag{10}$$

gilt. Ferner stellt die Zuordnung

$$\mathfrak{M} \to \Delta(\mathfrak{M}) \qquad (\mathfrak{M} \text{ ausgezeichnet}) \tag{11}$$

eine eineindeutige Abbildung der Gesamtheit der ausgezeichneten Untermengen von $\mathfrak{H}$ auf die Gesamtheit der ausgezeichneten Untergruppen von Δ dar. Die Umkehrung dieser Abbildung ist

$$\Omega \to \mathfrak{H}(\Omega) \qquad (\Omega \text{ ausgezeichnet})\,. \tag{12}$$

Der Raum $\mathfrak{H}$ wird durch Einführung der symplektischen Geometrie zu einem Riemannschen Raum. In [4] werden die geodätischen Linien in diesem Raum näher untersucht. Von dem Begriff der geodätischen Linie ausgehend definieren wir:

Definition 3: *Eine Untermenge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ heißt geodätische Mannigfaltigkeit, wenn $\mathfrak{M}$ mit irgendzwei Punkten Z_1, Z_2 auch die volle durch Z_1, Z_2 bestimmte geodätische Linie enthält.*

Satz 2: *Sind $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ nicht leere ausgezeichnete Untermengen von $\mathfrak{H}$, so gilt:*

a) *Die Menge $\mathfrak{M}$ ist geodätische Mannigfaltigkeit und als solche insbesondere zusammenhängend.*

b) *Die reelle Dimension* $\dim \mathfrak{M}$ *von $\mathfrak{M}$ ist stets geradzahlig.*

c) *Aus $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ und* $\dim \mathfrak{M}_1 = \dim \mathfrak{M}_2$ *folgt $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$.*

d) *Die Gruppe derjenigen symplektischen Transformationen, die $\mathfrak{M}$ in sich überführen, ist auf $\mathfrak{M}$ transitiv.*

e) *Es gibt Punkte $Z \in \mathfrak{M}$ mit $\Delta(Z) = \Delta(\mathfrak{M})$.*

Die Aufgabe, alle ausgezeichneten Untermengen von $\mathfrak{H}$ zu bestimmen, ist aufgrund der eineindeutigen Zuordnung (11) äquivalent mit der Bestimmung aller ausgezeichneten Untergruppen von Δ. Diese sollen (für den Fall $n = 2$) folgendermaßen ermittelt werden: Zunächst werden alle nicht leeren Fixpunktmannigfaltigkeiten der Gestalt $\mathfrak{H}(M)$ mit $M \in \Delta$ bestimmt (vorliegende Abhandlung) und daraufhin zu jedem Punkt $Z \in \mathfrak{H}(M)$ die Gruppe $\Delta(Z)$ (spätere Abhandlung). Diese Gruppen $\Delta(Z)$ sind aufgrund von Definition 2 sämtlich ausgezeichnet, und man erhält aufgrund von Satz 2e) so auch alle ausgezeichneten Untergruppen von Δ (abgesehen allerdings von der vollen Gruppe Δ, die man bei der Zuordnung (11) als Bild der leeren Menge $\mathfrak{M} = \theta$ erhält).

Im folgenden werden noch einige weitere Begriffe und Bezeichnungen verwendet. Ein Paar quadratischer n-reihiger Matrizen C und D mit ganzzahligen Elementen heißt symmetrisch, wenn $CD' = DC'$ gilt. Es heißt teilerfremd, wenn aus der Voraussetzung, die Elemente von GC und GD seien ganzzahlig, stets folgt, daß die n-reihige Matrix G selbst ganzzahlige Elemente besitzt. In [5] wird gezeigt, daß die zweite Matrizenzeile C, D einer jeden Modulmatrix (2) teilerfremd und symmetrisch ist, und daß man umgekehrt jedes teilerfremde symmetrische Paar C, D zu einer Modulmatrix (2) ergänzen kann. Zwei Punkte aus $\mathfrak{H}$ heißen Δ-äquivalent, wenn sie durch eine Substitution aus Δ ineinander übergeführt werden können. Zwei Punkte aus $\mathfrak{H}$ heißen Γ-äquivalent, wenn sie durch eine Substitution aus Γ ineinander übergeführt

werden können. Wir verabreden noch, die Determinante einer komplexen Matrix W mit $\det W$ zu bezeichnen, den Absolutbetrag einer komplexen Zahl z mit $|z|$ und für $|\det W|$ stets $\operatorname{abs} W$ zu schreiben. Die zu W konjugiert komplexe Matrix soll mit $\overline{W}$ bezeichnet werden. Wie in [4] und [5] gezeigt wird, wird ein Fundamentalbereich von Γ in $\mathfrak{H}$ durch die Bedingungen

$$(13)\qquad \frac{1}{2} \geqq x_{kl} \geqq -\frac{1}{2}, \quad \textit{wobei } X = (x_{kl})\ (k, l = 1, \ldots, n),$$

$$(14)\qquad Y \textit{ nach } \text{Minkowski} \textit{ reduziert}$$

definiert. Wir bezeichnen diesen Fundamentalbereich mit $\mathfrak{G}$. Die Punkte $Z \in \mathfrak{G}$ sollen Γ-reduziert heißen. Wir werden außerdem den durch die Ungleichungen

$$(15)\qquad \operatorname{abs}(CZ + D) \geqq 1 \quad (C, D \textit{ teilerfremd und symmetrisch})$$

definierten Bereich zu betrachten haben. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{B}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{B}$ ist, wie in [4] und [5] bewiesen wird, ein Fundamentalbereich von Δ in $\mathfrak{H}$. Die Punkte $Z \in \mathfrak{F}$ sollen Δ-reduziert oder auch schlechthin reduziert heißen.

In § 3 werden nun die Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{H}(G)$ mit $G \in \Gamma$ bestimmt. Es würde dabei genügen, nur solche $\mathfrak{H}(G)$ zu bestimmen, für die

$$(16)\qquad \dim \mathfrak{H}(G) = \dim(\mathfrak{H}(G) \cap \mathfrak{G})$$

gilt; weil nämlich Γ diskontinuierlich in $\mathfrak{H}$ ist, gibt es zu jeder Fixpunktmannigfaltigkeit $\mathfrak{H}(G)$ eine dazu Γ-äquivalente $\mathfrak{H}(HGH^{-1}) = H(\mathfrak{H}(G))$ $(H \in \Gamma)$, die die Eigenschaft (16) besitzt. Wir wollen jedoch sogar alle Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{H}(G)$ $(G \in \Gamma)$ bestimmen, die Γ-reduzierte Punkte enthalten, weil wir diese bei der Bestimmung der Gruppen $\Delta(Z)$ brauchen werden. Wenn G die Identität ist, gilt $\mathfrak{H}(G) = \mathfrak{H}$, die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H}(G)$ besitzt also die maximale reelle Dimension 6. Wenn G nicht die Identität ist, ist $\mathfrak{H}(G)$ niederdimensional. Es gilt

Satz 3: *Es seien $z = x + iy$, $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2, 3)$ komplexe Variable. Durch die Parameterdarstellungen*

$$\text{a)}\qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon}{2} & z_1 \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon = -1, 0, 1),$$

$$\text{b)}\qquad Z = \begin{pmatrix} z + \frac{\varepsilon}{2} & z_3 \\ z_3 & z - \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon = -1, 0, 1),$$

$$\text{c)}\qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 & \frac{1}{2}(z_1 + \varepsilon) \\ \frac{1}{2}(z_1 + \varepsilon) & z_2 \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon = -1, 0, 1),$$

$$\text{d)}\qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 & \frac{1}{2}(z_2 + \varepsilon) \\ \frac{1}{2}(z_2 + \varepsilon) & z_2 \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon = -1, 0, 1)$$

sind genau alle vierdimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten der Form $\mathfrak{H}(G)$ $(G \in \Gamma)$ *gegeben, die* Γ*-reduzierte Punkte enthalten. Der Durchschnitt* $\mathfrak{H}(G) \cap \mathfrak{S}$ *ist vierdimensional für die Fälle a) und c) und für den Fall* $\varepsilon = 0$ *in b). Sonst ist* $\mathfrak{H}(G) \cap \mathfrak{S}$ *dreidimensional. Die Punkte b) liegen nämlich für* $\varepsilon = \pm 1$ *nur dann in* $\mathfrak{S}$*, wenn* $x = 0$ *ist, und die Punkte d) liegen nur dann in* $\mathfrak{S}$*, wenn* $y_1 = y_2$ *ist.*

Satz 4: *Es sei* $z = x + iy$ *eine komplexe Variable. Durch die Parameterdarstellungen*

a) $$Z = \begin{pmatrix} z + \frac{\varepsilon}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & z - \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix} \qquad (e, \varepsilon = -1, 0, 1),$$

b) $$Z = \begin{pmatrix} z + \frac{\varepsilon}{2} & \frac{1}{2}\left(z + e - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(z + e - \frac{\varepsilon}{2}\right) & z - \frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix} \qquad (e, \varepsilon = -1, 0, 1;\ |e - \varepsilon| \leq 1)$$

sind genau alle zweidimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten der Form $\mathfrak{H}(G)$ $(G \in \Gamma)$ *gegeben, die* Γ*-reduzierte Punkte enthalten. Der Durchschnitt* $\mathfrak{H}(G) \cap \mathfrak{S}$ *ist für die Fälle* $\varepsilon = 0$ *in a) und b) zweidimensional, sonst eindimensional; für* $\varepsilon \neq 0$ *muß nämlich* $x = 0$ *sein, damit der Punkt* Z *zu* $\mathfrak{S}$ *gehört.*

Nulldimensionale Fixpunktmannigfaltigkeiten der Form $\mathfrak{H}(G)$ $(G \in \Gamma)$ gibt es im Falle $n = 2$ nicht. In § 4 werden alle Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{H}(M)$ mit $M \in \Delta$, $M \notin \Gamma$ bestimmt, die Δ-reduzierte Punkte enthalten. Wenn die Dimension von $\mathfrak{H}(M)$ gleich Null ist, besteht $\mathfrak{H}(M)$ aus einem einzigen Punkt, weil $\mathfrak{H}(M)$ zusammenhängend ist. Wir sprechen dann von einem isolierten Fixpunkt. Es gilt

Satz 5: *Es sei*

$$\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \eta = \frac{1}{3} + \frac{2i}{3}\sqrt{2},$$

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) + \frac{i}{4}\sqrt{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}}.$$

Dann stellen die Punkte

a) $$Z = \begin{pmatrix} \omega & \omega + \omega^{-2} \\ \omega + \omega^{-2} & -\omega^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & -(\omega^2 + \omega^{-1}) \\ -(\omega^2 + \omega^{-1}) & -\omega^{-1} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -\omega^{-1} & \omega + \omega^{-2} \\ \omega + \omega^{-2} & \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\omega^{-1} & -(\omega^2 + \omega^{-1}) \\ -(\omega^2 + \omega^{-1}) & \omega \end{pmatrix},$$

b) $$Z = \begin{pmatrix} \eta & \frac{1}{2}(\eta - 1) \\ \frac{1}{2}(\eta - 1) & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\eta^{-1} & \frac{1}{2}(-\eta^{-1} + 1) \\ \frac{1}{2}(-\eta^{-1} + 1) & -\eta^{-1} \end{pmatrix},$$

c) $$Z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

d) $$Z = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & -\varrho^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varrho^{-1} & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varrho^{-1} & 0 \\ 0 & -\varrho^{-1} \end{pmatrix},$$

e) $$Z = \frac{i}{3}\sqrt{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

f) $$Z = \begin{pmatrix}\varrho & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\varrho^{-1} & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$$

genau alle Δ-reduzierten isolierten Fixpunkte dar.

Satz 6: *Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Variable, ferner $e = -1, 1$ und $\varepsilon = -1, 0, 1$. Sämtliche zweidimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten nicht ganzer Modulsubstitutionen, die Δ-reduzierte Punkte enthalten, sind dann gegeben durch die Parameterdarstellungen*

a) $$Z = \begin{pmatrix}\varrho & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\varrho^{-1} & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}, \quad \textit{reduziert für } |x| \leqq \frac{1}{2}, |z| \geqq 1,$$

b) $$Z = \begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & \varrho\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & -\varrho^{-1}\end{pmatrix}, \quad \textit{reduziert für } z = \varrho, -\varrho^{-1},$$

c) $$Z = \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}, \quad \textit{reduziert für } |x| \leqq \frac{1}{2}, y \geqq 1,$$

d) $$Z = \begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}, \quad \textit{reduziert für } |x| \leqq \frac{1}{2}, y \leqq 1, |z| \geqq 1,$$

e) $$Z = \begin{pmatrix}z & \frac{1}{2}(z+e)\\ \frac{1}{2}(z+e) & \frac{z}{4} - \frac{3}{4}z^{-1} - \frac{e}{2}\end{pmatrix}, \quad \textit{reduziert für } |z| = 1, 0 \leqq -ex \leqq \frac{1}{3},$$

f) $$Z = \begin{pmatrix}z & \frac{1}{2}(z+e)\\ \frac{1}{2}(z+e) & \frac{z}{4} - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{e}{2}\end{pmatrix}, \quad \textit{reduziert für } z = i,$$

g) $$Z = \begin{pmatrix}\frac{z}{4} - \frac{3}{4}z^{-1} - \frac{e}{2} & \frac{1}{2}(z+e)\\ \frac{1}{2}(z+e) & z\end{pmatrix}, \quad \textit{reduziert für } |z| = 1, 0 \leqq -ex \leqq \frac{1}{3},$$

h) $$Z = \begin{pmatrix}\frac{z}{4} - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{e}{2} & \frac{1}{2}(z+e)\\ \frac{1}{2}(z+e) & z\end{pmatrix}, \quad \textit{reduziert für } z = i,$$

i) $$Z = \frac{1}{4}\sqrt{3}\begin{pmatrix}z - z^{-1} & z + z^{-1}\\ z + z^{-1} & z - z^{-1}\end{pmatrix} - \frac{e}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\textit{reduziert für } x = 0, 1 \leqq y \leqq \sqrt{3},$$

j) $$Z = \frac{1}{4}\sqrt{3}\begin{pmatrix}z - z^{-1} & z + z^{-1}\\ z + z^{-1} & z - z^{-1}\end{pmatrix} - \frac{e}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\textit{reduziert für } 1 \leqq |z| \leqq \sqrt{3}, 0 \leqq ex \leqq \frac{1}{6}\sqrt{3}(|z|^2 - 1),$$

k) $$Z = \begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & -z^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & -z^{-1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & e\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & -z^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e & 0\\ 0 & -e\end{pmatrix},$$

$$\textit{reduziert für } z = e\varrho^{\varepsilon},$$

l) $$Z = \begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & -z^{-1}\end{pmatrix}, \quad \textit{reduziert für } |z| = 1, |x| \leqq \frac{1}{2},$$

m) $Z = \begin{pmatrix} z+\varepsilon & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} & \frac{z}{4} - z^{-1} \end{pmatrix}$, *für* $\varepsilon = 0$ *reduziert für* $|x| \leq \frac{1}{2}$,

$1 \leq |z| \leq \frac{2}{3}\sqrt{3}$; *für* $\varepsilon = \pm 1$ *reduziert für* $|z| \leq \frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2} \leq -\varepsilon x \leq \frac{1}{2}|z|^2$,

n) $Z = \begin{pmatrix} \frac{z}{4} - z^{-1} & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} & z+\varepsilon \end{pmatrix}$, *für* $\varepsilon = 0$ *reduziert für* $|z| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$,

$|x| \leq \frac{1}{2}$; *für* $\varepsilon = \pm 1$ *reduziert für* $|z| = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2} \leq -\varepsilon x \leq \frac{2}{3}$,

o) $Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z - z^{-1} & z + z^{-1} \\ z + z^{-1} & z - z^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$,

für $\varepsilon = 0$ *reduziert für* $1 \leq |z| \leq \sqrt{3}$, $|x| \leq \begin{cases} \frac{1}{2}(|z|^2 - 1) & \textit{falls } 1 \leq |z| \leq \sqrt{\sqrt{2}+1}, \\ (|z|^{-2}+1)^{-1} & \textit{falls } \sqrt{\sqrt{2}+1} \leq |z| \leq \sqrt{3}; \end{cases}$

für $\varepsilon = \pm 1$ *reduziert für* $\sqrt{\sqrt{2}+1} \leq |z| \leq \sqrt{3}$, $(|z|^{-2}+1)^{-1} \leq -\varepsilon x \leq \frac{1}{2}(|z|^2 - 1)$.

Satz 7: *Sämtliche vierdimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten nicht ganzer Modulsubstitutionen, die Δ-reduzierte Punkte enthalten, sind in impliziter Darstellung durch*

(17) $$\det(Z + S) = -1$$

gegeben, wobei für S die Matrizen

(18) $$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & e \\ e & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & e \end{pmatrix} \quad (e = \pm 1)$$

einzusetzen sind. Eine explizite Darstellung ist

(19) $$Z + S = F' P' \begin{pmatrix} h+i & 0 \\ 0 & -h+i \end{pmatrix} P F,$$

wobei

$$F = \begin{pmatrix} g_1 & g_3 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}, h = \sqrt{(g_1 g_2)^{-2} - 1}$$

gilt.

Die notwendigen und hinreichenden Reduktionsbedingungen für die vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten sollen nicht angegeben werden, weil dazu zu komplizierte Rechnungen erforderlich wären und wir diese Reduktionsbedingungen ohnehin nicht brauchen werden.

§ 2. Allgemeines über die Fixpunktmannigfaltigkeiten

Zum Beweis von Satz 1 bemerken wir zunächst, daß nach (7) und (8) für jede Menge $\Omega \subset \Delta$ die Beziehung

(20) $$\Delta(\mathfrak{H}(\Omega)) \supset \Omega$$

und für jede Menge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ die Beziehung

(21) $$\mathfrak{H}(\Delta(\mathfrak{M})) \supset \mathfrak{M}$$

gilt. Ist daher zunächst $\mathfrak{M}$ ausgezeichnet, also $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}(\Omega)$, so folgt aus (20) die Beziehung

$$\mathfrak{H}(\Delta(\mathfrak{M})) = \mathfrak{H}\big(\Delta(\mathfrak{H}(\Omega))\big) \subset \mathfrak{H}(\Omega) = \mathfrak{M}\,.$$

Zusammen mit (21) ergibt sich also (9). Wenn umgekehrt (9) erfüllt ist, so ist $\mathfrak{M}$ ausgezeichnet; man wähle in Definition 1 nämlich $\Omega = \Delta(\mathfrak{M})$. Damit ist die erste Behauptung von Satz 1 bewiesen. Ganz entsprechend beweist man, daß Ω dann und nur dann ausgezeichnet ist, wenn (10) gilt. Sind nun $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zwei ausgezeichnete Untermengen von $\mathfrak{H}$ und gilt $\Delta(\mathfrak{M}_1) = \Delta(\mathfrak{M}_2)$, so folgt $\mathfrak{H}(\Delta(\mathfrak{M}_1)) = \mathfrak{H}(\Delta(\mathfrak{M}_2))$ und nach (9) dann $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$. Also ist die Zuordnung (11) eineindeutig. Ferner ist (11) eine Aufabbildung; denn ist Ω eine beliebige ausgezeichnete Untergruppe von Δ, so ist Ω aufgrund von (10) bei (11) Bild von $\mathfrak{H}(\Omega)$. Schließlich ist für ausgezeichnetes $\mathfrak{M}$ das Bild von $\Delta(\mathfrak{M})$ bei (12) aufgrund von (9) gleich $\mathfrak{M}$, d. h. (12) ist die Umkehrung von (11). Damit ist Satz 1 bewiesen.

In [4] wird bewiesen, daß es zu zwei verschiedenen vorgegebenen Punkten $Z_0, Z_1 \in \mathfrak{H}$ eine symplektische Abbildung gibt, die Z_0 in iE und gleichzeitig Z_1 in iG abbildet, wobei G eine n-reihige Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente $g_1, \ldots, g_n$ den Bedingungen $1 \leqq g_1 \leqq \cdots \leqq g_n$ genügen. Die durch Z_0, Z_1 eindeutig bestimmte geodätische Linie geht dabei in die Kurve

$$Z(r) = iG^r \qquad (r \text{ reell}) \tag{22}$$

über, wobei G^r die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $g_1^r, \ldots, g_n^r$ ist. Der Punkt $Z = iE$ ist dann und nur dann Fixpunkt bei der Abbildung (5), wenn $A = D$, $B = -C$ ist. Aus (3) folgt dann, daß die Matrix $U = D + iC$ unitär ist. Ist außerdem auch iG Fixpunkt bei (5), so ergibt sich $DG = GD$, $GCG = C$ und daraus

$$DG^r = G^r D\,, \quad G^r C G^r = C \qquad (r \text{ reell})\,.$$

Nach (22) bleibt also mit zwei Fixpunkten auch die durch diese bestimmte geodätische Linie punktweise fest. Mit Definition 1 und Definition 3 folgt daher Satz 2 a). Bringt man ferner den Fixpunkt iE durch die Abbildung

$$W = (Z - iE)(Z + iE)^{-1} \tag{23}$$

nach 0, so lautet die Fixpunktgleichung (6) einfach

$$\bar{U} W = W U \qquad (U = D + iC \text{ unitär})\,. \tag{24}$$

Der Bereich $\mathfrak{H}$ geht bei der Abbildung (23) in den Bereich der komplexen symmetrischen Matrizen W über, für die die hermitische Matrix

$$E - W\bar{W} > 0 \tag{25}$$

positiv definit ist. Eine nicht leere ausgezeichnete Menge $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}(\Omega)$, die den Punkt iE enthält, geht aufgrund von Definition 1 und Gleichung (7) bei der Abbildung (23) in die Menge $\mathfrak{W}$ derjenigen Lösungen eines Gleichungssystems

$$\bar{U}^{(k)} W = W U^{(k)} \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{26}$$

über, die die Bedingung (25) erfüllen. Dabei gilt jeweils $U^{(k)} = D^{(k)} + iC^{(k)}$,

wobei die Paare $C^{(k)}$, $D^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, m)$ die zweiten Matrizenzeilen der Modulmatrizen aus Ω sind. Weil $\mathfrak{M}$ nicht leer ist, ist Ω eine endliche Menge. Weil das Gleichungssystem (26) linear ist, bilden seine Lösungen einen Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen. Daraus folgt Satz 2b) und c). Zum Beweis von Satz 2d) beachten wir, daß die symplektische Gruppe Σ bei der Abbildung (23) in die Gruppe $L\Sigma L^{-1}$ mit $L = \begin{pmatrix} E & -iE \\ E & iE \end{pmatrix}$ übergeht, die aus allen $2n$-reihigen komplexen Matrizen

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ \overline{Q} & \overline{P} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad PQ' = QP',\ P\overline{P}' - Q\overline{Q}' = E \tag{27}$$

besteht. Wir haben dann zu zeigen, daß die Gruppe derjenigen Matrizen (27), die $\mathfrak{W}$ in sich überführen, auf $\mathfrak{W}$ transitiv ist. Hierzu sei W_0 ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{W}$. Dann können wir

$$W_0 \overline{W}_0 = U_0 \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{k_1} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \lambda_r E_{k_r} \end{pmatrix} \overline{U}_0' \tag{28}$$

schreiben, wobei U_0 eine unitäre Matrix ist, ferner $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $W_0 \overline{W}_0$ sind und schließlich k_ν die Vielfachheit von λ_ν $(\nu = 1, \ldots, r)$ und E_{k_ν} die k_ν-reihige Einheitsmatrix ist. Setzen wir jetzt

$$P = U_0 \begin{pmatrix} (1-\lambda_1)^{-\frac{1}{2}} E_{k_1} \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots \\ 0 & \cdots\ (1-\lambda_r)^{-\frac{1}{2}} E_{k_r} \end{pmatrix} \overline{U}_0', \quad Q = -P W_0, \tag{29}$$

so sind die Bedingungen für P und Q in (27) erfüllt und W_0 geht bei der Substitution (27) in 0 über, so daß zum Beweis von Satz 2d) nur noch zu zeigen bleibt, daß die Substitution (27) jeden weiteren Punkt $W \in \mathfrak{W}$ wieder in einen Punkt von $\mathfrak{W}$ überführt. Dies bedeutet nach (26), daß die Gleichungen

$$\overline{U}^{(k)} (PW + Q)(\overline{Q}W + \overline{P})^{-1} = (PW + Q)(\overline{Q}W + \overline{P})^{-1} U^{(k)} \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{30}$$

bewiesen werden müssen. Wegen $W_0 \in \mathfrak{W}$ sind die beiden Matrizen $W_0 \overline{W}_0$ und $\overline{U}^{(k)}$ für jedes $k = 1, \ldots, m$ nach (26) vertauschbar. Das bedeutet nach (28) die Gleichungen

$$\overline{U}^{(k)} = U_0 \begin{pmatrix} U_{k_1}^{(k)} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & U_{k_r}^{(k)} \end{pmatrix} \overline{U}_0' \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

wobei $U_{k_\nu}^{(k)}$ eine k_ν-reihige unitäre Matrix ist. Nach (29) sind dann die beiden Matrizen P und $\overline{U}^{(k)}$ für jedes $k = 1, \ldots, m$ vertauschbar. Nach (26) und (29) erhalten wir so

$$\overline{U}^{(k)} P = P \overline{U}^{(k)}, \quad \overline{U}^{(k)} Q = Q U^{(k)} \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Diese Beziehungen liefern zusammen mit (26) schließlich die Gleichung (30). Damit ist Satz 2d) bewiesen.

Zum Beweis von Satz 2 e) betrachten wir schließlich die Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}$. Weil Δ abzählbar ist, gibt es auch nur abzählbar viele endliche Untergruppen von Δ. Es seien $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ die paarweise verschiedenen der Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}$. Wir beweisen dann

(31) $$\mathfrak{M} = \mathfrak{H}(\Delta_1) \cup \mathfrak{H}(\Delta_2) \cup \cdots.$$

Aufgrund der Definition der Gruppen $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ gibt es zu jedem $Z \in \mathfrak{M}$ ein k mit $Z \in \mathfrak{H}(\Delta_k)$; also gilt

(32) $$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}(\Delta_1) \cup \mathfrak{H}(\Delta_2) \cup \cdots.$$

Andererseits gilt für jedes $k = 1, 2, \ldots$ die Beziehung $\Delta(\mathfrak{M}) \subset \Delta_k$, also $\mathfrak{H}(\Delta(\mathfrak{M})) \supset \mathfrak{H}(\Delta_k)$. Aufgrund von (9) folgt $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{H}(\Delta_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und daher

$$\mathfrak{M} \supset \mathfrak{H}(\Delta_1) \cup \mathfrak{H}(\Delta_2) \cup \cdots.$$

Dies liefert zusammen mit (32) die Beziehung (31). Aus (31) folgt, daß es mindestens ein k mit $\dim \mathfrak{H}(\Delta_k) = \dim \mathfrak{M}$ gibt. Das sei etwa für $k = 1$ der Fall. Weil $\mathfrak{H}(\Delta_1)$ und $\mathfrak{M}$ ausgezeichnete Punktmengen sind, ergibt sich dann aus Satz 2c) die Beziehung $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}(\Delta_1)$, also

(33) $$\Delta(\mathfrak{M}) = \Delta(\mathfrak{H}(\Delta_1)).$$

Nun sind die Gruppen $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ aufgrund von Definition 2 sämtlich ausgezeichnete Untergruppen von Δ, weil es zu jedem $k = 1, 2, \ldots$ Punkte Z mit $\Delta_k = \Delta(Z)$ gibt. Aus (10) und (33) ergibt sich also $\Delta(\mathfrak{M}) = \Delta_1$. Damit ist Satz 2 e) und somit Satz 2 vollständig bewiesen.

§ 3. Die Fixpunkte ganzer Modulsubstitutionen im Falle $n = 2$

Im Falle $n = 2$ setzen wir

(34) $$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_3 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Die Definitionsungleichungen (13) für den Bereich $\mathfrak{S}$ lauten dann

(35) $$\frac{1}{2} \geqq x_1, x_2, x_3 \geqq -\frac{1}{2}.$$

Die Minkowskischen Reduktionsbedingungen, die nach (14) für die Punkte aus $\mathfrak{S}$ ebenfalls erfüllt sein sollen, sind für $n = 2$ bekanntlich, wie u. a. in [3] gezeigt wird, eine Folge der drei Ungleichungen

(36) $$y_2 \geqq y_1 \geqq 2y_3 \geqq 0.$$

Unsere Aufgabe ist es nun, diejenigen Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{H}(G)$ $(G \in \Gamma)$ zu bestimmen, die Γ-reduzierte Punkte enthalten. Schreiben wir die Fixpunktgleichung (6) für eine ganze Modulmatrix (4) an, so erhalten wir

(37) $$Z = UZU' + S,$$

oder in Real- und Imaginärteil aufgespalten

(38) $$Y = UYU', \quad X = UXU' + S.$$

Die Lösungen der ersten der Gleichungen (38) sind die Fixpunkte unimodularer Substitutionen im Raume $\mathfrak{S}$ der positiven symmetrischen Matrizen. Über diese Fixpunkte gilt

Lemma 1: *Die Gruppe der unimodularen zweireihigen Matrizen besitzt im Raume $\mathfrak{S}$ der positiven symmetrischen zweireihigen Matrizen genau folgende Fixpunktmannigfaltigkeiten, die Punkte mit der Eigenschaft* (36) *enthalten:*

$$(39)\qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \text{ mit der Gruppe } \Gamma_1^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$(40)\qquad Y = \begin{pmatrix} y & y_3 \\ y_3 & y \end{pmatrix} \text{ mit der Gruppe } \Gamma_2^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$(41)\qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 & \frac{1}{2} y_1 \\ \frac{1}{2} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \text{ mit der Gruppe } \Gamma_3^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$(42)\qquad Y = y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit der Gruppe } \Gamma^{(4)} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$(43)\qquad Y = y\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ mit der Gruppe}$$

$$\Gamma^{(6)} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Hierbei müssen natürlich stets zwei unimodulare Matrizen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, identifiziert werden. Zum Beweis von Lemma 1 beachten wir, daß die Gleichung

$$(44)\qquad y_1\xi^2 + 2y_3\xi\eta + y_2\eta^2 = \frac{2i}{z-\bar z}(\xi - z\eta)(\xi - \bar z\eta) \qquad (\det Y = 1),$$

in der ξ, η Unbestimmte sind, eine eineindeutige Abbildung der oberen z-Halbebene auf die Fläche $\det Y = 1$ im Raume $\mathfrak{S}$ liefert. Der unimodularen Substitution $Y \to U Y U'$ $\left(U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right)$ im Raume $\mathfrak{S}$ entspricht dabei in der z-Ebene die Substitution

$$(45)\qquad z \to \frac{dz - b}{-cz + a}, \text{ falls } ad - bc = 1; \quad z \to \frac{d\bar z - b}{-c\bar z + a}, \text{ falls } ad - bc = -1.$$

Der durch (36) definierte Minkowskische Fundamentalbereich geht ferner in die linke Hälfte des bekannten Fundamentalbereiches der elliptischen Modulgruppe über, der durch

$$(46)\qquad |x| \leq \frac{1}{2}, \quad |z| \geq 1 \qquad (2x = z + \bar z)$$

gegeben ist und z. B. ausführlich in [2] behandelt wird. Die in der linken Hälfte des durch (46) definierten Bereiches liegenden Fixpunkte der aus den Substitutionen (45) bestehenden Gruppe sind durch $x = 0$, $|z| = 1$, $x = -\frac{1}{2}$, $z = i$, $z = \varrho$ gegeben. Diese liefern mittels (44) in der angegebenen Reihenfolge genau die in Lemma 1 angegebenen Fixpunkte.

Aus Lemma 1 ergibt sich, daß für eine ganze Modulmatrix (4), für die $\mathfrak{H}(G) \cap \mathfrak{S}$ nicht leer ist, die unimodulare Matrix U in einer der fünf Gruppen $\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_2^{(2)}, \Gamma_3^{(2)}, \Gamma^{(4)}, \Gamma^{(6)}$ liegen muß. Wir beachten noch, daß

$$\Gamma^{(3)} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

eine zyklische Untergruppe der Ordnung 3 von $\Gamma^{(6)}$ ist. Dann folgt, daß man bereits alle Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{H}(G)$ ($G \in \Gamma$, $\mathfrak{H}(G) \cap \mathfrak{S}$ nicht leer, $\dim \mathfrak{H}(G) < 6$) erhält, wenn in der Fixpunktgleichung (37) für U nacheinander die sechs Matrizen

$$U = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

eingesetzt werden. Aus (34) und (37) erhalten wir dann nacheinander

$$S = Z - UZU' = \begin{pmatrix}0 & 2z_3\\ 2z_3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}z_1 - z_2 & 0\\ 0 & z_2 - z_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2z_3 - z_1\\ 2z_3 - z_1 & 2z_3 - z_1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2z_3 - z_2 & 2z_3 - z_2\\ 2z_3 - z_2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}z_1 - z_2 & 2z_3\\ 2z_3 & z_2 - z_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}z_1 - z_2 & 2z_3 - z_2\\ 2z_3 - z_2 & 2z_3 - z_1\end{pmatrix}.$$

Beachten wir die Ganzzahligkeit von S und die Ungleichungen (35), so ergeben sich in den sechs Fällen für S die Möglichkeiten

$$S = \begin{pmatrix}0 & e\\ e & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & -\varepsilon\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & e\\ e & e\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}e & e\\ e & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varepsilon & e\\ e & -\varepsilon\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varepsilon & e\\ e & e - \varepsilon\end{pmatrix}.$$

Dabei sind sowohl für e als auch für ε jeweils die drei Werte $-1, 0, 1$ zugelassen, wobei im letzten Fall allerdings noch $|e - \varepsilon| \leqq 1$ sein muß. Setzen wir noch im zweiten, fünften und sechsten Fall $z_1 + z_2 = 2z$, so erhalten wir genau die sechs Parameterdarstellungen von Satz 3 und Satz 4. Die Behauptungen über die Dimension des Durchschnitts $\mathfrak{H}(G) \cap \mathfrak{S}$ in diesen beiden Sätzen sind leicht zu verifizieren. Damit sind dann Satz 3 und Satz 4 vollständig bewiesen.

§ 4. Die Fixpunktmannigfaltigkeiten nicht ganzer Modulsubstitutionen im Falle $n = 2$

Weil der Imaginärteil Y eines Punktes $Z \in \mathfrak{H}$ positiv definit ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Dreiecksmatrix

$$F = \begin{pmatrix}g_1 & g_3\\ 0 & g_2\end{pmatrix} \qquad (g_1, g_2 > 0) \tag{47}$$

mit der Eigenschaft

$$Y = F'F. \tag{48}$$

Die ersten beiden Hilfssätze dieses Paragraphen gelten noch für beliebiges n. In ihnen ist daher F naturgemäß eine n-reihige Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen.

Lemma 2: *Der Punkt $Z = X + iY$ sei Fixpunkt bei der Modulsubstitution $M = \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$. Dann gelten die folgenden drei Aussagen:*

a) *Es gibt eine durch Z und M eindeutig bestimmte unitäre Matrix U mit der Eigenschaft*

$$CZ + D = F^{-1}UF\,, \quad AZ + B = ZF^{-1}UF\,. \tag{49}$$

b) *Werden mit F, sowie mit dem Realteil R und dem Imaginärteil T von U die beiden Matrizen*

$$G = \begin{pmatrix} F' & XF^{-1} \\ 0 & F^{-1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} R & -T \\ T & R \end{pmatrix} \tag{50}$$

gebildet, so sind G und Q symplektisch, ferner Q orthogonal, und es gilt

$$G^{-1}MG = Q\,. \tag{51}$$

c) *Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von U, so besitzt M die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n; \bar\lambda_1, \ldots, \bar\lambda_n$.*

Beweis: Nach (5) ist der Imaginärteil von $M(Z)$ durch

$$(C\bar{Z} + D)'^{-1}\, Y (CZ + D)^{-1}$$

gegeben. Weil nun nach Voraussetzung $Z = M(Z)$ ist, gilt für die Imaginärteile

$$Y = (C\bar{Z} + D)'^{-1}\, Y (CZ + D)^{-1}.$$

Diese Gleichung bedeutet nach (48), daß $U = F(CZ + D)F^{-1}$ unitär ist. Da F durch Y eindeutig bestimmt ist, ist U durch Z und M eindeutig bestimmt. Damit ist Lemma 2 a) bewiesen. Die Matrix G erfüllt die Bedingung (1) bzw. (3), ist also symplektisch. Außerdem führt sie den Punkt iE in den Punkt $Z = X + iF'F$ über. Weil M nach Voraussetzung den Fixpunkt Z hat, besitzt daher $G^{-1}MG$ den Fixpunkt iE. Alle symplektischen Matrizen mit dem Fixpunkt iE sind aber, wie in [4] gezeigt wird, von der Form $Q = \begin{pmatrix} R & -T \\ T & R \end{pmatrix}$, wobei $R + iT$ beliebig unitär ist. Da aus (50) und (51) auch wieder die Gleichungen (49) folgen, falls $R + iT = U$ gesetzt wird, ergibt sich Lemma 2 b). Aus (51) folgt, daß M und Q die gleichen Eigenwerte besitzen. Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} E & E \\ iE & -iE \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R & -T \\ T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & E \\ iE & -iE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{U} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \tag{52}$$

liefert dann Lemma 2c). Damit ist Lemma 2 vollständig bewiesen.

Lemma 3: *Es sei $M \in \Delta$ und $\mathfrak{H}(M)$ nicht leer. Die unitären Matrizen U, die aufgrund von Lemma 2a) den Paaren Z, M mit $Z \in \mathfrak{H}(M)$ zugeordnet sind, besitzen alle die gleichen Eigenwerte. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ diese Eigenwerte und sind von den $\frac{1}{2}n(n+1)$ Zahlen $\lambda_k \lambda_l$ $(k, l = 1, \ldots, n;\ k \leq l)$ genau m gleich 1, so gilt für die reelle Dimension von $\mathfrak{H}(M)$ die Beziehung* $\dim \mathfrak{H}(M) = 2m$.

Beweis: Die Eigenwerte von U sind nach (49) bei vorgegebenem M stetige Funktionen von Z, die aufgrund von Lemma 2c) höchstens $2n$ verschiedene Werte annehmen können. Außerdem ist $\mathfrak{H}(M)$ nach Satz 2a) zusammenhängend. Variiert daher Z auf $\mathfrak{H}(M)$, so können sich die Eigenwerte von U nicht ändern. Die Behauptung über die Dimension von $\mathfrak{H}(M)$ ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß die Fixpunktgleichung in der Form (24) geschrieben werden kann und dabei die dort verwendete unitäre Matrix U mit

der in Lemma 2 verwendeten übereinstimmt. Weil nämlich der Bereich (25) bei der Substitution $W \to V W V'$ (V unitär), die von der Art (27) ist, in sich übergeht, können wir in (24) noch voraussetzen, daß U Diagonalgestalt hat. Schreiben wir dann die Gleichung (24) in der Form $U' W U = W$, so folgt unmittelbar die zweite Behauptung von Lemma 3. Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Lemma 4: *Das charakteristische Polynom* $\Phi(\lambda) = \det(M - \lambda E_{2n})$ *einer Modulmatrix* M *vom Grade* $n = 2$, *deren Fixpunktmannigfaltigkeit* $\mathfrak{H}(M)$ *nicht leer ist, setzt sich aus den folgenden Faktoren* $\Phi_1 = \lambda - 1$, $\Phi_2 = \lambda + 1$, $\Phi_3 = \lambda^2 + \lambda + 1$, $\Phi_4 = \lambda^2 + 1$, $\Phi_5 = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$, $\Phi_6 = \lambda^2 - \lambda + 1$, $\Phi_8 = \lambda^4 + 1$, $\Phi_{10} = \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$, $\Phi_{12} = \lambda^4 - \lambda^2 + 1$ *zusammen, die über dem Körper der rationalen Zahlen irreduzibel sind.*

Beweis: Weil Δ in $\mathfrak{H}$ diskontinuierlich ist, hat jede Matrix $M \in \Delta$, die einen Fixpunkt in $\mathfrak{H}$ besitzt, endliche Ordnung. Das bedeutet insbesondere, daß die Eigenwerte von M Einheitswurzeln sind. Die über dem Körper der rationalen Zahlen irreduziblen Faktoren des charakteristischen Polynoms von M sind daher Kreisteilungspolynome. Es genügt dann offenbar zu beweisen, daß die in Lemma 4 angegebenen Polynome genau alle Kreisteilungspolynome mit einem Grad $\leqq 4$ sind. Der Grad $\varphi(h)$ des h-ten Kreisteilungspolynoms $\Phi_h(\lambda)$ ist durch

$$\varphi(h) = h\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$$

gegeben, wobei $p_1, \ldots, p_m$ die in h aufgehenden verschiedenen Primfaktoren sind. Wegen $h \geqq p_1 \cdots p_m$ gilt die Abschätzung $\varphi(h) \geqq (p_1 - 1) \cdots (p_m - 1)$. Für $m \geqq 3$ wäre dann $\varphi(h) \geqq (2-1)(3-1)(5-1) = 8$. Also kommen nur die Werte $m = 1, 2$ in Betracht. Weil ferner $\varphi(h) \geqq p_\nu - 1$ ($\nu = 1, \ldots, m$) ist, kommen für die Faktoren $p_1, \ldots, p_m$ nur die Primzahlen 2, 3, 5 in Frage. Für h sind daher außer $h = 1$ nur die Ansätze $h = 2^\nu; 3^\nu; 5^\nu; 2^\nu 3^\mu; 2^\nu 5^\mu; 5^\nu 3^\mu$ möglich. Leichte Abschätzungen ergeben in den ersten fünf Fällen die Möglichkeiten $h = 2, 4, 8; 3; 5; 6, 12; 10$. Im letzten Falle $h = 5^\nu 3^\mu$ ist stets $\varphi(h) \geqq 8$. Damit ist Lemma 4 bewiesen.

Lemma 5: *Um die Fixpunktmannigfaltigkeiten* $\mathfrak{H}(M)$ *im Falle* $n = 2$ *zu bestimmen, genügt es in den Gleichungen* (49) *nur solche Modulmatrizen* M *zuzulassen, deren charakteristisches Polynom* Φ *eins der zwölf Polynome* Φ_5, Φ_8, Φ_{12}, Φ_3^2, Φ_4^2, $\Phi_3\Phi_4$, $\Phi_3\Phi_6$, $\Phi_3\Phi_1^2$, $\Phi_3\Phi_2^2$, $\Phi_4\Phi_1^2$, $\Phi_4\Phi_2^2$, $\Phi_1^2\Phi_2^2$ *ist.*

Beweis: Weil Φ ein Polynom vierten Grades ist, dessen irreduzible Faktoren unter den in Lemma 4 angegebenen Polynomen vorkommen, bestehen für Φ außer den in Lemma 5 angegebenen Möglichkeiten nur noch zwölf weitere, nämlich

$$\Phi_1\Phi_2\Phi_3, \quad \Phi_1\Phi_2\Phi_4, \quad \Phi_1\Phi_2\Phi_6, \quad \Phi_1\Phi_2^3, \quad \Phi_1^3\Phi_2, \tag{53}$$

$$\Phi_{10}, \quad \Phi_6^2, \quad \Phi_4\Phi_6, \quad \Phi_6\Phi_1^2, \quad \Phi_6\Phi_2^2 \tag{54}$$

und Φ_1^4, Φ_2^4. Die Polynome (53) enthalten Φ_2 in einer ungeraden Potenz. Das hat zur Folge, daß das Produkt aller Wurzeln eines dieser Polynome gleich -1 ist. Andererseits ist das Produkt der Wurzeln des charakteristischen Polynoms

von M gleich $\det M$. Aus (1) folgt aber, wie in [5] gezeigt wird, daß für jede symplektische Matrix $\det M = 1$ ist. Die Polynome (53) können also nicht charakteristische Polynome von Modulmatrizen sein. Aus (5) folgt, daß die beiden Matrizen $\pm M$ dieselbe Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich liefern. Von zwei charakteristischen Polynomen, die dadurch auseinander hervorgehen, daß sämtliche Wurzeln mit -1 multipliziert werden, braucht also bei der Fixpunktbestimmung nur eins berücksichtigt zu werden. Die Polynome (54) gehen aber gerade aus den in Lemma 5 vorkommenden Polynomen Φ_5, Φ_3^2, $\Phi_4\Phi_3$, $\Phi_3\Phi_1^2$, $\Phi_3\Phi_2^2$ dadurch hervor, daß deren Wurzeln mit -1 multipliziert werden. Die einzigen Modulmatrizen, die Φ_1^4 bzw. Φ_2^4 als charakteristisches Polynom besitzen und deren Fixpunktmannigfaltigkeit nicht leer ist, sind $\pm E_{2n}$. Die Fixpunktmannigfaltigkeit $\mathfrak{H}(\pm E_{2n})$ ist aber ganz $\mathfrak{H}$ und braucht nicht näher untersucht zu werden. Damit ist Lemma 5 bewiesen.

Lemma 6: *Jede zweireihige unitäre Matrix U mit zwei verschiedenen Eigenwerten $e^{i\sigma}$, $e^{i\tau}$ $(0 < \sigma < \tau \leqq 2\pi)$ kann in der Form*

$$U = V\begin{pmatrix} e^{i\sigma} & 0 \\ 0 & e^{i\tau} \end{pmatrix} V^{-1} \quad \textit{mit} \quad V = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\, e^{i\varphi} \\ -\sin\alpha\, e^{-i\varphi} & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{55}$$

geschrieben werden, wobei die reellen Zahlen α, φ den Bedingungen

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2};\ 0 \leqq \varphi < 2\pi \quad \textit{oder} \quad \alpha = 0, \frac{\pi}{2};\ \varphi = 0 \tag{56}$$

genügen. Ferner sind α und φ durch U und (56) eindeutig bestimmt. Im Falle $\sigma = \tau$ gilt $U = e^{i\sigma}E$, wobei E die zweireihige Einheitsmatrix ist.

Beweis: Zu jeder unitären Matrix U gibt es eine weitere unitäre Matrix V_0 mit der Eigenschaft, daß $V_0^{-1} U V_0$ Diagonalgestalt hat. Dabei kann die Reihenfolge der Diagonalelemente von $V_0^{-1} U V_0$, die mit den Eigenwerten von U übereinstimmen, noch vorgeschrieben werden. Die Matrix V_0 ist durch U bis auf einen rechtsseitigen unitären Faktor bestimmt, der mit $\begin{pmatrix} e^{i\sigma} & 0 \\ 0 & e^{i\tau} \end{pmatrix}$ vertauschbar ist. Wegen $e^{i\sigma} \neq e^{i\tau}$ muß dieser rechtsseitige Faktor Diagonalgestalt haben. Wir können also

$$V = V_0 \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{i\chi} \end{pmatrix} \qquad (\psi, \chi \text{ reell})$$

ansetzen und wollen ψ, χ so bestimmen, daß V die in (55) angegebene Gestalt bekommt. Ist $(a\ b)$ die erste Zeile von V_0, so gilt, weil V_0 unitär ist, die Gleichung $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. Wir setzen $a\bar{a} = \cos^2\alpha$, $b\bar{b} = \sin^2\alpha$. Offenbar ist α durch U unter der Bedingung $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ eindeutig bestimmt. Im Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ hat V_0 die Gestalt $V_0 = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\beta} \\ e^{i\gamma} & 0 \end{pmatrix}$. Wählt man $\psi = \pi - \gamma$, $\chi = -\beta$, so wird $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ist $0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$, so können wir durch geeignete Wahl von ψ, χ erreichen, daß $a e^{i\psi}$ reell und positiv und ferner $\det V = 1$ wird. Unter diesen Bedingungen hat V notwendig die in (55) angegebene Gestalt. Die beiden Zahlen $e^{i\psi}$, $e^{i\chi}$ sind dabei in jedem Falle durch die an sie gestellten Forderungen eindeutig bestimmt. Die Behauptung über die Gestalt von U im Falle $\sigma = \tau$ ergibt sich unmittelbar daraus, daß jede unitäre Matrix durch eine unitäre

Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalgestalt gebracht werden kann. Damit ist Lemma 6 bewiesen.

Lemma 7: *Es sei M eine Modulmatrix und $\mathfrak{H}(M)$ nicht leer, ferner m die kleinste natürliche Zahl mit $M^m = E_{2n}$. Für jede ganze Zahl k, für die der größte gemeinsame Teiler (k, m) von k und m gleich 1 ist, stimmt das charakteristische Polynom von M^k mit dem von M überein und es gilt $\mathfrak{H}(M^k) = \mathfrak{H}(M)$.*

Beweis: Weil jeder Fixpunkt von M auch Fixpunkt von M^k ist, gilt $\mathfrak{H}(M) \subset \mathfrak{H}(M^k)$. Wegen $(k, m) = 1$ gibt es eine ganze Zahl l mit $(M^k)^l = M$, woraus sich $\mathfrak{H}(M^k) \subset \mathfrak{H}(M)$ ergibt. Sind dann $\Phi_{s_1}, \ldots, \Phi_{s_r}$ genau die verschiedenen im charakteristischen Polynom von M aufgehenden irreduziblen Faktoren, so ist m offenbar das kleinste gemeinsame Vielfache von $s_1, \ldots, s_r$. Aus $(k, m) = 1$ folgt dann erst recht $(k, s_\nu) = 1$ $(\nu = 1, \ldots, r)$. Die k-ten Potenzen der Wurzeln von Φ_{s_ν} stimmen daher in einer geeigneten Reihenfolge mit den Wurzeln von Φ_{s_ν} selbst überein. Daraus und aus der Tatsache, daß die Eigenwerte von M^k gerade die k-ten Potenzen der Eigenwerte von M sind, folgt, daß die charakteristischen Polynome von M und M^k übereinstimmen. Damit ist Lemma 7 bewiesen.

Lemma 8: *Bei der Bestimmung der Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{H}(M)$ mit $M \in \Delta$ im Falle $n = 2$ genügt es, in den Fixpunktgleichungen* (49) *nur solche unitären Matrizen* (55) *zuzulassen, für die das Paar rationaler Zahlen $\frac{\sigma}{2\pi}, \frac{\tau}{2\pi}$ eins der folgenden siebzehn Wertepaare ist:*

Tabelle

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII
Φ	Φ_5	Φ_8		Φ_{12}		Φ_3^2		Φ_4^2		$\Phi_6\Phi_3$		$\Phi_4\Phi_3$	$\Phi_3\Phi_1^2$	$\Phi_3\Phi_2^2$	$\Phi_4\Phi_1^2$	$\Phi_4\Phi_2^2$	$\Phi_2^2\Phi_1^2$
$\frac{\sigma}{2\pi}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\tau}{2\pi}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$
$\dim \mathfrak{H}(M)$	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2	2	2	2	4

Beweis: Es sei Φ eins der in Lemma 5 angegebenen Polynome, ferner M eine Modulmatrix mit dem charakteristischen Polynom Φ und $\mathfrak{H}(M)$ nicht leer. Für einen Punkt $Z \in \mathfrak{H}(M)$ seien λ, μ die Eigenwerte der unitären Matrix U, die aufgrund von Lemma 2a) dem Paar Z, M zugeordnet ist. Nach Lemma 3 ist es gleichgültig, welcher Punkt $Z \in \mathfrak{H}(M)$ dabei gewählt wird. Um bei vorgegebenem Φ alle Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{H}(M)$ zu bekommen, müßten nun für λ, μ alle Möglichkeiten betrachtet werden, für die die Zahlen $\lambda, \mu, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$ alle Wurzeln von Φ sind. Mit Hilfe von Lemma 7 ergeben sich aber einige dieser Möglichkeiten für λ, μ als überflüssig. Wir setzen

$$\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{s}}, \quad \mu = e^{2\pi i \frac{q}{t}}, \tag{57}$$

wobei p, s, q, t ganze Zahlen mit den Eigenschaften

(58) $(p, s) = 1, \quad 0 < p \leqq s, \quad (q, t) = 1, \quad 0 < q \leqq t, \quad t \leqq s$

sind. Hiernach ist λ eine s-te und μ eine t-te primitive Einheitswurzel. Aufgrund von Lemma 2c) besitzt Φ als irreduzible Faktoren nur Φ_s und Φ_t, wobei auch $s = t$ sein kann. Die in Lemma 7 definierte Zahl m ist das kleinste gemeinsame Vielfache von s und t.

Wir betrachten zuerst den Fall $s = t = m$, der für $\Phi = \Phi_5, \Phi_8, \Phi_{12}, \Phi_3^2, \Phi_4^2$ eintritt. Durchläuft in diesem Falle k alle mod m inkongruenten ganzen Zahlen mit $(k, m) = 1$, so durchläuft λ^k alle primitiven s-ten Einheitswurzeln, und λ^k ist Eigenwert der unitären Matrix, die aufgrund von Lemma 2a) dem Paar Z, M^k zugeordnet ist. Dem Paar Z, M^k ist nämlich wegen der Gleichungen (51) und (52) gerade die unitäre Matrix U^k zugeordnet. Indem also eventuell M durch eine geeignete Potenz M^k ersetzt wird, kann in (57) und (58) die Bedingung $p = 1$ vorausgesetzt werden. In der Schreibweise (55) der unitären Matrix U ist dann $\sigma = \frac{2\pi}{s}$. Für $\mu = e^{i\tau}$ kommen dann noch jeweils zwei Möglichkeiten in Betracht. Für $\Phi = \Phi_5, \Phi_8, \Phi_{12}$ kann nämlich μ noch gleich jeder der beiden von $e^{\pm\frac{2\pi i}{s}}$ verschiedenen Wurzeln von Φ sein; für $\Phi = \Phi_3^2, \Phi_4^2$ besitzt Φ nur die beiden Wurzeln $e^{\pm\frac{2\pi i}{s}}$, und μ kann gleich jeder dieser beiden Wurzeln sein. Die beiden für $\mu = e^{i\tau}$ in Frage kommenden Möglichkeiten werden durch die Bedingungen

(59) $\sigma \leqq \tau < 2\pi - \tau \leqq 2\pi - \sigma$, d. h. $1 \leqq q < t - q \leqq t - 1$

und

(60) $\sigma \leqq 2\pi - \tau < \tau \leqq 2\pi - \sigma$, d. h. $1 \leqq t - q < q \leqq t - 1$

unterschieden. Für $\Phi = \Phi_5$ können die beiden Fälle (59) und (60) noch durch Übergang von M zu einer geeigneten Potenz M^l ineinander übergeführt werden, für die Polynome $\Phi = \Phi_8, \Phi_{12}, \Phi_3^2, \Phi_4^2$ ist das nicht möglich. Es gibt nämlich genau eine Restklasse l mod m mit $(l, m) = 1$ und $\mu^l = e^{\frac{2\pi i}{s}}$. Für die Potenz $\lambda^l = e^{\frac{2\pi i l}{s}}$ kann nur $\lambda^l = \mu$ oder $\lambda^l = \bar{\mu}$ gelten, weil die vier Potenzen $\lambda^l, \mu^l, \bar{\lambda}^l, \bar{\mu}^l$ bis auf die Reihenfolge mit $\lambda, \mu, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$ übereinstimmen müssen. Wie leicht festzustellen ist, gilt $\lambda^l = \bar{\mu}$ für $\Phi = \Phi_5$ und $\lambda^l = \mu$ für $\Phi = \Phi_8, \Phi_{12}, \Phi_3^2, \Phi_4^2$. Das bedeutet: Im Falle $\Phi = \Phi_5$ besitzt U^l die Eigenschaft (60), falls U die Eigenschaft (59) besitzt und umgekehrt; in den Fällen $\Phi = \Phi_8, \Phi_{12}, \Phi_3^2, \Phi_4^2$ besitzen die Matrizen U und U^l entweder beide die Eigenschaft (59) oder beide die Eigenschaft (60). Daher braucht für $\Phi = \Phi_5$ nur eine der beiden Möglichkeiten (59) und (60) betrachtet zu werden. Die Möglichkeit (60) ist in Lemma 8 unter I angegeben. In den Fällen $\Phi = \Phi_8, \Phi_{12}, \Phi_3^2, \Phi_4^2$ müssen stets beide Möglichkeiten (59) und (60) betrachtet werden. Diese Möglichkeiten sind in Lemma 8 unter II bis IX angegeben.

Jetzt sei t ein Teiler von s und $1 \leqq t < s$, was für $\Phi = \Phi_3\Phi_6, \Phi_3\Phi_1^2, \Phi_4\Phi_1^2, \Phi_4\Phi_2^2, \Phi_2^2\Phi_1^2$ eintritt. Hier ist $m = s$ und es gibt genau eine Potenz M^k mit

$(k, m) = 1$ und $\lambda^k = e^{\frac{2\pi i}{s}}$. Wir ersetzen M durch diese Potenz und können dann in (57) und (58) wieder $p = 1$ voraussetzen, so daß in der Schreibweise (55) der unitären Matrix U die Beziehung $\sigma = \frac{2\pi}{s}$ gilt. Für $\mu = e^{i\tau}$ kommen dann noch die beiden konjugiert komplexen Wurzeln von Φ_t bzw. Φ_t^2 in Betracht. Für $\Phi = \Phi_3\Phi_6$ sind diese beiden Möglichkeiten in Lemma 8 unter X und XI angegeben. Für $s, t = 3, 1;\ 4, 1;\ 4, 2;\ 2, 1$ gilt $\mu = \bar{\mu}$, so daß die beiden Möglichkeiten zusammenfallen. Man vergleiche in Lemma 8 die Fälle XIII und XV bis XVII.

Schließlich bleiben in Lemma 5 noch zwei charakteristische Polynome, für die $1 < t < s$ und $(s, t) = 1$ gilt, nämlich $\Phi = \Phi_4\Phi_3$, $\Phi_3\Phi_2^2$. Hierfür ist $m = st$. Es sei zuerst $s, t = 4, 3$ also $m = 12$. Die mod 12 inkongruenten Zahlen k mit $(k, 12) = 1$ sind $k = 1, 5, 7, 11$. Für jede der beiden Wurzeln λ von Φ_4 gilt $\lambda = \lambda^5 \neq \lambda^7 = \lambda^{11}$; für jede der beiden Wurzeln μ von Φ_3 gilt $\mu = \mu^7 \neq \mu^5 = \mu^{11}$. Daraus folgt, daß es stets eine Potenz M^k mit $(k, 12) = 1$ so gibt, daß $\lambda^k = e^{\frac{2\pi i}{4}}$ und $\mu^k = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ist. Für $\Phi = \Phi_4\Phi_3$ braucht also nur die unter XII in Lemma 8 angegebene Möglichkeit betrachtet zu werden. Schließlich sei $s, t = 3, 2$ also $m = 6$. Hier kann, indem statt M eventuell M^5 betrachtet wird, angenommen werden, daß der unter XIV in Lemma 8 angegebene Fall vorliegt. Die Behauptungen in Lemma 8 über $\dim \mathfrak{H}(M)$ ergeben sich unmittelbar aus Lemma 3. Damit ist Lemma 8 bewiesen.

Wird die erste der Gleichungen (49) in Real- und Imaginärteil aufgespalten, so folgt

$$FCF' = T, \quad CX + D = F^{-1}RF. \tag{61}$$

Wir werden außerdem Gleichungen brauchen, die D, A, B durch C, Z, U ausdrücken. Es ergeben sich, wenn auch noch die zweite der Gleichungen (49) in Real- und Imaginärteil aufgespalten wird, nach einigen Umrechnungen die Beziehungen

$$D = F^{-1}RF - CX\,, \tag{62}$$

$$A' = F^{-1}R'F + C'X\,, \tag{63}$$

$$B = XF^{-1}RF - F'RF'^{-1}X - XCX - YCY\,. \tag{64}$$

Ferner werden wir wiederholt Ungleichungen benutzen, die sich aus den Reduktionsbedingungen ergeben. Eine ausführliche Untersuchung der Reduktionsbedingungen im Falle $n = 2$ findet man in [1]. Danach kommen unter den Ungleichungen (15) insbesondere die Ungleichungen

$$|z_1 + d| \geqq 1, \quad |z_2 + d| \geqq 1 \qquad (d \text{ ganz}) \tag{65}$$

vor. Die Minkowskischen Reduktionsbedingungen (36) schreiben sich nach (47) und (48) für die Matrix F in der Form

$$0 \leqq 2g_3 \leqq g_1\,, \quad g_1^2 \leqq g_2^2 + g_3^2. \tag{66}$$

Aus (35), (36) und (65) ergibt sich die Abschätzung

$$y_2 \geqq y_1 = g_1^2 \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}\ . \tag{67}$$

Zusammen mit (66) ergibt sich hieraus

$$g_1 g_2^{-1} \leqq \frac{2}{3}\sqrt{3} \tag{68}$$

und

$$g_2^2 \geqq \frac{3}{8}\sqrt{3}\ . \tag{69}$$

Aus (67) und (69) erhalten wir schließlich

$$\det Y = (g_1 g_2)^2 \geqq \frac{9}{16}\,. \tag{70}$$

Daß die mit Hilfe dieser Ungleichungen ermittelten Fixpunkte tatsächlich reduziert sind, werden wir in der Regel nicht nachweisen. Dies kann nämlich anhand der in [1] angegebenen notwendigen und hinreichenden Reduktionsbedingungen in jedem Fall leicht verifiziert werden.

Setzen wir nun $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_4 & c_2 \end{pmatrix}$, benutzen (47) und (55) und schreiben die erste der Gleichungen (61) in Komponentenform, so ergibt sich

$$c_1 g_1^2 + c_2 g_3^2 + (c_3 + c_4) g_1 g_3 = \cos^2\alpha \sin\sigma + \sin^2\alpha \sin\tau\,, \tag{71}$$

$$c_3 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = \sin 2\alpha \cos\left(\frac{\sigma+\tau}{2} + \varphi\right) \sin\frac{\tau-\sigma}{2}\,, \tag{72}$$

$$c_4 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = \sin 2\alpha \cos\left(\frac{\sigma+\tau}{2} - \varphi\right) \sin\frac{\tau-\sigma}{2}\,, \tag{73}$$

$$c_2 g_2^2 = \sin^2\alpha \sin\sigma + \cos^2\alpha \sin\tau\,. \tag{74}$$

Setzen wir ferner $D = \begin{pmatrix} d_1 & d_3 \\ d_4 & d_2 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} r_1 & r_3 \\ r_4 & r_2 \end{pmatrix}$, wobei

$$R = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha \cos\sigma + \sin^2\alpha \cos\tau & \sin 2\alpha \sin\left(\frac{\sigma+\tau}{2} + \varphi\right) \sin\frac{\sigma-\tau}{2} \\ \sin 2\alpha \sin\left(\frac{\sigma+\tau}{2} - \varphi\right) \sin\frac{\sigma-\tau}{2} & \sin^2\alpha \cos\sigma + \cos^2\alpha \cos\tau \end{pmatrix} \tag{75}$$

gilt, so liefert die zweite der Gleichungen (61), in Komponentenform geschrieben, die Beziehungen

$$c_1 x_1 + c_3 x_3 + d_1 = r_1 - r_4 g_3 g_2^{-1}\,, \tag{76}$$

$$c_4 x_3 + c_2 x_2 + d_2 = r_2 + r_4 g_3 g_2^{-1}\,, \tag{77}$$

$$c_1 x_3 + c_3 x_2 + d_3 = (r_1 - r_2) g_3 g_1^{-1} + r_3 g_2 g_1^{-1} - r_4 g_3^2 (g_1 g_2)^{-1}\,, \tag{78}$$

$$c_4 x_1 + c_2 x_3 + d_4 = r_4 g_1 g_2^{-1}\,. \tag{79}$$

Lemma 9: *Aus den Reduktionsbedingungen und den Gleichungen* (71) *bis* (74) *folgt* $\operatorname{abs} C \leqq 1$ *und* $|c_k| \leqq 1$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Beweis: Aus der ersten der Gleichungen (61) folgt unter Beachtung von (48) und (70) die Abschätzung

$$\operatorname{abs} C = \det Y^{-1} \operatorname{abs} T \leqq \frac{16}{9} \operatorname{abs} T .$$

Weil $U = R + iT$ unitär ist, gilt $RR' + TT' = E$, insbesondere also $\operatorname{abs} T \leqq 1$. Weil $\det C$ ganzzahlig ist, folgt damit $\operatorname{abs} C \leqq 1$. Aus (74) und (69) ergibt sich $|c_2| \leqq g_2^{-2} \leqq \frac{8}{9}\sqrt{3} < 2$. Aus (72) und (70) folgt zunächst

$$|c_3 + c_2 g_3 g_1^{-1}| \leqq (g_1 g_2)^{-1} \leqq \frac{4}{3} .$$

Wegen $|c_2| \leqq 1$ und (66) erhalten wir $|c_3| \leqq \frac{4}{3} + \frac{1}{2} < 2$. Entsprechend beweist man $|c_4| < 2$. Die Gleichung (71) liefert mit (67) schließlich

$$|c_1 + c_2 g_3^2 g_1^{-2} + (c_3 + c_4) g_3 g_1^{-1}| \leqq g_1^{-2} \leqq \frac{2}{3}\sqrt{3} . \tag{80}$$

Wenn $|c_3 + c_4| \leqq 1$ ist, folgt unter Beachtung von $|c_2| \leqq 1$ und (66) die Abschätzung

$$|c_1| \leqq \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{3}{4} < 2 . \tag{81}$$

Wenn $|c_3 + c_4| = 2$ ist, aber c_1 und $c_3 + c_4$ gleiches Vorzeichen haben, so gilt ($c_1 \neq 0$ angenommen) nach (80) sogar $|c_1| \leqq \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{4}$. Wir brauchen also nur noch den Fall zu untersuchen, in dem $|c_3 + c_4| = 2$ ist und c_1 und $c_3 + c_4$ verschiedenes Vorzeichen haben. Wir nehmen etwa $c_3 = c_4 = -1$, $c_1 \geqq 0$ an. Im Falle $c_2 = 1$ würde aus (80) unter Beachtung von $|g_3^2 g_1^{-2} - 2 g_3 g_1^{-1}| \leqq \frac{3}{4}$ wieder (81) folgen. Im Falle $c_2 = -1$ wäre $\det C = -c_1 - 1$, was für $c_1 \geqq 1$ im Widerspruch zu $\operatorname{abs} C \leqq 1$ stehen würde. Im Falle $c_2 = 0$ endlich folgt aus (74) zunächst, daß die beiden Zahlen $\sin\sigma$ und $\sin\tau$ verschiedenes Vorzeichen besitzen, falls beide von Null verschieden sind. Damit ergibt sich dann aus (71) die Abschätzung

$$|c_1| \leqq \frac{2}{3}\sqrt{3}\, \operatorname{Max}(\cos^2\alpha, \sin^2\alpha) + 1 .$$

Wegen (72) oder (73) ist $\sin 2\alpha \geqq g_1 g_2 \geqq \frac{3}{4}$, woraus sich

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\sqrt{7} \leqq \operatorname{Max}(\cos^2\alpha, \sin^2\alpha) \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{7}$$

ergibt. Das liefert $|c_1| \leqq \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{7}\right) + 1 < 2$, womit Lemma 9 bewiesen ist.

Wir behandeln nun im einzelnen die in Lemma 8 angegebenen Fälle I bis XVII.

Lemma 10. *Der Fall I liefert genau die in Satz 5a) angegebenen reduzierten Fixpunkte.*

Beweis: Für (71) bis (74) erhalten wir im Falle I die Gleichungen

$$c_1 g_1^2 + c_2 g_3^2 + (c_3 + c_4) g_1 g_3 = \sqrt{\tfrac{1}{8}(5+\sqrt{5})}\cos^2\alpha - \sqrt{\tfrac{1}{8}(5-\sqrt{5})}\sin^2\alpha\,, \tag{82}$$

$$c_3 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = \sqrt{\tfrac{1}{8}(5+\sqrt{5})}\sin 2\alpha\cos\left(\varphi + \tfrac{4}{5}\pi\right), \tag{83}$$

$$c_4 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = \sqrt{\tfrac{1}{8}(5+\sqrt{5})}\sin 2\alpha\cos\left(\varphi - \tfrac{4}{5}\pi\right), \tag{84}$$

$$c_2 g_2^2 = \sqrt{\tfrac{1}{8}(5+\sqrt{5})}\sin^2\alpha - \sqrt{\tfrac{1}{8}(5-\sqrt{5})}\cos^2\alpha\,. \tag{85}$$

Aus (83) und (84) folgt durch Subtraktion

$$(c_3 - c_4)\, g_1 g_2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\sin 2\alpha\sin\varphi\,. \tag{86}$$

Aus (82) und (85) folgt durch Addition

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + (c_3 + c_4)\, y_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,. \tag{87}$$

Aus (61) folgt schließlich durch Determinantenbildung

$$\det Y \det C = \det T = -\tfrac{1}{4}\sqrt{5} + \tfrac{1}{8}(5+\sqrt{5})\sin^2 2\alpha\sin^2\varphi\,. \tag{88}$$

Wäre $\det C \neq 0$, was nach Lemma 9 die Annahme $\operatorname{abs} C = 1$ bedeutet, so würde aus (88) die Abschätzung $\det Y \leq \frac{1}{4}\sqrt{5}$ folgen, im Widerspruch zu (70). Also muß $\det C = 0$ sein. Nach (88) bedeutet dies

$$\sin^2 2\alpha\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\,. \tag{89}$$

Mit (86) folgt hieraus $c_3 - c_4 \neq 0$ und wegen (70) auch $|c_3 - c_4| \neq 2$. Also ist $|c_3 - c_4| = 1$. Durch Quadrieren folgt hiermit aus (86) unter Beachtung von (89) die Gleichung

$$(g_1 g_2)^2 = \det Y = \tfrac{5}{8}(\sqrt{5} - 1)\,. \tag{90}$$

Wegen $|c_3 - c_4| = 1$ und Lemma 9 ist genau eine der Zahlen c_3, c_4 gleich Null, während die andere den Absolutbetrag 1 besitzt. Wegen $\det C = 0$ muß also auch mindestens eine der beiden Zahlen c_1, c_2 gleich Null sein. Wäre die andere dieser beiden Zahlen von Null verschieden, also nach Lemma 9 gleich ± 1, so würde aus (87) unter Beachtung der Reduktionsbedingungen (36) und der Gleichung $|c_3 + c_4| = 1$ die Abschätzung $y_1 \leq \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ folgen, im Widerspruch zu (67). Also ist $c_1 = c_2 = 0$. Bei nochmaliger Anwendung von (87) folgt dann $c_3 + c_4 > 0$, also $c_3 + c_4 = 1$. Damit haben wir das Ergebnis

$$g_1 g_3 = y_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \tag{91}$$

und für C die beiden Möglichkeiten

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die erste Möglichkeit bezeichnen wir als den Fall I', die zweite als den Fall I''. Im Fall I' gilt nach (84) die Beziehung $\cos\left(\varphi - \frac{4}{5}\pi\right) = 0$ und nach (83) die Beziehung $\cos\left(\varphi + \frac{4}{5}\pi\right) > 0$. Im Fall I'' gilt umgekehrt $\cos\left(\varphi + \frac{4}{5}\pi\right) = 0$, $\cos\left(\varphi - \frac{4}{5}\pi\right) > 0$. So ergibt sich für φ in den beiden Fällen $\varphi_1 = -\frac{7}{10}\pi$, $\varphi_2 = \frac{7}{10}\pi$. Aus (85) folgt unter Beachtung von $c_2 = 0$ in beiden Fällen $\sin\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Mit diesen Werten von φ und $\sin\alpha$ erhalten wir nach (75) dann

$$R_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}\sqrt[4]{5}\,(\sqrt{5}-3) \\ \frac{1}{2}\sqrt[4]{5}\,(\sqrt{5}-1) & \frac{1}{2}(\sqrt{5}-3) \end{pmatrix} = R_2'. \tag{92}$$

Im Fall I' ergibt sich nun aus (79), daß $r_4 g_1 g_2^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{5}\,(\sqrt{5}-1)\, g_1 g_2^{-1}$ eine ganze Zahl sein muß. Wegen (68) muß diese ganze Zahl gleich 1 sein. Beachten wir dann noch (90), so folgt

$$g_1^2 = y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}. \tag{93}$$

Im Fall I'' gilt nach (90), (91) und (92) die Gleichung

$$(r_1 - r_2) g_3 g_1^{-1} + r_3 g_2 g_1^{-1} - r_4 g_3^2 (g_1 g_2)^{-1} = \frac{1}{2} g_1^{-2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}.$$

Nach (78) muß die linke Seite dieser Gleichung eine ganze Zahl sein, die wegen (67) wiederum gleich 1 sein muß. So folgt auch im Falle I'' die Beziehung (93). Mit Hilfe von (90), (91) und (93) erhält man schließlich

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})} & \frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})} \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung von X beachten wir, daß aus (62), (63) und (92) die Beziehung

$$A' - D = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(3+\sqrt{5}) \\ -\frac{1}{4}(3+\sqrt{5}) & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{pmatrix}$$

folgt, wobei sich das obere Vorzeichen auf den Fall I' und das untere auf den Fall I'' bezieht. Aus der Ganzzahligkeit von $A' - D$ und aus (35) erhalten wir im Fall I' die Gleichungen $x_1 = -x_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ und im Falle I'' die Gleichungen $x_1 = -x_2 = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$. Für x_3 erhalten wir in jedem der beiden Fälle I' und I'' noch die beiden Möglichkeiten $x_3 = \pm\frac{1}{2}$, so daß sich insgesamt gerade die vier in Satz 5a) angegebenen Punkte ergeben. Man rechnet noch

leicht nach, daß sich mit den gefundenen Werten von C, Z, U die Matrizen D, A, B aufgrund der Gleichungen (62), (63) und (64) tatsächlich als ganzzahlig herausstellen, so daß die Punkte in Satz 5a) tatsächlich Fixpunkte im Falle I sind. Damit ist Lemma 10 bewiesen.

Lemma 11: *Der Fall II liefert genau die in Satz 5b) angegebenen reduzierten Fixpunkte.*

Beweis: Die Gleichungen (71) bis (74) lauten in diesem Fall

$$c_1 g_1^2 + c_2 g_3^2 + (c_3 + c_4) g_1 g_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,, \tag{94}$$

$$c_3 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sin 2\alpha \sin\varphi\,, \tag{95}$$

$$c_4 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sin 2\alpha \sin\varphi\,, \tag{96}$$

$$c_2 g_2^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,. \tag{97}$$

Aus (97) folgen aufgrund von Lemma 9 die Beziehungen $c_2 = 1$, $g_2^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Durch Addition der Gleichungen (95) und (96) erhalten wir dann $(c_3 + c_4)g_1 + + 2g_3 = 0$. Diese Gleichung läßt nach (66) und (67) nur die beiden Möglichkeiten

$$c_3 + c_4 = 0,\ g_3 = 0 \quad \text{und} \quad c_3 + c_4 = -1,\ 2g_3 = g_1 \tag{98}$$

zu. Für die erste dieser Möglichkeiten würde die Gleichung (94) die Beziehungen $c_1 = 1$, $g_1^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ liefern, die im Widerspruch zu (67) stehen. Im zweiten der Fälle (98) liefert (94) die Beziehungen $c_1 = 1$, $g_1^2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. Wir erhalten also die Ergebnisse

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{3}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{99}$$

Aus (75) folgt im Fall II die Beziehung $R' = R$. Durch Subtraktion erhält man also aus (62) und (63) die Beziehung $A' - D = (C' + C)X$. Weil nun nach (99) die Gleichung $C' + C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ besteht, muß daher die Matrix

$$(C' + C)X = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 & 2x_3 - x_2 \\ 2x_3 - x_1 & 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} \tag{100}$$

ganzzahlig sein. Hieraus folgt zunächst

$$x_k \neq 0 \qquad (k = 1, 2, 3)\,. \tag{101}$$

Denn wäre dies nicht erfüllt, so würde aus (35) und aus der Ganzzahligkeit der Matrix (100) sofort $x_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ folgen. Dann wäre aber nach (99) die Ungleichung $|z_1| = |z_2| = \frac{2}{3}\sqrt{2} < 1$ erfüllt, die im Widerspruch zu (65) steht. Aus der Ganzzahligkeit von (100) folgt ferner auch die Ganzzahligkeit von $x_1 - x_2$. Wäre nun $x_1 - x_2 = \pm 1$, so würden nach (35) die Zahlen $2x_1$ und $2x_2$ ganz sein, so daß aus der Ganzzahligkeit von $2x_1 - x_3$ z. B. die Beziehung

$x_3 = 0$ folgen würde, die im Widerspruch zu (101) steht. Also muß $x_1 = x_2$ sein. Wir setzen $x_1 = x_2 = x$, so daß nach (100) dann

$$(102) \qquad (C' + C)X = \begin{pmatrix} 2x - x_3 & 2x_3 - x \\ 2x_3 - x & 2x - x_3 \end{pmatrix}$$

wird. Wäre ein Element dieser Matrix gleich Null, etwa $2x - x_3 = 0$, so würde $2x_3 - x = 3x$ folgen. Wegen $x \neq 0$ und der Ganzzahligkeit von $2x_3 - x$ wäre also $|x| = \frac{1}{3}$ und daher $|x_3| = 2|x| = \frac{2}{3}$, im Widerspruch zu (35). Entsprechend führt die Annahme $2x_3 - x = 0$ auf einen Widerspruch. Die Elemente der Matrix (102) können also nur gleich ± 1 sein. Beachten wir noch $|(2x_3 - x) + (2x - x_3)| = |x_3 + x| \leqq 1$, so ergeben sich nur die beiden Möglichkeiten

$$\begin{pmatrix} 2x - x_3 & 2x_3 - x \\ 2x_3 - x & 2x - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese liefern genau die beiden in Satz 5b) angegebenen Punkte. Auch hier rechnet man mit Hilfe von (62), (63) und (64) leicht nach, daß die Matrizen D, A, B sich als ganzzahlig ergeben, so daß die Punkte in Satz 5b) tatsächlich Fixpunkte im Fall II sind. Damit ist Lemma 11 bewiesen.

Lemma 12: *Der Fall VIII liefert genau den in Satz* 5c) *angegebenen reduzierten Fixpunkt* iE *und der Fall VI genau die in Satz* 5d) *angegebenen reduzierten Fixpunkte.*

Beweis: In den beiden Fällen VI und VIII gilt $\sigma = \tau$ und die Gleichungen (71) bis (74) lauten

$$(103) \qquad c_1 g_1^2 + c_2 g_3^2 + (c_3 + c_4)\, g_1 g_3 = \sin\sigma\,,$$

$$(104) \qquad c_3 g_1 + c_2 g_3 = c_4 g_1 + c_2 g_3 = 0\,,$$

$$(105) \qquad c_2 g_2^2 = \sin\sigma\,.$$

Wegen $\sin\sigma > 0$ folgen mit Lemma 9 aus (105) die Beziehungen $c_2 = 1$, $g_2^2 = \sin\sigma$. Aus (104) ergeben sich mit (66) und (67) die Gleichungen $g_3 = 0$, $c_3 = c_4 = 0$. Schließlich liefert (103) dann $c_1 = 1$, $g_1^2 = \sin\sigma$, so daß wir $C = E$, $Y = \sin\sigma E$ haben. Aus der zweiten der Gleichungen (61) erhalten wir dann $X + D = R = \cos\sigma E$. Wegen (35) und der Ganzzahligkeit von D gelten also im Falle VIII $\left(\sigma = \frac{\pi}{2}\right)$ die Beziehungen $X = 0$, $D = 0$, die den in Satz 5c) angegebenen Punkt liefern. Im Falle VI $\left(\sigma = \frac{2}{3}\pi\right)$ erhalten wir $X + D = -\frac{1}{2}E$. Diese Gleichung hat für X, D genau vier Lösungen, die die vier in Satz 5d) angegebenen Punkte liefern. Mit Hilfe von (63) und (64) ergeben sich dann A und B in jedem Fall als ganzzahlig, so daß iE tatsächlich Fixpunkt im Falle VIII ist, und die Punkte in Satz 5d) tatsächlich Fixpunkte im Falle VI sind. Damit ist Lemma 12 bewiesen.

Lemma 13: *Der Fall III liefert genau den in Satz* 5c) *angegebenen reduzierten Fixpunkt* iE.

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß ein Fixpunkt im Falle III auch Fixpunkt im Falle VIII ist. Ist nämlich Z Fixpunkt einer Modulmatrix M und

ist dem Paar Z, M aufgrund von Lemma 2a) eine unitäre Matrix U mit den Eigenwerten $e^{2\pi i\frac{1}{8}}$, $e^{2\pi i\frac{5}{8}}$ (Fall III) zugeordnet, so ist Z auch Fixpunkt bei M^2 und dem Paar Z, M^2 ist aufgrund von Lemma 2a) die Matrix U^2 zugeordnet. Diese besitzt die Eigenwerte $e^{2\pi i\frac{1}{4}}$, $e^{2\pi i\frac{1}{4}}$, gehört also zum Fall VIII. Aufgrund von Lemma 12 kommt daher als Fixpunkt im Falle III höchstens iE in Frage. Für diesen Punkt erhalten wir für (71) bis (74) im Falle III die Gleichungen

$$c_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos 2\alpha\,, \tag{106}$$

$$c_3 = -\sin 2\alpha \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \tag{107}$$

$$c_4 = -\sin 2\alpha \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \tag{108}$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos 2\alpha\,. \tag{109}$$

Aus (106) und (109) folgen wegen der Ganzzahligkeit von c_1 und c_2 die Gleichungen $c_1 = c_2 = 0$, $\cos 2\alpha = 0$, $\sin 2\alpha = 1$. Aus (106) bis (109) ergibt sich dann durch Determinantenbildung $\det C = \sin^2\varphi - \frac{1}{2}$, wegen der Ganzzahligkeit von $\det C$ also $\det C = 0$, $\sin^2\varphi = \frac{1}{2}$. Für C erhalten wir daher die vier Möglichkeiten $C = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die zugehörigen Matrizen R sind nach (75) durch $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Nach (62), (63) und (64) ergeben sich also D, A, B als ganzzahlig, so daß iE tatsächlich Fixpunkt im Falle III ist. Damit ist Lemma 13 bewiesen.

Lemma 14: *Der Fall IV liefert keine reduzierten Fixpunkte.*

Beweis: Die Gleichung (74) lautet in diesem Fall $c_2 g_2^2 = \frac{1}{2}$. Nach Lemma 9 würde $c_2 = 1$ und dann $g_2^2 = \frac{1}{2}$ folgen, was im Widerspruch zu (69) steht. Man kann auch folgendermaßen schließen: Jeder Fixpunkt im Falle IV wäre auch Fixpunkt in den Fällen VII und VIII. Nach Lemma 12 ist iE der einzige reduzierte Fixpunkt im Falle VIII. Der Punkt iE liegt aber auf keiner der Fixpunktmannigfaltigkeiten, die sich im Falle VII ergeben werden (vgl. Lemma 19). Damit ist Lemma 14 bewiesen.

Lemma 15: *In den Fällen V und XI ergeben sich höchstens die in Satz* 5d) *angegebenen reduzierten Fixpunkte.*

Beweis: Ist Z Fixpunkt bei der Modulmatrix M, so auch bei M^2. Daraus folgt, daß jeder Fixpunkt in den Fällen V und XI auch Fixpunkt im Falle VI ist. Lemma 15 ergibt sich dann aus Lemma 12. Bei den Fixpunkten im Falle V muß noch beachtet werden, daß für diese M^2 das charakteristische Polynom Φ_6^2 besitzt. Durch Übergang zu $-M^2$ erhalten wir dann das charakteristische Polynom Φ_3^2 (vgl. den Beweis von Lemma 5). Daß die Fixpunkte im Falle VI tatsächlich auch Fixpunkte in den Fällen V und XI sind, werden wir nicht benötigen und wollen es daher auch nicht beweisen. Damit ist Lemma 15 bewiesen.

Lemma 16: *Der Fall X liefert genau die in Satz* 5d) *und* e) *angegebenen reduzierten Fixpunkte.*

Beweis: Die Gleichungen (71) bis (74) lauten in diesem Falle

$$c_1 g_1^2 + c_2 g_3^2 + (c_3 + c_4) g_1 g_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,, \tag{110}$$

$$c_3 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha \sin\varphi\,, \tag{111}$$

$$c_4 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \sin\varphi\,, \tag{112}$$

$$c_2 g_2^2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,. \tag{113}$$

Aus (113) und Lemma 9 ergibt sich $c_2 = 1, g_2^2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Aus (111) und (112) folgt dann durch Addition $(c_3 + c_4) g_1 + 2 g_3 = 0$. Diese Gleichung ist mit den Bedingungen (66) und (67) nur verträglich, wenn entweder

$$c_3 + c_4 = -1\,, \quad 2 g_3 = g_1 \tag{114}$$

oder

$$c_3 + c_4 = 0\,, \quad g_3 = 0 \tag{115}$$

gilt. Wir behandeln zuerst den Fall (114). Die erste der Gleichungen (114) liefert nur die beiden Möglichkeiten $c_3, c_4 = 0, -1; -1, 0$. Aus der zweiten der Gleichungen (114) und aus (110) folgt ferner $c_1 = 1, g_1^2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, so daß wir das Ergebnis

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{3}\sqrt{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{116}$$

haben. Nach (75) gilt für beide Fälle (114) und (115) die Beziehung

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos 2\alpha & -\frac{1}{2}\sin 2\alpha \cos\varphi \\ -\frac{1}{2}\sin 2\alpha \cos\varphi & -\frac{1}{2}\cos 2\alpha \end{pmatrix}. \tag{117}$$

Speziell im Falle (114) ergibt sich aus (111) oder (112) die Gleichung $\sin 2\alpha\,|\sin\varphi| = 1$, also $\sin 2\alpha = |\sin\varphi| = 1$, so daß $\cos 2\alpha = \cos\varphi = 0$ wird. Aus (117) ergibt sich damit $R = 0$. Durch Addition der Gleichungen (62) und (63) erhalten wir dann $A' + D = (C' - C)X$. Beachten wir (116), so folgt die Ganzzahligkeit von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 \\ -x_1 & -x_3 \end{pmatrix}$ bzw. von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -x_3 & -x_2 \\ x_1 & x_3 \end{pmatrix}$. Wegen (35) ist also $X = 0$. Weil mit (116) und $R = X = 0$ aus den Gleichungen (62) bis (64) die Ganzzahligkeit von D, A, B folgt, liefert daher der Fall (114) genau den in Satz 5e) angegebenen reduzierten Fixpunkt.

Im Falle (115) folgen aus (110) die Bedingungen $c_1 = 1$, $g_1^2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Die Gleichung $c_3 + c_4 = 0$ liefert wegen Lemma 9 die Werte $c_3 = c_4 = 0$, so daß wir das Ergebnis

$$C = E\,, \quad Y = \frac{1}{2}\sqrt{3}\; E \tag{118}$$

haben. Wegen der Reduktionsbedingungen (35) und (65) folgt nun

$$(119) \qquad |x_1| = |x_2| = \frac{1}{2}.$$

Nach (62) und (117) ist die Matrix

$$F^{-1}RF - CX = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos 2\alpha - x_1 & -\frac{1}{2}\sin 2\alpha \cos\varphi - x_3 \\ -\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos\varphi - x_3 & -\frac{1}{2}\cos 2\alpha - x_2 \end{pmatrix}$$

ganzzahlig. Daher ergibt sich aus (119) die Bedingung $|\cos 2\alpha| = 1$, also $\sin 2\alpha = 0$. Die Ganzzahligkeit von $-\frac{1}{2}\sin 2\alpha \cos\varphi - x_3$ ergibt damit $x_3 = 0$. Dieses Ergebnis und die beiden Gleichungen (118) und (119) lassen nur die vier Lösungen in Satz 5d) zu. Diese vier Lösungen sind aber tatsächlich Fixpunkte im Falle X, weil sich mit Hilfe der Gleichungen (62) bis (64) die Matrizen D, A, B als ganzzahlig erweisen. Damit ist Lemma 16 bewiesen.

Lemma 17: *Der Fall XII liefert genau die in Satz 5f) angegebenen reduzierten Fixpunkte.*

Beweis: Die Gleichungen (71) bis (74) lauten in diesem Falle

$$(120) \qquad c_1 g_1^2 + c_2 g_3^2 + (c_3 + c_4) g_1 g_3 = \cos^2\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\sin^2\alpha,$$

$$(121) \qquad c_3 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = \sin\frac{\pi}{12}\sin 2\alpha\cos\left(\varphi + \frac{7}{12}\pi\right),$$

$$(122) \qquad c_4 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = \sin\frac{\pi}{12}\sin 2\alpha\cos\left(\varphi - \frac{7}{12}\pi\right),$$

$$(123) \qquad c_2 g_2^2 = \sin^2\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\cos^2\alpha.$$

Aus (121) und (122) erhalten wir durch Subtraktion

$$(c_3 - c_4)\, g_1 g_2 = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha \sin\varphi.$$

Wegen (70) folgt $|c_3 - c_4| < 1$, also

$$(124) \qquad c_3 = c_4, \quad \sin 2\alpha \sin\varphi = 0.$$

Nun ergibt sich wegen $C' = C$ aus (62) und (63), daß die Matrix

$$A' + D = F^{-1}(R + R')F = \begin{pmatrix} * & * \\ -\frac{1}{2} g_1 g_2^{-1} \sin 2\alpha\cos\varphi & * \end{pmatrix}$$

ganzzahlig ist. Wegen (68) folgt also insbesondere $\sin 2\alpha \cos\varphi = 0$. Zusammen mit (124) ergibt das $\sin 2\alpha = 0$. Weil nach (123) sicher $c_2 = 1$ ist, folgen nun aus (121) und (122) die Gleichungen $c_3 g_1 + g_3 = c_4 g_1 + g_3 = 0$. Diese sind mit (66) und (67) nur dann verträglich, wenn $c_3 = c_4 = g_3 = 0$ ist. Aus (120) erhalten wir dann $c_1 = 1$. Beachten wir nun noch einmal $\sin 2\alpha = 0$ und $g_1 \leq g_2$, so ergibt sich nach (120) und (123) schließlich $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $g_1^2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $g_2^2 = 1$; zusammengefaßt also

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt beachten wir $R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann folgen aus (76) bis (79) die Gleichungen $x_1 + d_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 + d_2 = 0$, $x_3 + d_3 = 0$. Die Ganzzahligkeit von d_2, d_3 liefert $x_2 = x_3 = 0$. Die Ganzzahligkeit von d_1 liefert $x_1 = \pm\frac{1}{2}$, was sich wegen $y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ auch aus (35) und (65) ergibt. Weil sich nun mit den gefundenen Werten von C, Z, U die Matrizen D, A, B aufgrund der Gleichungen (62) bis (64) als ganzzahlig erweisen, ist Lemma 17 bewiesen.

Mit Lemma 8 und Lemma 10 bis Lemma 17 ist Satz 5 vollständig bewiesen.

Lemma 18: *In den Fällen XIII und XIV ergeben sich als Fixpunktmannigfaltigkeiten, die reduzierte Punkte enthalten, genau die in Satz* 6a) *und* b) *angegebenen Mannigfaltigkeiten, in den Fällen XV und XVI genau die in Satz* 6c) *und* d) *angegebenen Mannigfaltigkeiten.*

Beweis: Die Gleichungen (71) bis (74) lauten in den angegebenen Fällen

$$c_1 g_1^2 + c_2 g_3^2 + (c_3 + c_4) g_1 g_3 = l \cos^2\alpha\,, \tag{125}$$

$$c_3 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = k \sin 2\alpha \cos(\varphi + \varkappa)\,, \tag{126}$$

$$c_4 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = k \sin 2\alpha \cos(\varphi - \varkappa)\,, \tag{127}$$

$$c_2 g_2^2 = l \sin^2\alpha\,, \tag{128}$$

wobei die drei Größen $l, k, \varkappa$ in den vier Fällen XIII, XIV, XV, XVI nacheinander die Werte $l = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1, 1$; $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\varkappa = \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi$ haben. Aus (126) und (127) erhalten wir durch Subtraktion

$$(c_3 - c_4) g_1 g_2 = 2 e k^2 \sin 2\alpha \sin\varphi \qquad (e = 1, -1, 1, -1)\,, \tag{129}$$

aus (125) und (128) durch Addition

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + (c_3 + c_4) y_3 = l \tag{130}$$

und aus der ersten der Gleichungen (61) durch Determinantenbildung

$$\det C \det Y = k^2 \sin^2 2\alpha \sin^2\varphi\,. \tag{131}$$

Die Gleichung (131) ist nach Lemma 9 nur mit $\det C = 0, 1$ verträglich. Wäre $\det C = 1$, so würde im Falle XIII aus (129) und (131) die Beziehung $|c_3 - c_4| = \sqrt{3}$ folgen, die im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von $c_3 - c_4$ steht. In den Fällen XIV, XV, XVI ist die Annahme $\det C = 1$ nach (131) wegen (70) nicht möglich. Also ist in allen vier Fällen $\det C = 0$. Damit folgen aus (129) und (131) die Gleichungen

$$c_3 = c_4\,, \quad c_1 c_2 = c_3^2 = c_4^2\,. \tag{132}$$

Wir zeigen nun zuerst, daß die Annahme $c_3 \neq 0$ auf einen Widerspruch führt. Unter dieser Annahme ergeben sich aus (132) die beiden Möglichkeiten $c_1 = c_2 = \pm 1$. Aufgrund der Reduktionsbedingungen (36) ist aber (130) nur mit der einen Möglichkeit $c_1 = c_2 = 1$ verträglich, und für diese Möglichkeit

muß wegen (67) außerdem $c_3 = c_4 = -1$ sein. Um auf den Widerspruch zu kommen, brauchen wir noch eine Abschätzung von $y_1 - y_3$ nach oben. In den Fällen XIII, XIV folgen aus (67) und (130) die Gleichungen $2y_3 = y_1 = y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $y_1 - y_3 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$. In den Fällen XV, XVI ergibt sich aus (126) oder (127) unter Beachtung von $\sin 2\alpha \sin\varphi = 0$ die Abschätzung

$$g_2|g_1 - g_3| = \frac{1}{2}\sin 2\alpha |\cos\varphi| \leq \frac{1}{2}.$$

Wir multiplizieren mit $g_1 g_2^{-1}$ und beachten (68); dann erhalten wir in allen vier Fällen XIII bis XVI aus der Annahme $c_3 \neq 0$ das vorläufige Ergebnis

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{4}\sqrt{3} \leq y_1 - y_3 \leq \frac{1}{3}\sqrt{3}. \tag{133}$$

Nach (75) ist wegen $\sin 2\alpha \sin\varphi = 0$ die Matrix R symmetrisch. Daher folgt aus (62) und (63) durch Subtraktion $A' - D = (C' + C)X$. Diese Gleichung besagt mit (133) zusammen insbesondere, daß die Matrix

$$(C' + C)X = 2\begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 - x_1 & x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

ganzzahlig ist. Wegen (35) kann also z. B. $(x_1 - x_3)^2$ nur die drei Werte

$$(x_1 - x_3)^2 = 0, \frac{1}{4}, 1 \tag{134}$$

annehmen. Weil R symmetrisch ist, hat die Matrix $XF^{-1}RF - F'RF'^{-1}X$ die Form $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$. Wegen (64) müssen daher die Diagonalelemente von

$$XCX + YCY = \begin{pmatrix} (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 & * \\ * & (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \end{pmatrix}$$

ganzzahlig sein. Aus (133) und (134) folgt dann der Widerspruch. Also ist $c_3 = c_4 = 0$. Nach (130) und (132) gilt dann entweder

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_1 = l \tag{135}$$

oder

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_2 = l. \tag{136}$$

Wir benutzen die Gleichung (64) und die Symmetrie von R; dann folgt im Falle (135) die Gleichung

$$-B = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 & * \\ * & x_3^2 + y_3^2 \end{pmatrix}$$

und im Falle (136) die Gleichung

$$-B = \begin{pmatrix} x_3^2 + y_3^2 & * \\ * & x_2^2 + y_2^2 \end{pmatrix}.$$

In allen Fällen ist also $x_3^2 + y_3^2$ ganzzahlig, wegen $|x_3| \leq \frac{1}{2}$ und $0 \leq y_3 \leq \frac{1}{2}$ also $x_3 = y_3 = 0$. Im Falle (135) ist ferner $x_1^2 + y_1^2$ ganzzahlig. Liegt daher XIII oder XIV vor, so gilt wegen $y_1 = l = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ die Bedingung $x_1 = \pm\frac{1}{2}$. Das

liefert genau die beiden Mannigfaltigkeiten in Satz 6a). Liegt dagegen XV oder XVI vor, so gilt wegen $y_1 = l = 1$ die Bedingung $x_1 = 0$. Das liefert die Mannigfaltigkeit in Satz 6c). Im Falle (136) ist $x_2^2 + y_2^2$ ganzzahlig. Liegt daher XIII oder XIV vor, so gilt wegen $y_2 = l = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ die Bedingung $x_2 = \pm\frac{1}{2}$. Das liefert genau die beiden Mannigfaltigkeiten in Satz 6b). Liegt dagegen XV oder XVI vor, so gilt wegen $y_2 = l = 1$ die Bedingung $x_2 = 0$. Das liefert die Mannigfaltigkeit in Satz 6d). In allen Fällen zeigt man noch mit Hilfe der Gleichungen (62) bis (64), daß D, A, B sich als ganzzahlig ergeben, so daß die Mannigfaltigkeiten in Satz 6a) und b) tatsächlich Fixpunktmannigfaltigkeiten in den Fällen XIII und XIV sind, und die Mannigfaltigkeiten in Satz 6c) und d) Fixpunktmannigfaltigkeiten in den Fällen XV und XVI. Damit ist Lemma 18 bewiesen.

Lemma 19: *Im Falle VII ergeben sich als Fixpunktmannigfaltigkeiten nicht ganzer Modulsubstitutionen, die reduzierte Punkte enthalten, genau die in Satz* 6e) *bis* j) *angegebenen Mannigfaltigkeiten und im Falle IX genau die in Satz* 6k) *bis* o) *angegebenen Mannigfaltigkeiten.*

Beweis: Für (71) bis (74) erhalten wir in den beiden Fällen VII und IX die Gleichungen

$$c_1 g_1^2 + c_2 g_3^2 + (c_3 + c_4) g_1 g_3 = k \cos 2\alpha\,, \tag{137}$$

$$c_3 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = -k \sin 2\alpha \cos\varphi\,, \tag{138}$$

$$c_4 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = -k \sin 2\alpha \cos\varphi\,, \tag{139}$$

$$c_2 g_2^2 = -k \cos 2\alpha\,, \tag{140}$$

wobei $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ im Falle VII und $k = 1$ im Falle IX zu setzen ist. Aus (137) und (140) folgt durch Addition

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + (c_3 + c_4) y_3 = 0\,, \tag{141}$$

aus (138) und (139) durch Subtraktion

$$c_3 = c_4 \tag{142}$$

und aus (61) durch Determinantenbildung

$$\det C \det Y = k^2(\sin^2 2\alpha \sin^2\varphi - 1)\,. \tag{143}$$

Die letzte Gleichung ist nur mit $\det C = 0, -1$ verträglich. Wäre $\det C = 0$, so würde $\sin 2\alpha = |\sin\varphi| = 1$ folgen, also $\cos 2\alpha = \cos\varphi = 0$. Damit würde (140) die Bedingung $c_2 = 0$ liefern, dann (138) und (139) die Bedingungen $c_3 = c_4 = 0$ und schließlich (137) die Bedingung $c_1 = 0$; also wäre $C = 0$. Die Fixpunktmannigfaltigkeiten ganzer Modulsubstitutionen wurden aber bereits in § 3 untersucht. Nach (142) können wir also

$$\det C = c_1 c_2 - c_3^2 = -1 \tag{144}$$

voraussetzen. Wir zeigen ferner, daß wir

$$c_2 < 0 \quad \text{oder} \quad c_2 = 0, c_3 < 0 \tag{145}$$

annehmen können. Im Fall IX beachten wir hierzu, daß bei Multiplikation der Fixpunktgleichungen (49) mit -1 die beiden Matrizen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ und U das Vorzeichen wechseln; da U und $-U$ die gleichen Eigenwerte $\pm i$ besitzen, bleiben wir dabei im Fall IX. Das Erfülltsein von (145) kann aber aufgrund von (144) stets erreicht werden, indem nur eventuell C mit -1 multipliziert wird. Im Fall VII beachten wir, daß M die Ordnung 3 hat; das bedeutet nach Lemma 7 insbesondere, daß M und M^2 dieselbe Fixpunktmannigfaltigkeit haben. Die aufgrund von Lemma 2a) zugehörigen unitären Matrizen U und U^2 besitzen die gleichen Eigenwerte $e^{\pm \frac{2\pi i}{3}}$, gehören also beide zum Fall VII. Gehören ferner in der Schreibweise (55) zur Matrix U die beiden Parameterwerte α, φ, so gehören zu U^2 die Parameterwerte $\frac{\pi}{2} - \alpha, \pi + \varphi$. Indem wir also eventuell M durch M^2 ersetzen, können wir $\cos 2\alpha > 0$ oder $\cos 2\alpha = 0$, $\cos\varphi > 0$ voraussetzen. Aufgrund der Gleichungen (138) und (140) ist diese Voraussetzung mit (145) äquivalent.

Ist nun zunächst $c_1 = c_2 = 0$, so folgt aus (144) und (145) die Bedingung $c_3 = c_4 = -1$; die Gleichung (140) liefert $\alpha = \frac{\pi}{4}$, die Gleichung (141) liefert $y_3 = 0$. Beachten wir schließlich noch (138), so folgt

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad y_3 = 0, \quad g_1 g_2 = k \cos\varphi . \tag{146}$$

Ist dann $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$, so folgt aus (144) und (145) wieder $c_3 = c_4 = -1$; die Gleichung (141) liefert hiermit $c_1 = 1$, $2y_3 = y_1$. Die Gleichung (140) liefert wieder $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Unter Beachtung von (138) folgt jetzt also

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad 2y_3 = y_1, \quad g_1 g_2 = k \cos\varphi . \tag{147}$$

Ist ferner $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, so folgt aus (145) und Lemma 9 nun $c_2 = -1$ und mit Hilfe der Reduktionsbedingungen (36) sowie mit (141) dann $c_3 = c_4 = 1$ und $2y_3 = y_1 = y_2$. Die Gleichung (137) liefert $y_1 = \frac{4}{3} k \cos 2\alpha$. Schließlich erhalten wir noch etwa aus den beiden Gleichungen (139) und (143) eine Beziehung zwischen α und φ, so daß wir zusammen

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{2}{3} k \cos 2\alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad 3 \sin^2 2\alpha \cos^2\varphi = \cos^2 2\alpha \tag{148}$$

haben. Ist endlich $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, so folgt aus (144) und (145) jetzt $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = c_4 = 0$. Unter Beachtung von (139), (140) und (141) erhalten wir

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y_1 = y_2, \quad g_2^2 = k \cos 2\alpha, \quad g_2 g_3 = k \sin 2\alpha \cos\varphi . \tag{149}$$

Zur weiteren Diskussion der vier Fälle (146) bis (149) beachten wir, daß nach (75) die Gleichung

$$R = \begin{pmatrix} h & k \sin 2\alpha \sin\varphi \\ -k \sin 2\alpha \sin\varphi & h \end{pmatrix} \qquad \left(h = -\frac{1}{2}, 0\right) \tag{150}$$

gilt, wobei sich $h = -\frac{1}{2}$ auf den Fall VII und $h = 0$ auf den Fall IX bezieht. Aus der zweiten der Gleichungen (61) ergibt sich hiermit

$$(151)\qquad X = -C^{-1}D + hC^{-1} + k\sin 2\alpha \sin\varphi\, C^{-1}\begin{pmatrix} g_3 g_2^{-1} & g_3 g_1^{-1} + g_3^2(g_1 g_2)^{-1} \\ -g_1 g_2^{-1} & -g_3 g_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Im Falle (146) lautet diese Gleichung

$$(152)\qquad X = -C^{-1}D + hC^{-1} + k\sin\varphi \begin{pmatrix} g_1 g_2^{-1} & 0 \\ 0 & -g_3 g_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Mit $Y = i\begin{pmatrix} g_1^2 & 0 \\ 0 & g_3^2 \end{pmatrix}$ und der vierten Gleichung in (146) folgt hieraus

$$(153)\qquad Z = -C^{-1}D + hC^{-1} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -k^2 z^{-1} \end{pmatrix} \quad (z = k g_1 g_2^{-1}\sin\varphi + i g_1^2).$$

Im Falle (147) lautet die Gleichung (151) folgendermaßen

$$(154)\qquad X = -C^{-1}D + hC^{-1} + k\sin\varphi \begin{pmatrix} g_1 g_2^{-1} & \frac{1}{2} g_1 g_2^{-1} \\ \frac{1}{2} g_1 g_2^{-1} & \frac{1}{4} g_1 g_2^{-1} - g_3 g_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich unter Beachtung der beiden letzten Gleichungen in (147) die Beziehung

$$(155)\qquad Z = -C^{-1}D + hC^{-1} + \begin{pmatrix} z & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} & \frac{z}{4} - k^2 z^{-1} \end{pmatrix} \quad (z = k g_1 g_2^{-1}\sin\varphi + i g_1^2).$$

Im Falle (148) erhalten wir für (151) die Beziehung

$$(156)\qquad X = -C^{-1}D + hC^{-1} + \frac{1}{3} k \sqrt{3}\, \sin 2\alpha \sin\varphi \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Unter Beachtung der beiden letzten Gleichungen in (148) ergibt sich hieraus

$$(157)\qquad Z = -C^{-1}D + hC^{-1} + \begin{pmatrix} \frac{z}{4} - k^2 z^{-1} & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} & z \end{pmatrix} \left(z = \frac{2}{3} k\sqrt{3}\, \sin 2\alpha \sin\varphi + i y_2\right).$$

Im letzten Fall (149) schließlich ergibt sich aus (151) die Gleichung

$$(158)\qquad X = -C^{-1}D + hC^{-1} + k g_2^{-1} \sin 2\alpha \sin\varphi \begin{pmatrix} g_3 & g_1 \\ g_1 & g_3 \end{pmatrix}.$$

Wird in diesem Falle

$$\zeta_1 = g_1 g_2^{-1} \sin 2\alpha \sin\varphi + i k^{-1} y_3, \quad \zeta_2 = g_3 g_2^{-1} \sin 2\alpha \sin\varphi + i k^{-1} y_1$$

gesetzt, so folgt aufgrund der drei letzten Gleichungen in (149) die Beziehung $\zeta_1^2 - \zeta_2^2 = 1$. Da die allgemeinste Lösung dieser Gleichung durch

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \zeta_2 = \frac{1}{2}(z - z^{-1}) \qquad (z \text{ komplex})$$

gegeben ist, ergibt sich aus (158) die Beziehung

$$(159)\qquad Z = -C^{-1}D + hC^{-1} + \frac{k}{2}\begin{pmatrix} z - z^{-1} & z + z^{-1} \\ z + z^{-1} & z - z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Wird für $C^{-1}D$ irgendeine symmetrische ganzzahlige Matrix gewählt, so liefert jede der vier Gleichungen (153), (155), (157) und (159) die Parameterdarstellung einer zweidimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeit, falls z in jedem Falle als komplexer Parameter aufgefaßt wird. Man bestimme nämlich, nachdem $C^{-1}D$ gewählt ist, die Matrix A mit Hilfe der aus (62), (63) und (150) folgenden Gleichung $A' + D = 2hE$. Dabei wird A ganzzahlig, weil $2h$ für beide Fälle VII und IX eine ganze Zahl ist. Wird sodann $B = C^{-1}(2hD - E - D^2)$ gesetzt, so rechnet man leicht nach, daß (153), (155), (157) und (159) bei beliebig variablem z bei der Modulmatrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ punktweise festbleiben.

Wir wollen nun diejenigen der obigen Fixpunktmannigfaltigkeiten bestimmen, die reduzierte Punkte enthalten. Im Falle (146) beachten wir (65) und die Tatsache, daß die Differenz $z_1 - z$ nach (153) ganz ist. Danach muß $|z| \geqq 1$ sein. Wegen der letzten Gleichung in (146) bedeutet das

$$(160) \qquad |z| = k g_1 g_2^{-1} \geqq 1 .$$

Im Fall VII, in welchem $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, stellt dies einen Widerspruch zu der Reduktionsbedingung $g_1^2 \leqq g_2^2 + g_3^2 = g_2^2$ dar. Die Fixpunktmannigfaltigkeiten (153) enthalten also im Falle VII keine reduzierten Punkte. Im Falle IX folgt nach (160) die Beziehung $g_1 = g_2$. Ferner gilt $h = 0$ im Falle IX; das liefert nach (152) die Bedingung $x_3 = 0$ und $C^{-1}D = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Nehmen wir dann zunächst an, daß mindestens ein Diagonalelement von $C^{-1}D$ von Null verschieden ist, und beachten wir die aus der letzten Gleichung in (146) folgende Abschätzung $|\sin\varphi| \leqq \frac{1}{2}$, so folgen aus (152) die Gleichungen $|x_1| = |x_2| = |\sin\varphi| = \frac{1}{2}$; für $C^{-1}D$ ergeben sich dabei die sechs Möglichkeiten

$$C^{-1}D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung (153) liefert hiermit genau die in Satz 6k) angegebenen Fixpunktmannigfaltigkeiten, die jeweils nur einen reduzierten Punkt enthalten. Wenn nun $C^{-1}D = 0$ ist, liefert (160) mit $g_1 = g_2$ zusammen $|z| = 1$. Die Fixpunktmannigfaltigkeit (153) hat also höchstens einen eindimensionalen Teil mit $\mathfrak{F}$ gemeinsam. Man rechnet leicht nach, daß der in Satz 6l) angegebene eindimensionale Teil tatsächlich zu $\mathfrak{F}$ gehört.

Im Fall (147) ergibt sich wieder (160). Wir nehmen zuerst $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ an. Dann liefert (160) zusammen mit (68) die Gleichung $g_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\, g_1$. Hiermit beweisen wir

$$(161) \qquad x_1 = \sin\varphi .$$

Nach (154) ist die Differenz $x = x_1 - \sin\varphi$ jedenfalls ganzzahlig. Wegen der aus der letzten Gleichung in (147) folgenden Abschätzung $|\sin\varphi| \leqq \frac{1}{2}$ gilt $|x| \leqq 1$; und falls $|x| = 1$ ist, folgt $|x_1| = |\sin\varphi| = \frac{1}{2}$. Mit dieser letzten

Gleichung würde sich aus (154) die Beziehung $|x_2| = \frac{1}{4}$ und also $|z_2|^2 = \frac{13}{16} < 1$ ergeben, was im Widerspruch zu (65) steht. Also gilt tatsächlich (161). Die Gleichung (161) liefert mit der letzten Gleichung in (147) dann $z_1 = z = ie^{-i\varphi}$, so daß die Fixpunktmannigfaltigkeiten (155) höchstens eindimensionale Stücke mit $\mathfrak{F}$ gemeinsam haben. Unter Beachtung von $hC^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ erhalten wir aus (154) für $C^{-1}D$ die vier Möglichkeiten

$$C^{-1}D = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}. \tag{162}$$

Die zweite und dritte dieser Möglichkeiten liefern die in Satz 6e) angegebenen Fixpunktmannigfaltigkeiten. Man rechnet leicht nach, daß diese tatsächlich die dort angegebenen eindimensionalen Stücke mit $\mathfrak{F}$ gemeinsam haben. Für die erste und vierte der Möglichkeiten (162) liefern die beiden Reduktionsbedingungen $|x_2| \leqq \frac{1}{2}$ und $|x_3| \leqq \frac{1}{2}$ noch $\sin\varphi = 0$, also $z_1 = z = i$, so daß die Fixpunktmannigfaltigkeit (155) in diesen beiden Fällen nur einen reduzierten Punkt enthält. Dieser ist in Satz 6f) angegeben.

Wir setzen jetzt (147) und $k = 1$, $h = 0$ voraus. Beachten wir (68), ferner die aus (160) folgende Abschätzung $g_2 \leqq g_1$ und die aus der letzten Gleichung in (147) folgende Abschätzung $|\sin\varphi| \leqq \frac{1}{4}\sqrt{7}$, so ergeben sich aus (154) für $C^{-1}D$ die drei Möglichkeiten

$$C^{-1}D = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Die Fixpunktmannigfaltigkeit (155) besitzt für jede dieser drei Möglichkeiten, wie leicht festzustellen ist, den in Satz 6m) angegebenen Teil mit $\mathfrak{F}$ gemeinsam.

Im Fall (148) ergibt sich aufgrund der letzten Gleichung in (148) die Beziehung

$$|z| = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,k. \tag{163}$$

Sämtliche Fixpunktmannigfaltigkeiten (157) haben also höchstens eindimensionale Stücke mit $\mathfrak{F}$ gemeinsam. Aus (67) und (148) folgt die Abschätzung

$$\sin^2 2\alpha \sin^2\varphi \leqq 1 - \frac{9}{16}k^{-2}. \tag{164}$$

Hiermit können wir für den Fall $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ die Beziehung

$$x_2 = \sin 2\alpha \sin\varphi \tag{165}$$

beweisen. Nach (156) ist nämlich die Differenz $x = x_2 - \sin 2\alpha \sin\varphi$ jedenfalls eine ganze Zahl. Diese kann wegen (164) nur die Werte $x = -1, 0, 1$ annehmen, wobei im Falle $|x| = 1$ noch $|x_2| = |\sin 2\alpha \sin\varphi| = \frac{1}{2}$ gilt. Nach (148) folgt damit $y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und nach (156) die Gleichung $|x_1| = \frac{1}{4}$. Es wäre also $|z_1|^2 = \frac{13}{16} < 1$, was im Widerspruch zu (65) steht. Also gilt tatsächlich (165).

Beachten wir nun $hC^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, so ergeben sich mit der Abschätzung (164) aus (156) für $C^{-1}D$ die vier Möglichkeiten

$$C^{-1}D = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Man stellt leicht fest, daß die Fixpunktmannigfaltigkeit (157) für die zweite und dritte dieser Möglichkeiten die in Satz 6g) angegebenen eindimensionalen Stücke mit $\mathfrak{F}$ gemeinsam hat und für die erste und vierte dieser Möglichkeiten jeweils nur den einen in Satz 6h) angegebenen Punkt mit $\mathfrak{F}$ gemeinsam hat. Für $k = 1$, $h = 0$ ergeben sich aus (156) mit der Abschätzung (164) für $C^{-1}D$ nur die drei Möglichkeiten

$$C^{-1}D = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Die Fixpunktmannigfaltigkeit (157) hat für jede dieser Möglichkeiten das in Satz 6n) angegebene eindimensionale Stück mit $\mathfrak{F}$ gemeinsam.

Im Fall (149) folgt aus (67) und (68) die Abschätzung

$$k^2 g_1^2 g_2^{-2} \sin^2 2\alpha \sin^2\varphi = k^2 g_1^2 g_2^{-2} - g_1^4 \leqq \frac{4}{3} k^2 - \frac{3}{4}. \tag{166}$$

Für $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $h = -\frac{1}{2}$ beweisen wir damit $C^{-1}D = \begin{pmatrix}* & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}$, d. h.

$$x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\; g_1 g_2^{-1} \sin 2\alpha \sin\varphi . \tag{167}$$

Nach (158) ist die Differenz $x = x_3 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\; g_1 g_2^{-1} \sin 2\alpha \sin\varphi$ jedenfalls eine ganze Zahl. Wegen (166) kann diese nur die Werte $x = -1, 0, 1$ annehmen, wobei für $|x| = 1$ noch

$$Y = \frac{1}{4}\sqrt{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{3}\; g_1 g_2^{-1} \sin 2\alpha\, |\sin\varphi| = \frac{1}{2}$$

gilt. Aus (158) folgt hiermit $|x_1| = |x_2| = \frac{1}{4}$, so daß $|z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{13}{16} < 1$ wäre. Diese Ungleichung steht im Widerspruch zu (65). Also gilt tatsächlich (167). Beachten wir nun $hC^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ferner die Abschätzung (166) und die Reduktionsbedingungen (35) und (66), so ergeben sich aus (158) für $C^{-1}D$ die vier Möglichkeiten

$$C^{-1}D = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{168}$$

Für die erste und letzte dieser Möglichkeiten folgt nach (158) aus $|x_1| \leqq \frac{1}{2}$ und $|x_2| \leqq \frac{1}{2}$ die Bedingung $g_3 g_2^{-1} \sin 2\alpha \sin\varphi = 0$. Diese ist mit $\sin 2\alpha \sin\varphi = 0$ äquivalent, denn aus $g_3 = 0$ würde wegen der zweiten Gleichung in (149) die Bedingung $g_1 = g_2$ folgen; wegen (67) würde sich aus der dritten Gleichung in (149) dann $\cos 2\alpha = 1$, d. h. $\sin 2\alpha = 0$ ergeben. In (159) ist also z rein imaginär, d. h. für die erste und letzte der Möglichkeiten (168) hat die Fixpunkt-

mannigfaltigkeit (159) mit $\mathfrak{F}$ höchstens einen eindimensionalen Teil gemeinsam. Andererseits ergibt sich, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ mit den betrachteten Mannigfaltigkeiten tatsächlich eindimensional ist; dieser Durchschnitt ist in Satz 6i) angegeben. Für die zweite und dritte der Möglichkeiten (168) sind zweidimensionale Stücke von (159) reduziert. Diese Stücke sind in Satz 6j) angegeben. Für $k = 1$, $h = 0$ ergeben sich schließlich aus (158) und (166) für $C^{-1}D$ die drei Möglichkeiten

$$C^{-1}D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für alle drei Möglichkeiten sind zweidimensionale Teile der Fixpunktmannigfaltigkeit (159) reduziert. Diese Teile sind in Satz 6o) angegeben. Damit ist Lemma 19 in allen Teilen bewiesen.

Mit Lemma 8, Lemma 18 und Lemma 19 ist Satz 6 vollständig bewiesen.

Lemma 20: *Der Fall XVII liefert genau die in Satz* 7 *angegebenen Fixpunktmannigfaltigkeiten nicht ganzer Modulsubstitutionen.*

Beweis: Die Gleichungen (71) bis (74) lauten in diesem Falle

$$c_1 g_1^2 + c_2 g_3^2 + (c_3 + c_4) g_1 g_3 = 0\,, \tag{169}$$

$$c_3 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = \sin 2\alpha \sin\varphi\,, \tag{170}$$

$$c_4 g_1 g_2 + c_2 g_2 g_3 = -\sin 2\alpha \sin\varphi\,, \tag{171}$$

$$c_2 g_2^2 = 0\,. \tag{172}$$

Aus (172) folgt $c_2 = 0$, aus (170) und (171) dann durch Addition $c_3 + c_4 = 0$ und damit aus (169) schließlich $c_1 = 0$. Wäre nun eine der beiden Zahlen c_3, c_4 gleich Null, so würde $C = 0$ folgen. Die Fixpunkte ganzer Modulsubstitutionen wurden aber in § 3 behandelt. Nach Lemma 9 haben wir dann nur noch die beiden Möglichkeiten $c_3, c_4 = \pm 1, \mp 1$. Beachten wir, daß bei Multiplikation der Fixpunktgleichungen (49) mit -1 die beiden Matrizen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ und U nur das Vorzeichen wechseln und daß mit U auch $-U$ die beiden Eigenwerte ± 1 besitzt, also zum Fall XVII gehört, so genügt es, den Fall

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_1 g_2 = \sin 2\alpha \sin\varphi \tag{173}$$

zu betrachten. Aus den beiden Gleichungen (61) folgt nun

$$Y = F'F = C^{-1}F^{-1}TF\,, \quad X + C^{-1}D = C^{-1}F^{-1}RF\,. \tag{174}$$

Mit $R + iT = U$ ergibt sich hieraus

$$Z + C^{-1}D = X + C^{-1}D + iY = C^{-1}F^{-1}UF\,.$$

Wir setzen $C^{-1}D = S$. Dann ist S eine symmetrische ganzzahlige Matrix; es folgt durch Determinantenbildung die Gleichung (17). Mit (17) haben wir eine implizite Darstellung aller vierdimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten nicht ganzer Modulsubstitutionen gefunden, die reduzierte Punkte enthalten können. Die zugehörigen Modulmatrizen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ bestimmen sich folgendermaßen: Wird S beliebig als symmetrische ganzzahlige Matrix vorgegeben,

so folgt $D = CS$. Aus (62) und (63) ergibt sich wegen $R' = R$ die Beziehung $A = D' = -SC$. Aus der Bedingung $AD' - BC' = E$ für symplektische Matrizen folgt dann $B = -SCS - C$. Man stellt dann leicht fest, daß Z unter der Bedingung (17) Fixpunkt bei der Modulmatrix

$$M = \begin{pmatrix} -SC & -SCS-C \\ C & CS \end{pmatrix} \tag{175}$$

ist, d. h. der Gleichung (6) genügt.

Um auch eine explizite Parameterdarstellung für die Mannigfaltigkeit (17) zu bekommen, beachten wir, daß es stets eine orthogonale Matrix mit positiver Determinante

$$P = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

gibt, die die symmetrische Matrix $F'^{-1}(X + S)F^{-1}$ auf Diagonalgestalt transformiert, für die also

$$PF'^{-1}(X + S)F^{-1}P' = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$$

gilt. Die Determinantenbedingung (17) liefert dann

$$h_1 = -h_2 = h = \sqrt{\det Y^{-1} - 1}\,.$$

So folgt also die explizite Parameterdarstellung (19). Hierbei sind die drei Elemente g_1, g_2, g_3 von F und ψ die vier reellen Parameter.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen, welche von den Fixpunktmannigfaltigkeiten (17) reduzierte Punkte enthalten. Hierzu setzen wir $S = \begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_3 & s_2 \end{pmatrix}$ und schreiben die zweite der Gleichungen (174) in Komponentenform auf; das liefert

$$x_1 + s_1 = g_1 g_2^{-1} \sin 2\alpha \cos\varphi\,, \tag{176}$$

$$x_2 + s_2 = 2g_3 g_1^{-1} \cos 2\alpha + (g_3^2(g_1 g_2)^{-1} - g_2 g_1^{-1}) \sin 2\alpha \cos\varphi\,, \tag{177}$$

$$x_3 + s_3 = \cos 2\alpha + g_3 g_2^{-1} \sin 2\alpha \cos\varphi\,. \tag{178}$$

Zuerst überlegen wir uns, daß nur die Fälle

$$s_1 = 1,\ |s_2| \leq 1,\ |s_3| \leq 1;\ s_1 = 0,\ s_3 = 1,\ |s_2| \leq 1;\ s_1 = s_3 = 0,\ s_2 = 0, 1 \tag{179}$$

untersucht zu werden brauchen. In [1] wird gezeigt, daß die Fläche $\operatorname{abs}(Z + S) = 1$ höchstens dann reduzierte Punkte enthält, wenn

$$|s_k| \leq 1 \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{180}$$

ist. Wegen (17) können wir also auch hier die Voraussetzung (180) machen. Weil ferner mit Z auch $-\overline{Z}$ reduziert ist, enthält mit der Mannigfaltigkeit $\det(Z + S) = -1$ auch die Mannigfaltigkeit $\det(Z - S) = -1$ reduzierte Punkte. Von zwei Fällen $S, -S$ braucht daher nur ein Fall untersucht zu werden. Indem aber eventuell S durch $-S$ ersetzt wird, kann wegen (180) stets (179) erreicht werden. Im ersten der Fälle (179) liefert (176) die Ungleichung

$$g_1 g_2^{-1} \sin 2\alpha \cos\varphi \geq \frac{1}{2}\,. \tag{181}$$

Hieraus und aus der zweiten Gleichung (173) folgt

(182) $$\sin^2 2\alpha \geqq g_1^2 g_2^2 + \frac{1}{4} g_2^2 g_1^{-2} \geqq \frac{3}{4}, \quad \text{also} \quad |\cos 2\alpha| \leqq \frac{1}{2}.$$

Beachten wir dann noch die mit Hilfe der Abschätzung (181) erlangte Abschätzung

$$(g_2 g_1^{-1} - g_3^2 (g_1 g_2)^{-1}) \sin 2\alpha \cos\varphi \geqq \frac{1}{2} (g_2^2 g_1^{-2} - g_3^2 g_1^{-2}) \geqq \frac{1}{4},$$

so folgt, daß (177) nur mit $s_2 = -1, 0$ verträglich ist. Wenn $s_2 = -1$ ist, folgt notwendig $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; für $s_3 \neq 0$ wäre nämlich $\det(X + S) - \det Y \leqq \leqq -\frac{17}{16} < -1$, was im Widerspruch zu (17) steht. Wenn $s_2 = 0$ ist, so sieht man mit Hilfe der Abschätzungen (181) und (182) leicht, daß (178) nur mit $s_3 = 0, 1$ verträglich ist; das liefert die beiden Möglichkeiten

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt liege der zweite der Fälle (179) vor. Nach (176) und (178) gilt

(183) $$\cos 2\alpha + g_3 g_2^{-1} \sin 2\alpha \cos\varphi \geqq \frac{1}{2}, \quad g_1 g_2^{-1} \sin 2\alpha\, |\cos\varphi| \leqq \frac{1}{2}.$$

Wird der Ausdruck

(184) $$H = s_3 + x_3 - (s_2 + x_2) = (1 - 2 g_3 g_1^{-1}) \cos 2\alpha + (g_2 g_1^{-1} + g_3 g_2^{-1} - \\ - g_3^2 (g_1 g_2)^{-1}) \sin 2\alpha \cos\varphi$$

nach g_3 abgeleitet, so folgt mit den Abschätzungen (183) die Ungleichung

$$H_{g_3} = -2 g_1^{-1} \left(\cos 2\alpha + g_3 g_2^{-1} \sin 2\alpha \cos\varphi - \frac{1}{2} g_1 g_2^{-1} \sin 2\alpha \cos\varphi\right) < 0\,.$$

Also wird H vergrößert, wenn für g_3 der kleinstmögliche Wert $g_3 = 0$ eingesetzt wird. Beachten wir dann noch die zweite Gleichung (173) und (183), so folgt

$$H \leqq + \sqrt{1 - g_1^2 g_2^2} + \frac{1}{2} g_2^2 g_1^{-2}.$$

Der rechts stehende Ausdruck ist, wie man leicht feststellt, eine monoton fallende Funktion von g_2^2. Wir vergrößern daher H weiter, wenn g_2^2 durch den kleinstmöglichen Wert ersetzt wird. Wegen $g_3 = 0$ ist dieser nach (66) durch $g_2^2 = g_1^2$ gegeben. Also gilt $H \leqq + \sqrt{1 - g_1^4} + \frac{1}{2} \leqq 1$, und zwar ist $H = 1$ höchstens für $g_3 = 0$, $g_1^2 = g_2^2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Mit $|x_1| \geqq 1$ liefert das $|x_1| = \frac{1}{2}$, also nach (173) und (176) die Beziehung $\sin 2\alpha = 1$. Die Gleichung $\cos 2\alpha = 0$ steht aber im Widerspruch zu (183). Also haben wir $H < 1$ und s_2 kann nach (184) nur die Werte $s_2 = 0, 1$ annehmen. Nach (179) ist jetzt gezeigt, daß die Mannigfaltigkeit (17) höchstens für die Matrizen (18) reduzierte Punkte enthält. Zu jeder dieser Mannigfaltigkeiten geben wir nun tatsächlich einen reduzierten Punkt

an, der auf ihr liegt:

Der Punkt $Z = \begin{pmatrix} e\varrho^s & 0 \\ 0 & e\varrho^s \end{pmatrix}$ liegt auf (17) mit $S = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

Der Punkt $Z = \begin{pmatrix} e\varrho^s & 0 \\ 0 & -e\varrho^{-s} \end{pmatrix}$ liegt auf (17) mit $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$.

Der Punkt $Z = \begin{pmatrix} -\frac{e}{2} + i & -\frac{e}{2} + \frac{i}{2} \\ -\frac{e}{2} + \frac{i}{2} & i \end{pmatrix}$ liegt auf (17) mit $S = \begin{pmatrix} e & e \\ e & 0 \end{pmatrix}$.

Der Punkt $Z = \begin{pmatrix} i & -\frac{e}{2} + \frac{i}{2} \\ -\frac{e}{2} + \frac{i}{2} & -\frac{e}{2} + i \end{pmatrix}$ liegt auf (17) mit $S = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & e \end{pmatrix}$.

Der Punkt $Z = \frac{e}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{3} \sqrt{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ liegt auf (17) mit $S = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}$.

Es soll nicht näher untersucht werden, welche Dimension der reduzierte Teil der Mannigfaltigkeit (17) in jedem Fall hat, weil wir das im folgenden nicht benötigen werden. Damit ist Lemma 20 bewiesen. Mit Lemma 8 und Lemma 20 ist auch Satz 7 bewiesen.

Literatur

[1] Gottschling, E.: Explizite Bestimmung der Randflächen des Fundamentalbereiches der Modulgruppe zweiten Grades. Math. Ann. 138, 103—124 (1959).

[2] Klein, F., u. R. Fricke: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen I (1890).

[3] Minkowski, H.: Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. J. reine angew. Math. 129, 220—274 (1905).

[4] Siegel, C. L.: Symplectic Geometry. Am. J. Math. 65, 1—86 (1943).

[5] Siegel, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. 116, 617—657 (1939).

(Eingegangen am 21. September 1960)

PEYERIMHOFF, A., u. H.-E. RICHERT
Math. Annalen 143, 150—162 (1961)

Über das Verhalten der Mittelwerte von Laplaceintegralen

Von

A. PEYERIMHOFF in Marburg und H.-E. RICHERT in Göttingen

Das Laplaceintegral $\int\limits_0^\infty e^{-su} a(u)\,du$ heißt $C_\varkappa$-summierbar ($\varkappa \geqq 0$, reell) an der Stelle s, wenn

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u^\varkappa} \int\limits_0^u (u-v)^\varkappa e^{-sv} a(v)\,dv = f(s)$$

existiert. Zu jedem $\varkappa \geqq 0$ gibt es eine Abszisse $\sigma_\varkappa (-\infty \leqq \sigma_\varkappa \leqq +\infty)$, so daß das Laplaceintegral für jedes s mit $\operatorname{Re} s > \sigma_\varkappa$, dagegen für kein s mit $\operatorname{Re} s < \sigma_\varkappa$ $C_\varkappa$-summierbar ist. In der Halbebene $\operatorname{Re} s > \sigma_\varkappa$ stellt $f(s)$ eine holomorphe Funktion dar.

In der vorliegenden Note wird für jedes reelle $p \geqq 1$ die Frage untersucht, wie sich die Mittelwerte

$$\left(\int\limits_{-T}^{T} |f(\sigma+it)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

bei $\sigma > \sigma_\varkappa$ für $T \to \infty$ verhalten.

Aus bekannten Ergebnissen läßt sich ohne Mühe für jedes $\sigma > \sigma_\varkappa$ die Abschätzung

$$\left(\int\limits_{-T}^{T} |f(\sigma+it)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = \begin{cases} o\left(T^{\varkappa+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\right) & \text{für } 1 \leqq p \leqq 2 \\ o(T^{\varkappa+1}) & \text{für } 2 \leqq p \leqq \infty\,^{1)}. \end{cases}$$

herleiten (Satz 1).

Das Hauptziel unserer Arbeit jedoch besteht in dem Nachweis, daß dieses Ergebnis bestmöglich ist. Wir werden nämlich zeigen, daß die angegebenen Abschätzungen nicht richtig bleiben, wenn die linke Seite mit einer beliebigen unbeschränkten Funktion multipliziert wird (Sätze 2 und 3 sowie Bemerkung zu Satz 3). Der Fall $p = 1$, der im wesentlichen in Hilfssatz 3 erledigt wird, liefert die Aussage für $1 \leqq p \leqq 2$. Die weiteren Fälle lassen sich mit Hilfe der schon früher behandelten Ergebnisse bei $p = \infty$ (vgl. [2], [3] und die dort zitierte Literatur), die hier noch vervollständigt werden, herleiten.

Sämtliche O- und o-Abschätzungen beziehen sich auf die Bewegung einer Veränderlichen gegen ∞; sie gelten nicht notwendig gleichmäßig in den übrigen auftretenden Veränderlichen.

---

[1]) Für $p = \infty$ bedeute $\left(\int\limits_{-T}^{T} |f(\sigma+it)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$, wie üblich, $\operatorname{Max}\limits_{|t|\leqq T} |f(\sigma+it)|$.

1. **Hilfssatz 1:** *Für $\sigma > \sigma_\varkappa$ gilt*

$$\left(\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = o(T^{\varkappa+1})\,.$$

Beweis: Sei $\sigma > s_0 > \sigma_\varkappa$. Dann ist bekanntlich ([1], S. 326, Satz 3)

$$f(s) = \frac{(s-s_0)^{\varkappa+1}}{\Gamma(\varkappa+1)} \int_0^\infty e^{-(s-s_0)u} A_\varkappa(u)\, du \quad (s = \sigma + it) \tag{1}$$

mit

$$A_\varkappa(u) = \int_0^u (u-v)^\varkappa e^{-s_0 v} a(v)\, dv = O(u^\varkappa)\,.$$

Hieraus folgt

$$G(u) = \begin{cases} e^{-(\sigma - s_0)u} A_\varkappa(u) & \text{für} \quad u \geqq 0 \\ 0 & \text{für} \quad u < 0 \end{cases} \in L_2(-\infty, +\infty)\,.$$

Nach dem Plancherelschen Satz ist also

$$g(t) = \underset{U\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-U}^{U} e^{-itu} G(u)\, du = \underset{U\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^U e^{-(s-s_0)u} A_\varkappa(u)\, du \in L_2(-\infty, +\infty)$$

und daher wegen (1) auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\sigma+it)|^2}{|\sigma - s_0 + it|^{2\varkappa+2}}\, dt < \infty\,.$$

Hiermit ergibt sich der Hilfssatz aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} |f(\sigma+it)|^2\, dt = & \int_{|t|\leqq T^{\frac{1}{2}}} |\sigma - s_0 + it|^{2\varkappa+2} \frac{|f(\sigma+it)|^2}{|\sigma - s_0 + it|^{2\varkappa+2}}\, dt + \\ & + \int_{T^{\frac{1}{2}} \leqq |t| \leqq T} |\sigma - s_0 + it|^{2\varkappa+2} \frac{|f(\sigma+it)|^2}{|\sigma - s_0 + it|^{2\varkappa+2}}\, dt \leqq \\ & \leqq \left|\sigma - s_0 + i T^{\frac{1}{2}}\right|^{2\varkappa+2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\sigma+it)|^2}{|\sigma - s_0 + it|^{2\varkappa+2}}\, dt + \\ & + |\sigma - s_0 + i T|^{2\varkappa+2} \int_{|t|\geqq T^{\frac{1}{2}}} \frac{|f(\sigma+it)|^2}{|\sigma - s_0 + it|^{2\varkappa+2}}\, dt\,.\end{aligned}$$

Hilfssatz 2: ([1], S. 333, Satz 5): *Für $\sigma > \sigma_\varkappa$ gilt*

$$f(\sigma + it) = o(|t|^{\varkappa+1})\,.$$

Aus diesen beiden Hilfssätzen erhalten wir sofort den

Satz 1: *Für $\sigma > \sigma_\varkappa$ gilt*

$$\left(\int_{-T}^{T} |f(\sigma+it)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \begin{cases} o\left(T^{\varkappa + \frac{1}{2} + \frac{1}{p}}\right) & \textit{für} \quad 1 \leqq p \leqq 2 \\ o(T^{\varkappa+1}) & \textit{für} \quad 2 \leqq p \leqq \infty\,. \end{cases}$$

Beweis: Für $1 \leqq p \leqq 2$ folgt mit Hilfssatz 1

$$\left(\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-T}^{T} dt\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} = o\left(T^{\varkappa + \frac{1}{2} + \frac{1}{p}}\right).$$

Für $2 < p < \infty$ ergibt sich aus den Hilfssätzen 1 und 2

$$\left(\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{-T}^{T} o\left(|t|^{(p-2)(\varkappa+1)}\right) |f(\sigma + it)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= o\left(T^{\left(1 - \frac{2}{p}\right)(\varkappa+1) + \frac{2}{p}(\varkappa+1)}\right) = o(T^{\varkappa+1}),$$

während der Fall $p = \infty$ mit dem Hilfssatz 2 äquivalent ist.

2. In umgekehrter Richtung beweisen wir zunächst den

Hilfssatz 3: *Die reellen Zahlen* $\varkappa \geqq 0$ *und* $\sigma > 0$ *sowie eine Funktion* $\eta(T)$, $T \geqq 1$, *mit*

$$0 < \eta(T) \neq O(1) \tag{2}$$

seien gegeben. Dann existiert ein Laplaceintegral $f(s)$ *mit* $\sigma_\varkappa \leqq 0$, *derart, daß*

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)| \, dt \neq O\left(\frac{T^{\varkappa + \frac{3}{2}}}{\eta(T)}\right).$$

Beweis: Da $\eta(T)$ unbeschränkt ist, gibt es eine Folge

$$4 < T_\nu \nearrow \infty, \; \nu \geqq \nu_0 > e^e \tag{3}$$

(über ν_0 wird später noch verfügt werden) mit

$$\eta(T_\nu) > \nu. \tag{4}$$

Zu jedem $\nu \geqq \nu_0$ bilden wir

$$\log\log\nu = \xi_1(\nu) < \xi_2(\nu) < \cdots < \xi_{l(\nu)}(\nu) < \xi_{l(\nu)+1}(\nu) = \log\log(\nu + 1),$$

worin

$$\xi_{m+1}(\nu) - \xi_m(\nu) \leqq \frac{1}{|\sigma + iT_\nu| \log\log(\nu + 1)} \quad \text{für} \quad m = 1, \ldots, l(\nu). \tag{5}$$

Die monotone Folge $\{\xi_m(\nu)\}$, $\nu \geqq \nu_0$, $m = 1, \ldots, l(\nu)$ werde mit $\{\lambda_\mu\}$, $\mu = 1, 2, \ldots$, bezeichnet. Es ist

$$\lambda_1 = \log\log\nu_0 > 1 \tag{6}$$

und wegen (5) gilt mit $\Delta\lambda_\mu = \lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu$

$$\lambda_\mu \Delta\lambda_\mu < \frac{1}{|\sigma + iT_\nu|} \quad \text{für} \quad \log\log\nu \leqq \lambda_\mu < \log\log(\nu + 1).$$

Daher haben wir bei

$$N_\nu = \operatorname{Min}\left\{n \mid \lambda_\mu \Delta\lambda_\mu \leqq \frac{1}{|\sigma + iT_\nu|} \quad \text{für} \quad \text{alle } \mu \geqq n\right\} \tag{7}$$

$\lambda_{N_\nu} \leqq \log\log\nu$, so daß aus (4) folgt

$$\eta(T_\nu)\,\frac{e^{-\lambda_{N_\nu}\sigma}}{\lambda_{N_\nu}} > \frac{\nu}{(\log\nu)^\sigma \log\log\nu} + O(1)^{2)}\,. \tag{8}$$

Wir bilden jetzt die Funktionen

$$\psi_\mu(u) = \int_0^u (u-v)^\varkappa \chi_\mu(v)\,dv,\ u \geqq 0,\ \mu = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

mit[3])

$$\chi_\mu(v) = \frac{k!}{(\Delta\lambda_\mu)^k\,\Gamma(\varkappa+1)\,\Gamma(k-\varkappa)} \sum_{0 \leqq m < \frac{k+1}{\Delta\lambda_\mu}(v-\lambda_\mu)} \times$$

$$\times\,(-1)^m \binom{k+1}{m}\left\{v - \left(\lambda_\mu + m\,\frac{\Delta\lambda_\mu}{k+1}\right)\right\}^{k-\varkappa-1},\quad k = [\varkappa]+1\,.$$

Nach [2], Lemma 1[4]) ist

$$\psi_\mu(u) = 0 \quad \text{für} \quad u \leqq \lambda_\mu \quad \text{und} \quad u > \lambda_{\mu+1} \tag{10}$$

und stets

$$|\psi_\mu(u)| \leqq b\,, \tag{11}$$

wo b nur von $\varkappa$ abhängt.

Ferner setzen wir

$$M_\nu = \mathrm{Min}\{\mu \mid \lambda_\mu \geqq \lambda_{N_\nu} + 3\pi\}\,, \tag{12}$$

$$\Phi_\mu(t) = \int_0^\infty e^{-su}\psi_\mu(u)\,du\,,\quad s = \sigma + it\,,\quad 1 \leqq \mu \leqq M_\nu\,,$$

und (mit ganzzahligem m) für $0 \leqq y \leqq 1$

$$h_\nu(t,y) = \begin{cases} r_m(y) & m \leqq t < m+1,\ \frac{T_\nu}{2} < m < T_\nu - 1\,,\\ 0 & \text{sonst}\,,\end{cases}$$

wobei $r_m(y) = \operatorname{sign}\sin(2^{m+1}\pi y)$ die m-te Rademacherfunktion bezeichnet.

Aus der Ungleichung[5])

$$\int_0^1 \sum_{\mu=1}^{M_\nu} \left|\int_{\frac{T_\nu}{2}}^{T_\nu} h_\nu(t,y)\,\Phi_\mu(t)\,dt\right| dy = \sum_{\mu=1}^{M_\nu} \int_0^1 \left|\sum_{\frac{T_\nu}{2} < m < T_\nu-1} r_m(y) \int_m^{m+1} \Phi_\mu(t)\,dt\right| dy$$

$$\geqq c_1 \sum_{\mu=1}^{M_\nu} \left(\sum_{\frac{T_\nu}{2} < m < T_\nu-1} \left|\int_m^{m+1} \Phi_\mu(t)\,dt\right|^2\right)^{\frac12}$$

---

[2]) Für die vorstehende Konstruktion vgl. [2], S. 141.

[3]) $\sum\limits_{0 \leqq m < x}$ sei Null für $x \leqq 0$.

[4]) Vgl. [2], S. 141. Die hier definierten $\psi_\mu(u)$ sind dort mit $\dfrac{f_{\lambda_\mu}(u)}{|\Delta\lambda_\mu|^k}$ bezeichnet.

[5]) Vgl. [4], S. 129.

(c_1 eine positive absolute Konstante) ergibt sich wegen $|h_\nu(t, y)| \leqq 1$ die Existenz einer Funktion $h_\nu(t)$ mit

$$\sum_{\mu=1}^{M_\nu}\left|\int_{\frac{T_\nu}{2}}^{T_\nu} h_\nu(t)\,\Phi_\mu(t)\,dt\right| \geqq c_1 \sum_{\mu=1}^{M_\nu}\left(\sum_{\frac{T_\nu}{2}<m<T_\nu-1}\left|\int_m^{m+1}\Phi_\mu(t)\,dt\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ |h_\nu(t)| \leqq 1^{6}).$$

Für

$$\Psi_\nu(u) = \sum_{\mu=1}^{M_\nu} \vartheta_{\mu,\nu}\,\psi_\mu(u)\,,\quad \vartheta_{\mu,\nu} = \operatorname{sign}\int_{\frac{T_\nu}{2}}^{T_\nu} h_\nu(t)\,\Phi_\mu(t)\,dt^{7})\,,$$

gilt infolgedessen

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\frac{T_\nu}{2}}^{T_\nu}\left|\int_0^\infty e^{-su}\,\Psi_\nu(u)\,du\right|dt \geqq \left|\int_{\frac{T_\nu}{2}}^{T_\nu} h_\nu(t)\sum_{\mu=1}^{M_\nu}\vartheta_{\mu,\nu}\,\Phi_\mu(t)\,dt\right|\\ &= \sum_{\mu=1}^{M_\nu}\left|\int_{\frac{T_\nu}{2}}^{T_\nu} h_\nu(t)\,\Phi_\mu(t)\,dt\right| \geqq c_1\sum_{\mu=1}^{M_\nu}\left(\sum_{\frac{T_\nu}{2}<m<T_\nu-1}\left|\int_m^{m+1}\Phi_\mu(t)\,dt\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Nach [2], S. 140 haben wir mit der Abkürzung $Q = s\dfrac{\Delta\lambda_\mu}{k+1}$

$$\Phi_\mu(t) = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}\,\Delta\lambda_\mu\,e^{-\lambda_\mu s}\left(\frac{1-e^{-Q}}{Q}\right)^{k+1}$$
$$= \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}\,\Delta\lambda_\mu\,e^{-\lambda_\mu s}\left\{1-\frac{k+1}{2}\,Q+\sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n\,Q^n\right\}.$$

Daher existiert eine nur von $\varkappa$ abhängige positive Konstante b_1, so daß für alle s mit $|s| \leqq \dfrac{b_1}{\Delta\lambda_\mu}$

$$(14)\qquad \Phi_\mu(t) = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}\,\Delta\lambda_\mu e^{-\lambda_\mu s}\,(1+\theta s\Delta\lambda_\mu)\,,\qquad |\theta| \leqq 1\,.$$

In (3) können wir uns ν_0 von vornherein so groß gewählt denken, daß $\lambda_{N_\nu} \geqq \dfrac{1}{b_1}$ für $\nu \geqq \nu_0$ gilt. Dann ergibt sich mit (7)

$$(15)\qquad |s| \leqq |\sigma + iT_\nu| \leqq \frac{1}{\lambda_\mu\Delta\lambda_\mu} \leqq \frac{b_1}{\Delta\lambda_\mu}\quad \text{für}\quad \frac{T_\nu}{2} \leqq t \leqq T_\nu,\ \mu \geqq N_\nu\,,$$

so daß (14) jedenfalls für $\dfrac{T_\nu}{2} \leqq t \leqq T_\nu$, $\mu \geqq N_\nu$ anwendbar ist. Wir erhalten

[6]) Eine derartige Verwendung der Rademacherfunktionen ist einer demnächst erscheinenden Arbeit von JURKAT und PEYERIMHOFF entnommen.

[7]) $\operatorname{sign} z = \dfrac{\bar z}{|z|}$, $z \neq 0$.

mit der Abkürzung $b_2 = c_1 \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}$

$$(16)\quad \begin{cases} c_1 \sum\limits_{\mu=N_\nu}^{M_\nu} \left(\sum\limits_{\frac{T_\nu}{2} < m < T_\nu - 1} \left| \int\limits_m^{m+1} \Phi_\mu(t)\, dt \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ = b_2 \sum\limits_{\mu=N_\nu}^{M_\nu} \Delta \lambda_\mu e^{-\lambda_\mu \sigma} \left(\sum\limits_{\frac{T_\nu}{2} < m < T_\nu - 1} \left| \int\limits_m^{m+1} e^{-i\lambda_\mu t}(1 + \theta(\sigma + it)\Delta \lambda_\mu)\, dt \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ = b_2 \sum\limits_{\mu=N_\nu}^{M_\nu} \frac{\Delta \lambda_\mu}{\lambda_\mu} e^{-\lambda_\mu \sigma} \times \\ \times \left(\sum\limits_{\frac{T_\nu}{2} < m < T_\nu - 1} |(e^{i\lambda_\mu} - 1) + \theta_1(\sigma + i(m+1))\lambda_\mu \Delta \lambda_\mu|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |\theta_1| \leq 1 . \end{cases}$$

Zur Abschätzung des letzten Ausdrucks betrachten wir dort diejenigen Elemente λ_{μ_j} der Folge $\{\lambda_\mu\}$, zu denen ein ganzes q mit $\left(2q + \frac{1}{2}\right)\pi \leq \lambda_\mu \leq \leq \left(2q + \frac{3}{2}\right)\pi$ existiert. Für diese ist wegen (15)

$$(17)\qquad |(e^{i\lambda_{\mu_j}} - 1) + \theta_1(\sigma + i(m+1))\, \lambda_{\mu_j} \Delta \lambda_{\mu_j}| \geq \sqrt{2} - 1 .$$

q_0 sei die kleinste ganze Zahl mit $\lambda_{N_\nu} \leq \left(2q_0 + \frac{1}{2}\right)\pi$. Für $\mu \geq N_\nu$ gilt wegen (15), (6) und (3) $\Delta \lambda_\mu \leq \frac{1}{\lambda_\mu |\sigma + iT_\nu|} < \frac{\pi}{3}$. Wählen wir im ersten und im dritten Drittel des Intervalls $\left[\left(2q_0 + \frac{1}{2}\right)\pi, \left(2q_0 + \frac{3}{2}\right)\pi\right]$ je eine Zahl der Folge $\{\lambda_{\mu_j}\}$, etwa λ_ω und λ_Ω, so ist $\lambda_\Omega - \lambda_{N_\nu} < 3\pi$ und mit (12) folgt

$$(18)\quad \begin{aligned} \sum_{N_\nu \leq \mu_j \leq M_\nu} \frac{\Delta \lambda_{\mu_j}}{\lambda_{\mu_j}} e^{-\lambda_{\mu_j}\sigma} &\geq \sum_{\mu=\omega}^{\Omega} \frac{\Delta \lambda_\mu}{\lambda_\mu} e^{-\lambda_\mu \sigma} \geq \frac{\pi}{3} \frac{e^{-\lambda_\Omega \sigma}}{\lambda_\Omega} \geq \\ &\geq \frac{\pi}{3} \frac{\lambda_{N_\nu}}{\lambda_{N_\nu} + 3\pi} e^{-3\pi\sigma} \frac{e^{-\lambda_{N_\nu}\sigma}}{\lambda_{N_\nu}} \geq K_0 \frac{e^{-\lambda_{N_\nu}\sigma}}{\lambda_{N_\nu}} , \end{aligned}$$

wobei K_0 eine nur von σ abhängige positive Konstante bezeichnet.

Nun ergibt sich aus (13) und (16) bis (18)

$$(19)\qquad \int\limits_{\frac{T_\nu}{2}}^{T_\nu} \left| \int\limits_0^\infty e^{-su} \Psi_\nu(u)\, du \right| dt \geq b_2 K_0 (\sqrt{2} - 1) \left(\frac{T_\nu}{2} - 2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\lambda_{N_\nu}\sigma}}{\lambda_{N_\nu}} .$$

Die Menge B der Funktionen

$$(20)\qquad \psi(u) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \beta_\mu \psi_\mu(u) , \quad \beta_\mu = O(1) ,$$

bildet, wenn die Norm durch $\|\psi\| = \sup\limits_{u \geq 0} |\psi(u)|$ erklärt wird, einen Banachraum[8]).

$$F_{T,h}(x) = \eta(T)\, T^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\frac{T}{2}}^{T} h(t) \int\limits_{0}^{\infty} e^{-su} x(u)\, du\, dt\,, \quad |h(t)| \leq 1\,, \quad x = x(u) \in B\,,$$

stellen in B lineare Funktionale dar. Es ist $\Psi_v \in B$ und nach (10) und (11) $\|\Psi_v\| \leq b$. (19) und (8) ergeben (man setze $h(t) = \operatorname{sign} \int\limits_0^\infty e^{-su} \Psi_v(u)\, du$), daß $\|F_{T,h}\|$ nicht für alle T und h beschränkt sein kann. Daher existiert nach dem Satz von BANACH-STEINHAUS ein $x_0 \in B$, so daß für eine passende Folge von Paaren (T, h) $|F_{T,h}(x_0)|$ unbeschränkt ist. Wegen

$$\eta(T)\, T^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\frac{T}{2}}^{T} \left| \int\limits_0^\infty e^{-su} x_0(u)\, du \right| dt \geq |F_{T,h}(x_0)|$$

müssen hierbei notwendig beliebig große Werte von T auftreten, d. h. es existiert eine Funktion $\psi(u)$ der Gestalt (20) mit

$$\int\limits_{\frac{T}{2}}^{T} \left| \int\limits_0^\infty e^{-su} \psi(u)\, du \right| dt \neq O\left(\frac{T^{\frac{1}{2}}}{\eta(T)}\right). \tag{21}$$

Mit den zugehörigen β_μ setzen wir

$$a(v) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \beta_\mu \chi_\mu(v)\ ^{9})$$

und erhalten wegen (9), (10) und (11)

$$\int\limits_0^u (u-v)^\varkappa a(v)\, dv = \psi(u) = O(1)\,.$$

Daher ist das Laplaceintegral

$$f(s) = \int\limits_0^\infty e^{-su} a(u)\, du$$

für $\sigma > 0$ $C_\varkappa$-summierbar, und es gilt dort[10])

$$f(s) = \frac{s^{\varkappa+1}}{\Gamma(\varkappa+1)} \int\limits_0^\infty e^{-su} \psi(u)\, du\,.$$

---

[8]) Vgl. [2], Lemma 2.
[9]) Diese Reihe bricht von $\lambda_\mu \geq v$ an ab.
[10]) Vgl. [2], S. 142.

Hieraus folgt mit (21)

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|\, dt \geqq \int_{\frac{T}{2}}^{T} \left| \frac{s^{\varkappa+1}}{\Gamma(\varkappa+1)} \int_0^\infty e^{-su} \psi(u)\, du \right| dt \geqq$$

$$\leqq \frac{T^{\varkappa+1}}{2^{\varkappa+1}\,\Gamma(\varkappa+1)} \int_{\frac{T}{2}}^{T} \left| \int_0^\infty e^{-su} \psi(u)\, du \right| dt + O\left(\frac{T^{\varkappa+\frac{3}{2}}}{\eta(T)} \right).$$

3. Wir erinnern an die folgende

Definition: ([3], S. 126): *Eine für $T \geqq T_0$ definierte positive Funktion $\varphi(T)$ heißt dort normal oszillierend, wenn zwei Konstanten C und γ existieren, so daß für alle $T_1, T_2 \geqq T_0$*

$$\varphi(T_2) \leqq C e^{\gamma |T_2 - T_1|} \varphi(T_1)$$

gilt.

(22) $\left\{\text{Ist } \varphi(T) \ (> 0) \text{ stückweise differenzierbar und stetig, und ist } \left| \frac{\varphi'}{\varphi}(T) \right| \leqq c, \text{ so ist } \varphi(T) \text{ normal oszillierend}^{11)}.\right.$

Ferner hat man ([3], S. 126, B.)

(23) $\left\{\text{Produkt und Quotient zweier normal oszillierender Funktionen sind wieder normal oszillierend.}\right.$

Nach [3] (Satz 2, S. 128 und Bemerkung 1, S. 131) gilt der

Hilfssatz 4: *Die Funktion $f(s)$ sei im Streifen*

$$\sigma_1 \leqq \operatorname{Re} s \leqq \sigma_2, \quad \sigma_2 > \sigma_1,$$

holomorph. Es sei p eine reelle Zahl $\geqq 1$. Mit zwei für $T \geqq T_0\ (\geqq 0)$ normal oszillierenden Funktionen $\varphi_m(T)$ gelte

$$\left(\int_{-T}^{T} |f(\sigma_m + it)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leqq \varphi_m(T) \quad \text{für} \quad T \geqq T_0,\ m = 1, 2,$$

und mit einer passenden Konstanten K sei im Streifen gleichmäßig

$$f(s) = O(e^{K|s|}). \tag{24}$$

Dann ist für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ und $T \geqq T_0$

$$\left(\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\varphi_1^{\frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1}}(T)\, \varphi_2^{\frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}}(T) \right).$$

Um Hilfssatz 4 anwenden zu können, müssen wir den Funktionen $\eta(T)$ in geeigneter Weise normal oszillierende Funktionen zuordnen. Dies geschieht durch

Hilfssatz 5: *Ist $\delta \geqq 1$ und*

$$0 < \eta(T) + O(1) \quad (T \geqq 1),$$

---

11) Dies folgt aus [3], S. 126, C.

so gibt es eine Folge $\{T_\nu\} \nearrow \infty$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *und eine normal oszillierende Funktion*

$$(25) \qquad 1 \leqq \varphi(T) + O(1) \quad (T \geqq 1),$$

derart, daß für gewisse Zahlen U_ν *mit*

$$T_\nu < U_\nu < T_{\nu+1}$$

gilt:

$$(26) \qquad \frac{\varphi(T)}{T^\delta} \leqq \frac{\eta(T_{\nu+1})}{T_{\nu+1}^\delta} \quad \textit{für} \quad U_\nu \leqq T \leqq T_{\nu+1}, \nu = 1, 2, \ldots.$$

Beweis: Da wir $\eta(T) = o(T)$ annehmen dürfen[12]), können wir eine Folge $\{T_\nu\} \nearrow \infty$ so wählen, daß

$$2^\delta \leqq \eta(T_\nu) \to \infty, \quad \eta(T_{\nu+1}) < \frac{T_{\nu+1}}{T_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, T_1 \geqq 2.$$

Es sei weiter

$$V_\nu = T_{\nu+1} - \eta(T_{\nu+1}), \quad U_\nu = T_{\nu+1}\eta^{-\frac{1}{\delta}}(T_{\nu+1}),$$

so daß offenbar für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$T_\nu < U_\nu < V_\nu < T_{\nu+1}, \quad \frac{V_\nu}{U_\nu} \to \infty$$

gilt.

Wir setzen nun

$$(27) \qquad \varphi(T) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 1 \leqq T \leqq T_1 \quad \text{und} \quad T_\nu \leqq T \leqq U_\nu \\ \left(\frac{T}{U_\nu}\right)^\delta & \text{für} \quad U_\nu \leqq T \leqq V_\nu \\ \text{linear} & \text{für} \quad V_\nu \leqq T \leqq T_{\nu+1} \end{cases}, \nu = 1, 2, \ldots.$$

Man erkennt, daß (25) erfüllt ist. Um zu beweisen, daß die stückweise differenzierbare und stetige Funktion $\varphi(T)$ für $T \geqq 1$ normal oszilliert, zeigen wir im Hinblick auf (22)

$$(28) \qquad \left|\frac{\varphi'}{\varphi}(T)\right| \leqq c, \quad T \geqq 1.$$

Hierfür brauchen wir ersichtlich nur die Intervalle $V_\nu \leqq T \leqq T_{\nu+1}$ zu untersuchen, und dort ist

$$\left|\frac{\varphi'}{\varphi}(T)\right| \leqq \frac{\left(\frac{V_\nu}{U_\nu}\right)^\delta - 1}{T_{\nu+1} - V_\nu} \leqq \frac{\left(\frac{T_{\nu+1}}{U_\nu}\right)^\delta}{\eta(T_{\nu+1})} = 1.$$

Schließlich ergibt sich für $U_\nu \leqq T \leqq T_{\nu+1}$

$$\frac{\varphi(T)}{T^\delta} \leqq U_\nu^{-\delta} = \frac{\eta(T_{\nu+1})}{T_{\nu+1}^\delta}.$$

---

[12]) Anderenfalls ersetze man $\eta(T)$ etwa durch die Funktion

$$\eta_1(T) = \begin{cases} \eta(T) & \text{für} \quad \eta(T) \leqq \sqrt{T} \\ \sqrt{T} & \text{für} \quad \eta(T) > \sqrt{T} \end{cases},$$

so daß (26), wenn für $\eta_1(T)$ bewiesen, wegen $\eta_1(T) \leqq \eta(T)$ auch für $\eta(T)$ richtig bleibt.

4. Jetzt beweisen wir den

Satz 2: *Die reellen Zahlen $\varkappa \geqq 0$ und α sowie eine Funktion $\eta(T)$, $T \geqq 1$, mit*

$$0 < \eta(T) \neq O(1)$$

seien gegeben. Dann existiert ein Laplaceintegral $f(s)$ mit $\sigma_\varkappa = \alpha$, derart, daß für $1 \leqq p \leqq 2$ und jedes $\sigma > \sigma_\varkappa$

$$\left(\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \neq O\left(\frac{T^{\varkappa + \frac{1}{2} + \frac{1}{p}}}{\eta(T)}\right). \tag{29}$$

Beweis: Wegen der Hölderschen Ungleichung in der Gestalt

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|\, dt \leqq \left(\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} (2\,T)^{1-\frac{1}{p}}$$

genügt es, $p = 1$ anzunehmen.

Daß zu jedem festen $\sigma > \sigma_\varkappa$ ein gewünschtes Laplaceintegral existiert, ergibt sich aus Hilfssatz 3, wenn man dort $f(s)$ zunächst durch $f(s) + \frac{1}{s}$ ersetzt (damit wird $\sigma_\varkappa = 0$) und dann zu $f_1(s) = f(s-\alpha) + \frac{1}{s-\alpha}$ übergeht. Wir werden jedoch zeigen, daß bereits eine Funktion für alle $\sigma > \sigma_\varkappa$ ausreicht.

Zu $\delta = \varkappa + \frac{3}{2}$ und unserem $\eta(T)$ werde die Folge $\{T_\nu\}$ und die normal oszillierende Funktion $\varphi(T)$ gemäß Hilfssatz 5 gewählt. Man erkennt nach dem Kriterium (22) aus (25) und (28), daß auch $\log(\varphi(T) + 1)$ für $T \geqq 1$ normal oszilliert. Zu festem $\zeta > \alpha$ und der Funktion $\log(\varphi(T) + 1)$, die (2) erfüllt, existiert nach Hilfssatz 3 und der vorstehenden Bemerkung ein Laplaceintegral $f(s)$ mit $\sigma_\varkappa = \alpha$ und

$$\int_{-T}^{T} |f(\zeta + it)|\, dt \neq O\left(\frac{T^{\varkappa + \frac{3}{2}}}{\log(\varphi(T) + 1)}\right). \tag{30}$$

Wir werden beweisen, daß diese für $\sigma > \sigma_\varkappa$ holomorphe Funktion dort (29) genügt.

Wäre zunächst für ein $(\sigma_\varkappa <)\sigma \neq \zeta$ mit einer von T unabhängigen Konstanten

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|\, dt \leqq K \frac{T^{\varkappa + \frac{3}{2}}}{\varphi(T)}, \quad T \geqq 1, \tag{31}$$

so wählen wir ein σ' mit $\sigma < \zeta < \sigma'$ oder $\sigma_\varkappa < \sigma' < \zeta < \sigma$. Nach Satz 1 ist jedenfalls

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma' + it)|\, dt \leqq K' T^{\varkappa + \frac{3}{2}}, \quad T \geqq 1. \tag{32}$$

Die rechten Seiten in (31) und (32) sind wegen (22) und (23) für $T \geqq 1$ normal oszillierend. Hiernach ergibt der Hilfssatz 4 [(24) ist wegen Hilfssatz 2 erfüllt]

$$\int_{-T}^{T} |f(\zeta + it)|\, dt = O\left(T^{\varkappa + \frac{3}{2}} \varphi^{-\frac{\sigma' - \zeta}{\sigma' - \sigma}}(T)\right),$$

so daß (31) einen Widerspruch zu (30) liefert.

Daher gibt es zu jedem $\sigma > \sigma_\varkappa$ eine Folge $\tau_n \nearrow \infty$ mit

$$\frac{\varphi(\tau_n)}{\tau_n^{\varkappa + \frac{3}{2}}} \int_{-\tau_n}^{\tau_n} |f(\sigma + it)|\, dt \nearrow \infty. \tag{33}$$

Für $n \geqq n_0$ muß τ_n wegen Satz 1 und (27) stets in den Teil $U_\nu \ldots T_{\nu+1}$ eines Intervalles $T_\nu \ldots T_{\nu+1}$ fallen, so daß wir mit (26) für $n \geqq n_0$ und eine Teilfolge der T_ν

$$\frac{\eta(T_{\nu+1})}{T_{\nu+1}^{\varkappa + \frac{3}{2}}} \int_{-T_{\nu+1}}^{T_{\nu+1}} |f(\sigma + it)|\, dt \geqq \frac{\varphi(\tau_n)}{\tau_n^{\varkappa + \frac{3}{2}}} \int_{-\tau_n}^{\tau_n} |f(\sigma + it)|\, dt$$

erhalten. Hieraus ergibt sich wegen (33) unsere Behauptung.

5. Jetzt soll der Fall $p \geqq 2$ behandelt werden. Hier beweisen wir den

Satz 3: *Die reellen Zahlen $\varkappa \geqq 0$ und α sowie eine Funktion $\eta(T)$, $T \geqq 1$, mit*

$$0 < \eta(T) \neq O(1)$$

seien gegeben. Dann existiert ein Laplaceintegral $f(s)$ mit $\sigma_\varkappa = \alpha$, derart, daß für jedes reelle $p \geqq 2$ und jedes $\sigma > \sigma_\varkappa$

$$\left(\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \neq O\left(\frac{T^{\varkappa+1}}{\eta(T)}\right). \tag{34}$$

Beweis: Zu $\delta = \varkappa + 1$ und unserer Funktion $\eta(T)$ werde wieder die Folge $\{T_\nu\}$ und die normal oszillierende Funktion $\varphi(T)$ gemäß Hilfssatz 5 gewählt.

Nach [2], Satz 1 gibt es ein Laplaceintegral $f(s)$ mit $\sigma_\varkappa \leqq 0$, so daß

$$f\left(\varrho + i\frac{T}{2}\right) \neq O\left(\frac{T^{\varkappa+1}}{\varphi^{\frac{1}{2}}(T)}\right) \quad \text{für jedes rationale } \varrho > 0. \tag{35}$$

Es genügt zu zeigen, daß (34) bei diesem $f(s)$ für jedes reelle $p \geqq 2$ und jedes $\sigma > 0$ zutrifft, denn hieraus ergibt sich der Satz 3 durch Übergang zu $f(s - \alpha) + \frac{1}{s - \alpha}$.

Auf Grund der Cauchyschen Formel gilt, wenn R das Rechteck mit den Eckpunkten $\zeta_m \pm iT$, $m = 1, 2$, bezeichnet,

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{f(z) e^{(z-s)^2}}{z - s}\, dz, \quad s = \varrho + i\frac{T}{2},\ T \geqq 1,\ 0 < \zeta_1 < \varrho < \zeta_2.$$

Da R rechts von $\sigma_\varkappa$ gelegen ist, streben nach Hilfssatz 2 die Integrale über die Horizontalen bei $T \to \infty$ gegen Null. Auf der Vertikalen ζ_m, $m = 1, 2$, gilt

für $p > 1$

$$\int\limits_{\zeta_m - iT}^{\zeta_m + iT} \frac{f(z)e^{(z-s)^2}}{z-s}\,dz = O\left(\left(\int\limits_{-T}^{T} |f(\zeta_m + it)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{-T}^{T} e^{-\left(\frac{T}{2}-t\right)^2 \frac{p}{p-1}}\,dt\right)^{1-\frac{1}{p}}\right).$$

Folglich haben wir

$$f\left(\varrho + i\,\frac{T}{2}\right) = O\left(\operatorname*{Max}_{m=1,2}\left(\int\limits_{-T}^{T} |f(\zeta_m + it)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right) \tag{36}$$

für $0 < \zeta_1 < \varrho < \zeta_2,\ p \geqq 2$.

Sei $p \geqq 2$ gegeben, und wir wollen für unser $f(s)$ (34) auf $\sigma_1 (> 0)$ nachweisen. Hierzu wählen wir ein rationales $\varrho > \sigma_1$ und alsdann ζ_m, $m = 1, 2$, so daß

$$0 < \sigma_1 < \zeta_1 < \varrho < \zeta_2 .$$

Wegen (35) und (36) existiert ein $\sigma > \sigma_1$ mit

$$\left(\int\limits_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \neq O\left(\frac{T^{\varkappa+1}}{\varphi^{\frac{1}{2}}(T)}\right). \tag{37}$$

Jetzt setzen wir $\sigma_2 = 2\sigma - \sigma_1$, d. h. wir haben

$$0 < \sigma_1 < \sigma < \sigma_2 , \quad \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{1}{2}. \tag{38}$$

Nach Satz 1 gilt mit einer von T unabhängigen Konstanten K_2

$$\left(\int\limits_{-T}^{T} |f(\sigma_2 + it)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqq K_2 T^{\varkappa+1}, \quad T \geqq 1 . \tag{39}$$

Wäre nun

$$\left(\int\limits_{-T}^{T} |f(\sigma_1 + it)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqq K_1 \frac{T^{\varkappa+1}}{\varphi(T)}, \quad T \geqq 1 , \tag{40}$$

so folgte aus Hilfssatz 4 wegen (38), da die rechten Seiten in (40) und (39) wie im Beweise von Satz 2 als normal oszillierende Funktionen erkannt werden,

$$\left(\int\limits_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{T^{\varkappa+1}}{\varphi^{\frac{1}{2}}(T)}\right)$$

im Widerspruch zu (37).

Daher existiert eine Folge $\tau_n \nearrow \infty$ mit

$$\frac{\varphi(\tau_n)}{\tau_n^{\varkappa+1}}\left(\int\limits_{-\tau_n}^{\tau_n} |f(\sigma_1 + it)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \nearrow \infty ,$$

und hieraus ergibt sich der Übergang zu (34) wie am Ende des Beweises von Satz 2.

Bemerkung: *Satz 3 bleibt auch für $p = \infty$ richtig.*

Um dies einzusehen, wende man Satz 3 mit der Funktion $\eta^{\frac{1}{2}}(T)$ für $p = 4$ und Satz 1 für $p = 2$ auf die Abschätzung

$$\eta^{\frac{1}{2}}(T)\left(\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \leqq \left(\eta(T) \operatorname*{Max}_{|t| \leq T} |f(\sigma + it)|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^2 dt\right)^{\frac{1}{4}}$$

an.

Literatur

[1] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. I. Basel 1950.
[2] Peyerimhoff, A.: Über das Anwachsen der $C_\varkappa$-Mittel von Laplace-Integralen auf vertikalen Geraden. Math. Ann. 128, 138—143 (1954).
[3] Peyerimhoff, A., u. H.-E. Richert: Über das Anwachsen analytischer Funktionen auf vertikalen Geraden. Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. 11, 125—134 (1957).
[4] Zygmund, A.: Trigonometrical series. Warszawa 1935.

(Eingegangen am 28. Oktober 1960)

KULTZE, R.
Math. Annalen 143, 163—186 (1961)

Lokalholomorphe Funktionen und das Geschlecht kompakter Riemannscher Flächen

Von
ROLF KULTZE in Bonn

Die lokalholomorphen Funktionen spielen seit ihrer Einführung durch SEBASTIÃO E SILVA [20], [21] eine wichtige Rolle in der Funktionalanalysis. Eine lokalholomorphe Funktion auf einer beliebigen Teilmenge $\mathfrak{M}$ der Riemannschen Zahlenkugel oder allgemeiner einer Riemannschen Fläche ist eine Äquivalenzklasse von holomorphen Funktionen, die in gewissen Umgebungen von $\mathfrak{M}$ erklärt sind. Die lokalholomorphen Funktionen auf $\mathfrak{M}$ bilden einen Vektorraum $\mathfrak{H}(\mathfrak{M})$. SEBASTIÃO E SILVA führt die Fantappièsche Theorie der analytischen Funktionale zurück auf das Studium gewisser stetiger Abbildungen der Räume $\mathfrak{H}(\mathfrak{M})$, die man mit einer geeigneten Topologie versieht. Kurze Zeit später zeigten KÖTHE [15] und GROTHENDIECK [10] (vgl. auch [13]), daß man den topologischen Dual des Raumes $\mathfrak{H}(O)$ der holomorphen Funktionen auf der offenen Teilmenge O der Riemannschen Zahlenkugel Ω mit einem Raum lokalholomorpher Funktionen identifizieren kann. Damit hat man eine neue Auffassung der lokalholomorphen Funktionen gewonnen. Die Ergebnisse von KÖTHE und GROTHENDIECK wurden von TILLMANN [25] auf Riemannsche Flächen übertragen.

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, wie man mit Hilfe der lokalholomorphen Funktionen auf einer kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ das Geschlecht von $\mathfrak{R}$ bestimmen kann. Dazu untersuchen wir zunächst die Eigenschaften Čechscher Homologiegruppen mit Koeffizienten in Cogarbendaten. Die Konstruktion dieser Homologiegruppen stellt eine Verallgemeinerung der Čechschen Definition dar und verläuft völlig dual zur Konstruktion der Cohomologiegruppen in der Garbentheorie. Ebenso bilden die Cogarbendaten das duale Gegenstück zu den Garbendaten. Wählt man als Koeffizienten ein konstantes Cogarbendatum, so erhält man gerade die gewöhnlichen Čechschen Homologiegruppen.

Ein klassisches Resultat über die Beziehung von (Čechschen) Homologie- und Cohomologiegruppen lautet folgendermaßen [14]: Ist X ein kompakter topologischer Raum, $\mathcal{G}$ eine abzählbare Gruppe und $\mathcal{G}^*$ ihre Charakterengruppe, so ist $H_n(X, \mathcal{G}^*)$ die Charakterengruppe von $H^n(X, \mathcal{G})$. — Wir wollen im

folgenden zunächst Dualitätssätze dieses Typs für die verallgemeinerten Čechschen Homologie- und Cohomologiegruppen herleiten. Daraus lassen sich dann in einfacher Weise unter Benutzung garbentheoretischer Resultate Endlichkeitssätze für Homologiegruppen gewinnen. Insbesondere folgt daraus, daß nichtkonstante Cogarbendaten existieren, deren Homologiegruppen nicht für alle $q \geqq 0$ verschwinden. Damit ist also gezeigt, daß die Verallgemeinerung der Čechschen Homologiegruppen sinnvoll ist.

Die Arbeit gliedert sich in sieben Paragraphen. In § 1 wird neben der Definition der Cogarbendaten und einigen Beispielen der Begriff des topologisch dualen Cogarbendatums eingeführt, der in der Arbeit eine wesentliche Rolle spielen wird. Die topologisch dualen Cogarbendaten entstehen in natürlicher Weise aus den topologischen Vektorraumgarben, die sich in der Garbentheorie vielfach als nützlich erwiesen haben. § 2 enthält die Konstruktion der Homologiegruppen mit Koeffizienten in Cogarbendaten. In § 3 versehen wir zunächst die Cohomologiegruppen $H^q(X, \mathcal{G})$ eines topologischen Raumes X mit Koeffizienten in der topologischen Vektorraumgarbe $\mathcal{G}$ in natürlicher Weise mit einer lokalkonvexen (nicht notwendig separierten) Topologie. Satz 3.1 enthält dann hinreichende Bedingungen dafür, daß der topologische Dual von $H^q(X, \mathcal{G})$ kanonisch isomorph ist zur q-ten Homologiegruppe $H_q(X, \mathcal{G}')$ von X mit Koeffizienten in dem zu $\mathcal{G}$ topologisch dualen Cogarbendatum $\mathcal{G}'$. In § 4 ziehen wir einige Folgerungen aus diesem Dualitätssatz. Unter gewissen Voraussetzungen über X und $\mathcal{G}$ stellt die topologische Dualität zwischen $H^q(X, \mathcal{G})$ und $H_q(X, \mathcal{G}')$ gleichzeitig eine duale Paarung im algebraischen Sinne dar. Daraus entnimmt man insbesondere, daß die Vektorräume $H^q(X, \mathcal{G})$ und $H_q(X, \mathcal{G}')$ gleiche (endliche) Dimension besitzen. Gilt Satz 3.1, so lassen sich die nullten Homologiegruppen in einfacher Weise charakterisieren. Ferner werden zwei vereinfachte Konstruktionsmöglichkeiten für die Homologiegruppen angegeben: a) in bestimmten Fällen sind die Homologiegruppen von X isomorph zu den Homologiegruppen einer Lerayschen Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X, b) unter geeigneten Voraussetzungen lassen sich die Homologiegruppen auch aus einem formalen Komplex bestimmen. — Da die analytisch-kohärenten Garben über komplexen Mannigfaltigkeiten topologische Vektorraumgarben sind, kann man den Cartan-Serreschen Endlichkeitssatz und théorème B unter Verwendung der Resultate von § 4 dualisieren. Außerdem kann man das arithmetische Geschlecht kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten homologisch kennzeichnen. Dies ist der Inhalt von § 5. In § 6 leiten wir unter Benutzung der Theorie der bigraduierten Differentialformen und Ströme eine Poincarésche Dualität auf kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten her, die es gestattet, gewisse Homologiegruppen mit geeigneten Räumen bigraduierter, komplex-harmonischer Differentialformen zu identifizieren. In § 7 schließlich konstruieren wir ein Cogarbendatum lokalholomorpher Funktionen auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht p, dessen erste Homologiegruppe gerade die Dimension p besitzt.

Etwa zu der Zeit, als diese Arbeit entstand, wurden unabhängig dieselben in § 2 konstruierten Homologiegruppen von LUFT [17] konstruiert. Die weiteren

Untersuchungen von Luft bestehen darin, ein Axiomensystem dieser Theorie für parakompakte Räume aufzustellen[1]).

Eine Zusammenfassung eines Teiles unserer Ergebnisse ist in [16] erschienen.

§ 1. Cogarbendaten

Die Cogarbendaten, die wir im folgenden definieren werden, bilden das duale Gegenstück zu den Garbendaten. Ebenso läßt sich der Begriff der Garbe selbst dualisieren, worauf wir aber an dieser Stelle nicht weiter eingehen.

Definition 1.1 *(Cogarbendatum): Es sei X ein topologischer Raum, K ein kommutativer unitärer Ring. Ein Cogarbendatum ist wie folgt gegeben: Jeder offenen Menge $U \subset X$ ist ein K-Modul G_U zugeordnet und jedem Paar U, V von offenen Mengen aus X mit $U \subset V$ ein K-Homomorphismus $r_U^V : G_U \to G_V$, derart, daß gilt:*

I) Ist U die Nullmenge, so ist G_U der Nullmodul.

II) $r_U^U =$ Identität.

III) Für $U \subset V \subset W$ gilt $r_U^W = r_V^W \circ r_U^V$.

In naheliegender Weise lassen sich Homomorphismen von Cogarbendaten definieren:

Definition 1.2 *(Homomorphismen von Cogarbendaten): Es seien $\{G_U; r_U^V\}$ und $\{\tilde{G}_U; \tilde{r}_U^V\}$ zwei Cogarbendaten von K-Moduln. Ein Homomorphismus von $\{G_U; r_U^V\}$ in $\{\tilde{G}_U; \tilde{r}_U^V\}$ ist ein System $\{h_U\}$ von K-Homomorphismen $h_U: G_U \to \tilde{G}_U$, so daß die Diagramme*

$$\begin{array}{ccc} G_U & \xrightarrow{h_U} & \tilde{G}_U \\ {\scriptstyle r_U^V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{r}_U^V} \\ G_V & \xrightarrow[h_V]{} & \tilde{G}_V \end{array}$$

kommutativ sind.

Die Cogarbendaten über dem topologischen Raum X bilden eine abelsche Kategorie.

Ebenso lassen sich die Begriffe Untergarbendatum und Quotientengarbendatum dualisieren. Ferner definiert jeder Homomorphismus $h: \{G_U; r_U^V\} \to \to \{\tilde{G}_U; \tilde{r}_U^V\}$ zwei Cogarbendaten, die wir kurz als *Kern* und *Bild von h* bezeichnen. Eine *exakte Sequenz von Cogarbendaten* liegt vor, wenn für jedes offene $U \subset X$ die entsprechenden Cogarbendatenmoduln eine exakte Sequenz bilden.

---

[1]) Kürzlich ist es Herrn Gerstner (Erlangen) gelungen, mit Hilfe der Satellitentheorie ein Axiomensystem dieser Homologietheorie für beliebige topologische Räume anzugeben.

Zusatz bei der 1. Korrektur (14. 3. 61): Man vgl. dazu O. Gerstner: Homologie-Moduln über abelschen Halbgruppen. Bestimmung der Čechschen Homologie-Moduln eines Raumes X durch einen Funktionenring über X. Bonner math. Schriften Nr. 12 (1961), Teil III. — Siehe ferner: Y. Kawada: Theory of cosheaves. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 8, 439—506 (1960).

Beispiel 1: Ordnet man jeder nicht-leeren offenen Menge $U \subset X$ einen festen K-Modul G zu, so erhält man das konstante Cogarbendatum, wenn r_U^V die identische Abbildung ist.

Beispiel 2: $\mathcal{D}$ bezeichne die Gesamtheit der auf dem R^n definierten C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger (vgl. [18]). Dann sei $\mathcal{D}_U$ der Untermodul derjenigen Funktionen aus $\mathcal{D}$, deren Träger in U enthalten ist. $r_U^V(U \subset V)$ sei die kanonische Injektion von $\mathcal{D}_U$ in $\mathcal{D}_V$.

Beispiel 3: Es sei wieder $X = R^n$ und U eine offene Teilmenge von X. $\mathcal{E}_U$ bezeichne den Raum der auf U definierten C^∞-Funktionen. Die Halbnormen $p_{K,m}^U(\varphi) = \sup\limits_{x \in K \subset U} \sup\limits_{1 \leq p \leq m} |D^p \varphi(x)|$ (K kompakt) definieren auf U eine lokalkonvexe Topologie. Dann bilden die topologischen Duale $\mathcal{E}'_U$ zusammen mit den Transponierten der Restriktionshomomorphismen $r_V^U: \mathcal{E}_U \to \mathcal{E}_V (V \subset U)$ ein Cogarbendatum. $\mathcal{E}'_U$ besteht genau aus denjenigen Distributionen aus $\mathcal{E}'$ (zur Def. vgl. [18]), deren Träger in U enthalten ist.

Weitere Beispiele folgen in den nächsten Paragraphen.

Wie Luft [17] gezeigt hat, läßt sich der Begriff der feinen Garbe über einem parakompakten Raum in sinnvoller Weise auf Cogarbendaten übertragen. Die Formulierung dieser Begriffsbildung ist allerdings etwas schwieriger als in der Garbentheorie, da das zum Halm einer Garbe duale Gegenstück nicht verfügbar ist. Wie man leicht zeigt, ist $\{\mathcal{D}_U; r_U^V\}$ (vgl. oben) ein Beispiel für ein feines Cogarbendatum. Daraus folgt insbesondere, daß die Homologiegruppen des R^n mit Koeffizienten in $\{\mathcal{D}_U; r_U^V\}$ für $q \geqq 1$ verschwinden[2]).

Im folgenden spielen die *topologischen Vektorraumgarben* eine wesentliche Rolle.

Definition 1.3 *(Topologische Vektorraumgarbe): Eine topologische Vektorraumgarbe (TV-Garbe) ist eine Garbe $\mathcal{G}$ über dem topologischen Raum X, deren Schnittflächenmoduln $\Gamma(U, \mathcal{G})$ (U offen) lokalkonvexe Vektorräume über dem Körper der komplexen Zahlen sind, so daß die Homomorphismen $r_V^U: \Gamma(U, \mathcal{G}) \to \to \Gamma(V, \mathcal{G})$ $(V \subset U)$ stetig sind*[3]).

TV-Garben, deren Schnittflächenmoduln $\mathcal{F}$-Räume sind, bezeichnen wir kurz als $\mathcal{F}$-Garben[4]).

Viele Garben, die in den Anwendungen auftreten, sind TV-Garben. Als Beispiel nennen wir die analytisch-kohärenten Garben über komplexen Mannigfaltigkeiten (vgl. § 5), ferner die in Beispiel 3 definierte Garbe.

Jede TV-Garbe $\mathcal{G}$ definiert ein Cogarbendatum $\mathcal{G}'$, dessen Moduln G'_U die topologischen Duale $\Gamma'(U, \mathcal{G})$ und dessen Homomorphismen die transponierten Abbildungen ${}^t r_V^U: \Gamma'(V, \mathcal{G}) \to \Gamma'(U, \mathcal{G})$ $(V \subset U)$ sind.

---

[2]) Dies folgt aus [17], Satz 4.5.2.

[3]) Eine etwas andere Definition findet man bei Grothendieck [11], der die TV-Garben zum Beweis von Endlichkeitssätzen für Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in Garben heranzieht.

[4]) Als $\mathcal{F}$-Raum bezeichnen wir einen lokalkonvexen, vollständigen, metrisierbaren Vektorraum.

Definition 1.4 *(Topologisch duales Cogarbendatum): Ein Cogarbendatum $\mathfrak{G}'$ heißt zu der TV-Garbe $\mathfrak{G}$ topologisch dual, wenn $\mathfrak{G}'$ durch topologische Dualisierung im obigen Sinne aus $\mathfrak{G}$ entstanden ist.*

§ 2. Homologiegruppen mit Koeffizienten in Cogarbendaten

Die Cohomologiegruppen eines parakompakten Raumes X mit Koeffizienten in einer Garbe über X lassen sich nach verschiedenen Methoden berechnen:

1) Mittels (feiner) Auflösungen.
2) Durch eine verallgemeinerte Čechsche Konstruktion[5]).
3) Mittels welker Auflösungen (vgl. dazu [8], chap. II, § 4).

Ähnlich wie in der Garbentheorie lassen sich Homologiegruppen mit Koeffizienten in einem Cogarbendatum definieren. Die Konstruktion verläuft dual zur oben genannten Konstruktion der Čechschen Cohomologiegruppen der Garbentheorie (Methode 2). Wir werden später sehen, daß es möglich ist, die Homologiegruppen in gewissen Fällen auch auf anderem Wege zu berechnen (Satz 4.5). Dazu werden die (feinen) Auflösungen von Garben herangezogen (Methode 1).

Es sei $\mathfrak{G} = \{G_U; r_U^V\}$ ein Cogarbendatum über X und $\mathfrak{U} = \{U_\iota\}_{\iota\in I}$ eine Überdeckung von X. Dann sei der q-te Kettenmodul $C_q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ gegeben durch

$$C_q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) = \sum_{\langle \iota_0, \ldots, \iota_q\rangle} G_{U_{\iota_0} \cap \ldots \cap U_{\iota_q}} \quad (q \geq 0)$$

und $C_q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) = 0$ für $q < 0$. Wir können nun einen Randhomomorphismus $\partial_q^{\mathfrak{U}} : C_{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \to C_q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ folgendermaßen erklären: Hat $f_{q+1}^{\mathfrak{U}} \in C_{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ die endlich vielen nichtverschwindenden Komponenten

$$f_{q+1}^{\mathfrak{U}}\langle i_0^{(\nu)}, \ldots, i_{q+1}^{(\nu)}\rangle \in G_{U_{i_0^{(\nu)}} \cap \ldots U_{i_{q+1}^{(\nu)}}} \quad (\nu = 1, \ldots, n)\,,$$

so sei

$$\partial_q^{\mathfrak{U}} f_{q+1}^{\mathfrak{U}} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varkappa=0}^{q+1} (-1)^\varkappa r_{U_{i_0^{(\nu)}} \ldots i_{q+1}^{(\nu)}}^{U_{i_0^{(\nu)}} \ldots \hat{i}_\varkappa^{(\nu)} \ldots i_{q+1}^{(\nu)}} f_{q+1}^{\mathfrak{U}}\langle i_0^{(\nu)}, \ldots, i_{q+1}^{(\nu)}\rangle\,,$$

dabei setzen wir für $U_{i_0^{(\nu)}} \cap \ldots \cap \hat{U}_{i_\varkappa^{(\nu)}} \cap \ldots \cap U_{i_{q+1}^{(\nu)}}$ zur Abkürzung $U_{i_0^{(\nu)} \ldots \hat{i}_\varkappa^{(\nu)} \ldots i_{q+1}^{(\nu)}}$. Dann gilt in gewohnter Weise:

$$\partial_q^{\mathfrak{U}} \circ \partial_{q+1}^{\mathfrak{U}} = 0\,.$$

Es genügt, den Beweis für Ketten mit einer einzigen nichtverschwindenden Komponente zu führen. Wir setzen $\partial_q^\varkappa = r_{U_{\iota_0 \ldots \iota_{q+1}}}^{U_{\iota_0 \ldots \hat{\iota}_\varkappa \ldots \iota_{q+1}}}$ und erhalten für $\varkappa < \lambda : \partial_q^\varkappa \circ \partial_{q+1}^\lambda = \partial_q^{\lambda-1} \circ \partial_{q+1}^\varkappa$. Wegen $\partial_q^{\mathfrak{U}} = \sum_{\varkappa=0}^{q+1} (-1)^\varkappa \partial_q^\varkappa$ folgt daher die obige Beziehung.

---

[5]) Gelegentlich genügt es schon, die Cohomologiegruppen zu *einer* Überdeckung $\mathfrak{U}$ zu bestimmen, wenn $\mathfrak{U}$ eine *Leraysche Überdeckung* ist, vgl. Hilfssatz 4.2.

Damit können wir die Homologiegruppen $H_q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ zur Überdeckung $\mathfrak{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{G}$ definieren:

$$H_q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) = (\partial_{q-1}^{\mathfrak{U}})^{-1}(0)/\partial_q^{\mathfrak{U}}(C_{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{G})) .$$

Es sei $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ und τ eine Abbildung von J in I mit $V_j \subset U_{\tau_j}$. Dann induziert die Abbildung τ einen Homomorphismus $\tau_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : C_q(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) \to C_q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$:

$$\tau_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}(f_q^{\mathfrak{V}}\langle j_0, \ldots, j_q\rangle) = r_{V_{j_0 \ldots j_q}}^{U_{\tau_{j_0} \ldots \tau_{j_q}}} f_q^{\mathfrak{V}}\langle j_0, \ldots, j_q\rangle .$$

Wie man sofort zeigt, ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_{q+1}(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\partial_q^{\mathfrak{V}}} & C_q(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_{q+1\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}} \\ C_{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) & \xrightarrow[\partial_q^{\mathfrak{U}}]{} & C_q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \end{array}$$

kommutativ. Am einfachsten zerlegt man den Randhomomorphismus wieder in Komponenten, und verifiziert das Diagramm komponentenweise.

Hilfssatz 2.1: *Es seien τ und $\bar{\tau}$ zwei Abbildungen von J in I mit $V_j \subset U_{\tau_j} \cap U_{\bar{\tau}_j}$. Dann sind die durch τ und $\bar{\tau}$ induzierten Homomorphismen $\tau_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ und $\bar{\tau}_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ kettenhomotop, d. h. es existiert ein Homotopieoperator $k_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : C_{q-1}(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) \to C_q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ mit*

$$\partial_q^{\mathfrak{U}} \circ k_{q+1\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} + k_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} \circ \partial_{q-1}^{\mathfrak{V}} = \bar{\tau}_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} - \tau_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} .$$

Beweis: Den Homotopieoperator $k_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ definieren wir durch

$$k_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}(f_{q-1}^{\mathfrak{V}}\langle j_0, \ldots, j_{q-1}\rangle) = \sum_{\mu=0}^{q-1} (-1)^{\mu}\, r_{V_{j_0 \ldots j_{q-1}}}^{U_{\tau_{j_0} \ldots \tau_{j_\mu} \bar{\tau}_{j_\mu} \ldots \bar{\tau}_{j_{q-1}}}} f_{q-1}^{\mathfrak{V}}\langle j_0, \ldots, j_{q-1}\rangle .$$

Damit läßt sich dann die obige Relation verifizieren.

Die Abbildungen $\tau_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ induzieren daher einen Homomorphismus $t_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : H_q(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) \to H_q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, der von der Abbildung $\tau : J \to I$ unabhängig ist. Außerdem beweist man sofort:

1) $t_{q\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}} =$ Identität.

2) Ist $\mathfrak{W}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{V}$, so gilt

$$t_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} \circ t_{q\mathfrak{W}}^{\mathfrak{V}} = t_{q\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}} .$$

Damit können wir nun die Homologiegruppen $H_q(X, \mathcal{G})$ von X mit Koeffizienten in $\mathcal{G}$ definieren:

Definition 2.1 *(Homologiegruppen $H_q(X, \mathcal{G})$): Die Homologiegruppe $H_q(X, \mathcal{G})$ ($q \geqq 0$, ganz) des topologischen Raumes X mit Koeffizienten in dem Cogarbendatum $\mathcal{G}$ ist der projektive Limes der Homologiegruppen $H_q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ bezüglich der Abbildungen $t_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$, wobei $\mathfrak{U}$ alle eigentlichen Überdeckungen von X durchläuft.*

Ist $\mathfrak{G}$ ein konstantes Cogarbendatum, so erhalten wir gerade die klassischen Čechschen Homologiegruppen.

Sind $\{G_U; r_U^V\}$ und $\{\tilde{G}_U; \tilde{r}_U^V\}$ zwei Cogarbendaten über dem topologischen Raum X und ist $\{h_U\}$ ein Homomorphismus von $\{G_U; r_U^V\}$ in $\{\tilde{G}_U; \tilde{r}_U^V\}$, so läßt sich $\{h_U\}$ in natürlicher Weise zu einem Homomorphismus

$$h_q^* : H_q(X, \mathfrak{G}) \to H_q(X, \tilde{\mathfrak{G}})$$

fortsetzen. Die Konstruktion geschieht folgendermaßen: Zunächst induziert $\{h_U\}$ für jede Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X einen Homomorphismus von $C_q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ in $C_q(\mathfrak{U}, \tilde{\mathfrak{G}})$, der mit den Randoperatoren verträglich ist. Daher hat man einen Homomorphismus $h_q^{\mathfrak{U}} : H_q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \to H_q(\mathfrak{U}, \tilde{\mathfrak{G}})$. Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(\mathfrak{V}, \mathfrak{G}) & \xrightarrow{h_q^{\mathfrak{V}}} & H_q(\mathfrak{V}, \tilde{\mathfrak{G}}) \\ \downarrow{\scriptstyle t_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{t}_{q\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}} \\ H_q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) & \xrightarrow[h_q^{\mathfrak{U}}]{} & H_q(\mathfrak{U}, \tilde{\mathfrak{G}}) \end{array}$$

für alle Verfeinerungen $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{U}$ kommutativ ist, erhält man schließlich durch Limesbildung den obigen Homomorphismus. Die Homologiegruppen $H_q(X, \mathfrak{G})$ sind also kovariante Funktoren auf der abelschen Kategorie der Cogarbendaten über X.

Jeder exakten Sequenz $0 \to \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'' \to 0$ von Cogarbendaten über X und jeder ganzen Zahl q läßt sich in natürlicher Weise ein Homomorphismus

$$\partial_q^* : H_q(X, \mathfrak{G}'') \to H_{q-1}(X, \mathfrak{G}')$$

zuordnen. Die Homologiesequenz

$$\cdots \leftarrow H_{q-1}(X, \mathfrak{G}') \xleftarrow{\partial_q^*} H_q(X, \mathfrak{G}'') \leftarrow H_q(X, \mathfrak{G}) \leftarrow H_q(X, \mathfrak{G}') \leftarrow \cdots$$

ist i. a. nicht exakt, da der projektive Limes exakter Sequenzen nicht exakt zu sein braucht. Genaueres darüber findet man in [17], § 4.

§ 3. Ein Dualitätssatz für Homologie- und Cohomologiegruppen

Wir beweisen nun einen Dualitätssatz, aus dem wir im folgenden eine Reihe von Folgerungen ziehen werden. Insbesondere gestattet er es, die Homologiegruppen mit Koeffizienten in geeigneten Cogarbendaten zu berechnen.

Zur Formulierung dieses Satzes sind einige Vorbemerkungen nötig. Ist $\mathfrak{G}$ eine TV-Garbe, so kann man den q-ten Cokettenmodul

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) = \prod_{(i_0, \ldots, i_q)} G_{U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}}$$

zur Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X mit der lokalkonvexen Produkttopologie versehen. Aus der Dualität von topologischem Produkt und direkter Summe der Duale

folgt sofort für das zu $\mathcal{G}$ topologisch duale Cogarbendatum:

$$(C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}))' \cong C_q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}')^{6)} .$$

Es ist evident, daß die Abbildungen $\delta^q_{\mathfrak{U}} : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, $\tau^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to C^q(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ und $t^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ stetig sind[7]).

I sei nun eine gerichtete Menge, und jedem $i \in I$ sei ein lokalkonvexer Vektorraum E_i zugeordnet, ferner existiere zu jedem Paar $i, j \in I$ mit $i < j$ eine lineare stetige Abbildung $g_{ij} : E_i \to E_j$ mit der Eigenschaft $g_{ik} = g_{jk} \circ g_{ij}$ für $i < j < k$. Ist E der induktive Limes der Räume E_i bezüglich der Abbildungen g_{ij}, so sind die Homomorphismen $g_i : E_i \to E$ wohldefiniert. Die feinste aller auf E lokalkonvexen Topologien, für die die Abbildungen g_i stetig sind, heißt die limite-inductive-Topologie von E bezüglich $\{E_i; g_{ij}; i, j \in I\}$. Die Topologie von E braucht nicht separiert zu sein, auch dann nicht, wenn die Räume E_i separiert sind. Eine Nullumgebungsbasis von E ist gegeben durch die Mengen $\Gamma \bigcup_{i \in I} g_i(V_i)$, wenn für alle $i \in I$ die V_i eine Nullumgebungsbasis in E_i durchlaufen, vgl. [2], chap. II, § 2.4 (Γ bezeichne den Übergang zur absolutkonvexen Hülle). Ist I' ein confinales Teilsystem von I, so ist die limite-inductive-Topologie $\mathcal{T}$ von E identisch mit der auf E feinsten lokalkonvexen Topologie $\mathcal{T}'$, für die die Abbildungen $g_{i'} : E_{i'} \to E\ (i' \in I')$ stetig sind.

Ist $\mathcal{G}$ eine TV-Garbe, so sind die Cohomologiegruppen $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ lokalkonvex und die Abbildungen $t^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ stetig. Daher können wir $H^q(X, \mathcal{G})$ mit der natürlichen limite-inductive-Topologie versehen. In speziellen Fällen ist $H^q(X, \mathcal{G})$ *separiert* (vgl. § 4).

Nunmehr können wir den Dualitätssatz formulieren:

Satz 3.1: *Es sei X ein im Unendlichen abzählbarer lokalkompakter Raum, $\mathcal{G}$ eine $\mathcal{F}$-Garbe[8]) und $\mathcal{G}'$ das zu $\mathcal{G}$ topologisch duale Cogarbendatum. Existiert ein confinales System $\{\mathfrak{U}\}$ von Überdeckungen von X mit der Eigenschaft, daß für alle $q \geqq 0$ die Abbildungen $\delta^q_{\mathfrak{U}} : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ topologische Homomorphismen sind, so ist der topologische Dual von $H^q(X, \mathcal{G})$, versehen mit der natürlichen limite-inductive-Topologie, kanonisch isomorph $H_q(X, \mathcal{G}')$[9]).*

Beweis: 1. Zunächst benötigen wir den

Hilfssatz 3.1: *Es seien drei $\mathcal{F}$-Räume E, F, G gegeben, ferner zwei topologische Homomorphismen $u : E \to F$ und $v : F \to G$ mit $v \circ u = 0$. ${}^t u : F' \to E'$ und ${}^t v : G' \to F'$ seien die transponierten Abbildungen. Dann ist $H = v^{-1}(0)/u(E)$ ein $\mathcal{F}$-Raum, und es gilt:*

$$H' = \left(\frac{v^{-1}(0)}{u(E)}\right)' \cong \frac{{}^t u^{-1}(0)}{{}^t v(G')} .$$

Zum Beweis vgl. [23], lemme 1.

---

[6]) Zum Beweis vgl. etwa [3], chap. IV, § 2.8; die Dualität gilt auch dann, wenn die Komponenten des Produkts nicht-separiert sind.

[7]) Für die Definitionen dieser Abbildungen vgl. [12], § 2.6.

[8]) Zur Definition vgl. S. 166.

[9]) Als *topologischen Homomorphismus* $f : X \to Y$ bezeichnen wir eine stetige Abbildung von X in Y, die bezüglich $f(X)$ offen ist, vgl. N. BOURBAKI, Top. Gén., chap. III, § 2.

2. Da die Abbildungen $\delta^q_{\mathfrak{U}} : C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \to C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ stetig sind, kann man die Transponierte ${}^t\delta^q_{\mathfrak{U}}$ von $\delta^q_{\mathfrak{U}}$ betrachten. Wir behaupten:

$$ {}^t\delta^q_{\mathfrak{U}} = \partial^{\mathfrak{U}}_q : C_{q+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{G}') \to C_q(\mathfrak{U}, \mathscr{G}') . $$

Beweis: Es sei $f_{q+1} \in C_{q+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{G}')$, $f_{q+1}\langle i^{(\nu)}_0, \ldots, i^{(\nu)}_{q+1}\rangle$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ seien die nichtverschwindenden Komponenten von f_{q+1}. Dann läßt sich f_{q+1} vermöge der dualen Paarung von $C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ und $C_{q+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{G}')$ darstellen in der Form

$$ \langle f^{q+1}, f_{q+1}\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \langle f^{q+1}\langle i^{(\nu)}_0, \ldots, i^{(\nu)}_{q+1}\rangle, f_{q+1}\langle i^{(\nu)}_0, \ldots, i^{(\nu)}_{q+1}\rangle\rangle $$

mit $f^{q+1} \in C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$. Somit gilt:

$$ \langle f^q, \partial^{\mathfrak{U}}_q f_{q+1}\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varkappa=0}^{q+1} (-1)^\varkappa \langle f^q\langle i^{(\nu)}_0 \ldots \hat{i}^{(\nu)}_\varkappa \ldots i^{(\nu)}_{q+1}\rangle, {}^t r^{U_{i^{(\nu)}_0 \ldots \hat{i}^{(\nu)}_\varkappa \ldots i^{(\nu)}_{q+1}}}_{U_{i^{(\nu)}_0 \ldots i^{(\nu)}_{q+1}}} \times $$

$$ \times f_{q+1}\langle i^{(\nu)}_0, \ldots, i^{(\nu)}_{q+1}\rangle\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \Big\langle \sum_{\varkappa=0}^{q+1} (-1)^\varkappa r^{U_{i^{(\nu)}_0 \ldots \hat{i}^{(\nu)}_\varkappa \ldots i^{(\nu)}_{q+1}}}_{U_{i^{(\nu)}_0 \ldots i^{(\nu)}_{q+1}}} f^q\langle i^{(\nu)}_0 \ldots \hat{i}^{(\nu)}_\varkappa \ldots i^{(\nu)}_{q+1}\rangle, $$

$$ f_{q+1}\langle i^{(\nu)}_0, \ldots, i^{(\nu)}_{q+1}\rangle\Big\rangle = \langle \delta^q_{\mathfrak{U}} f^q, f_{q+1}\rangle = \langle f^q, {}^t\delta^q_{\mathfrak{U}} f_{q+1}\rangle . $$

3. Da X als im Unendlichen abzählbar lokalkompakt vorausgesetzt wurde, brauchen wir im folgenden nur noch abzählbare Überdeckungen zu betrachten. Da das abzählbare topologische Produkt von $\mathscr{F}$-Räumen wieder ein $\mathscr{F}$-Raum ist, sind die Cokettenmoduln $C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ wieder $\mathscr{F}$-Räume. Sind die Abbildungen $\delta^q_{\mathfrak{U}} : C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \to C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ topologische Homomorphismen, so folgt aus 1. und 2.:

$$ H_q(\mathfrak{U}, \mathscr{G}') \cong (H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{G}))' . $$

4. Wir zeigen nun, daß $t_q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H_q(\mathfrak{V}, \mathscr{G}') \to H_q(\mathfrak{U}, \mathscr{G}')$ die Transponierte von $t^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \to H^q(\mathfrak{V}, \mathscr{G})$ ist: Es sei $s^q_{\mathfrak{U}} = [f^q_{\mathfrak{U}}] \in H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ mit $f^q_{\mathfrak{U}} \in (\delta^q_{\mathfrak{U}})^{-1}(0)$, $s^{\mathfrak{U}}_q = [f^{\mathfrak{U}}_q] \in H_q(\mathfrak{U}, \mathscr{G}')$ mit $f^{\mathfrak{U}}_q \in (\partial^{\mathfrak{U}}_{q-1})^{-1}(0)$. Die duale Paarung von $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ und $H_q(\mathfrak{U}, \mathscr{G}')$ ist gegeben durch

$$ \langle s^q_{\mathfrak{U}}, s^{\mathfrak{U}}_q\rangle = \langle f^q_{\mathfrak{U}}, f^{\mathfrak{U}}_q\rangle . $$

Damit erhält man

$$ \langle s^q_{\mathfrak{U}}, {}^t t^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} s^{\mathfrak{V}}_q\rangle = \langle t^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} s^q_{\mathfrak{U}}, s^{\mathfrak{V}}_q\rangle = \langle \tau^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} f^q_{\mathfrak{U}}, f^{\mathfrak{V}}_q\rangle = \langle f^q_{\mathfrak{U}}, \tau_q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} f^{\mathfrak{V}}_q\rangle = \langle s^q_{\mathfrak{U}}, t_q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} s^{\mathfrak{V}}_q\rangle $$

wegen $\tau_q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} = {}^t\tau^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$, was man sofort bestätigt.

5. Es gilt der folgende

Hilfssatz 3.2: *Ist E der algebraische induktive Limes der lokalkonvexen Vektorräume E_i bezüglich der stetigen Abbildungen $g_{ij} : E_i \to E_j (i < j)$, versehen mit der natürlichen limite-inductive-Topologie, so ist der topologische Dual von E kanonisch isomorph zum projektiven Limes der topologischen Duale E'_i bezüglich der transponierten Abbildungen ${}^tg_{ij} : E'_j \to E'_i$.*

Die duale Paarung erhält man folgendermaßen: Ist $x' \in E'$, so läßt sich x' in der Form (x'_i) mit $x'_i = {}^tg_{ij}(x'_j)$ für $i < j$ darstellen $(x'_i \in E'_i)$. Vermöge

$\langle x, x'\rangle = \langle g_i(x_i), x'\rangle = \langle x_i, x_i'\rangle$ $(x \in E)$ definiert x' in eindeutiger Weise eine stetige Linearform auf E. Zum Beweis vgl. [22], S. 409. Aus 3., 4. und Hilfssatz 3.2 folgt dann die Behauptung.

§ 4. Folgerungen aus dem Dualitätssatz

In Satz 3.1 ist die Forderung wesentlich, daß für ein confinales Überdeckungssystem $\{\mathfrak{U}\}$ von X für alle $q \geqq 0$ die Corandhomomorphismen $\delta_{\mathfrak{U}}^q$ topologische Homomorphismen sind. Wir geben daher zunächst ein hinreichendes Kriterium dafür an, daß dies tatsächlich der Fall ist:

Hilfssatz 4.1: *Ist $\mathcal{G}$ eine $\mathcal{F}$-Garbe über X, $\mathfrak{U}$ eine abzählbare Überdeckung von X und $H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ endlichdimensional, so ist $\delta_{\mathfrak{U}}^q: C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ ein topologischer Homomorphismus.* Der Beweis folgt sofort aus [23], lemme 2 mit $u = \delta_{\mathfrak{U}}^q$, $L = C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ und $M = (\delta_{\mathfrak{U}}^{q+1})^{-1}(0)$. Wegen der Stetigkeit von $\delta_{\mathfrak{U}}^{q+1}$ ist M abgeschlossen, also in der Tat ein $\mathcal{F}$-Raum.

Damit sind wir nun in der Lage, einige Folgerungen aus Satz 3.1 zu ziehen.

Satz 4.1: *Ist X ein im Unendlichen abzählbarer lokalkompakter Raum, $\mathcal{G}$ eine feine $\mathcal{F}$-Garbe, so gilt für das topologisch duale Cogarbendatum $\mathcal{G}'$:*

$$H_q(X, \mathcal{G}') = 0 \qquad (q \geqq 1).$$

Beweis: Da $\mathcal{G}$ fein und X parakompakt ist, verschwinden die Cohomologiegruppen $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ $(q \geqq 1)$ für alle lokalendlichen Überdeckungen (vgl. etwa [12], S. 37). Die Behauptung ergibt sich dann aus Satz 3.1 und Hilfssatz 4.1.

Satz 4.1 läßt sich z. B. auf das in § 1 eingeführte Cogarbendatum $\{\mathcal{E}'(U); r_U^V\}$ anwenden.

Satz 4.1 kann man wie folgt verallgemeinern:

Satz 4.2: *Ist X ein im Unendlichen abzählbar lokalkompakter Raum, $\mathcal{G}$ eine $\mathcal{F}$-Garbe und existiert ein confinales System $\{\mathfrak{U}\}$ von Überdeckungen von X mit $\dim H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) < \infty$, $q \geqq 1$, so gilt für das topologisch duale Cogarbendatum $\mathcal{G}'$:*

$$(H^q(X, \mathcal{G}))' \cong H_q(X, \mathcal{G}') \qquad (q \geqq 0)$$

Beweis klar.

Die *Lerayschen Überdeckungen* haben sich in der Garbentheorie als überaus nützlich erwiesen, da sie es gestatten, die Cohomologiegruppen eines parakompakten Raumes mit Koeffizienten in einer Garbe in einfacher Weise zu berechnen. Eine lokalendliche Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eines parakompakten Raumes X heißt Leraysche Überdeckung von X bezüglich der Garbe $\mathcal{G}$, wenn für alle Garben $\mathcal{G}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n})$[10] $(i_0, \ldots, i_n \in I, n = 0, 1, \ldots)$ und alle $q \geqq 1$ gilt:

$$H^q(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n}, \mathcal{G}) = 0\,.$$

Die Nützlichkeit dieser Definition entnimmt man aus

[10]) $\mathcal{G}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n})$ sei die Restriktion von $\mathcal{G}$ auf $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n}$.

Hilfssatz 4.2 (Leray): *Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe über dem parakompakten Raum X und $\mathfrak{U}$ eine Leraysche Überdeckung von X bezüglich $\mathcal{G}$, so sind die Homomorphismen*

$$r^q_{\mathfrak{U}}: H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to H^q(X, \mathcal{G})$$

für alle $q \geqq 0$ isomorph auf.

Zum Beweis vgl. man [5], exp. XVII.

Satz 4.3: *Ist X ein im Unendlichen abzählbarer lokalkompakter Raum, $\mathcal{G}$ eine $\mathcal{F}$-Garbe mit* $\dim H^q(X, \mathcal{G}) < \infty$ *für alle $q \geqq 1$, und existiert ein confinales System $\{\mathfrak{U}\}$ von Lerayschen Überdeckungen von X bezüglich $\mathcal{G}$, so gilt*

$$(H^q(X, \mathcal{G}))' \cong H_q(X, \mathcal{G}') \qquad (q \geqq 0)\,.$$

Für $q \geqq 1$ kann $(H^q(X, \mathcal{G}))'$ sowohl als der Raum aller als auch der Raum aller stetigen Funktionale interpretiert werden, es gilt also $\dim H^q(X, \mathcal{G}) = \dim H_q(X, \mathcal{G}')$ *für alle $q \geqq 1$. $H^q(X, \mathcal{G})$ ist, versehen mit der natürlichen limite-inductive-Topologie, separiert.*

Beweis: Die Überdeckungen $\mathfrak{U}$ können wir wieder als abzählbar voraussetzen. Nach Hilfssatz 4.2 gilt dann für alle $\mathfrak{U} \in \{\mathfrak{U}\}$: $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \cong H^q(X, \mathcal{G})$. Ist $\mathfrak{W} \in \{\mathfrak{U}\}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{V} \in \{\mathfrak{U}\}$, so ist auch die stetige Abbildung $t^{q\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}}: H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) \to H^q(\mathfrak{W}, \mathcal{G})$ bijektiv, d. h. nach einem Satz von Banach[11]) sind $H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ und $H^q(\mathfrak{W}, \mathcal{G})$ zueinander homöomorph. Sind $\mathfrak{V}, \mathfrak{W} \in \{\mathfrak{U}\}$ beliebig gewählt, so existiert eine gemeinsame Verfeinerung $\tilde{\mathfrak{U}} \in \{\mathfrak{U}\}$. Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & & \\
 & H^q(\tilde{\mathfrak{U}}, \mathcal{G}) \arrow[r] & H^q(X, \mathcal{G}) \\
H^q(\mathfrak{W}, \mathcal{G}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

folgt dann, daß $H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ und $H^q(\mathfrak{W}, \mathcal{G})$ zueinander homöomorph sind. Dieser Homöomorphismus ist von $\mathfrak{U}$ unabhängig. Daher ist auch $H^q(X, \mathcal{G})$ ein $\mathcal{F}$-Raum. Die im Satz behauptete Dualität folgt aus Satz 4.2, die Dimensionsaussage aus der Separiertheit der Topologie von $H^q(X, \mathcal{G})$.

Corollar: *Ist X ein im Unendlichen abzählbarer lokalkompakter Raum, $\mathcal{G}$ eine $\mathcal{F}$-Garbe mit* $\dim H^q(X, \mathcal{G}) < \infty$ *für alle $q \geqq 1$, und existiert ein confinales System $\{\mathfrak{U}\}$ von Lerayschen Überdeckungen von X, so sind für alle $\mathfrak{U} \in \{\mathfrak{U}\}$ die Abbildungen*

$$r^{\mathfrak{U}}_q: H_q(X, \mathcal{G}') \to H_q(\mathfrak{U}, \mathcal{G}')$$

Isomorphismen.

Unter den genannten Voraussetzungen genügt also bei der Berechnung der $H_q(X, \mathcal{G}')$ bereits die Kenntnis der Homologiegruppen für eine Leraysche Überdeckung.

Bislang haben wir den nullten Homologiemodul $H_0(X, \mathcal{G})$ eines Cogarbendatums $\mathcal{G}$ noch nicht charakterisiert. Während in der Garbentheorie der nullte

---

11) Sind E und F zwei $\mathcal{F}$-Räume und ist f eine stetige lineare eineindeutige Abbildung von E auf F, so ist f ein Homöomorphismus, vgl. [2], chap. I, § 3.3.

Cohomologiemodul einer Garbe $\mathscr{G}^*$ kanonisch isomorph zu dem globalen Schnittflächenmodul $\Gamma(X, \mathscr{G}^*)$ ist, ist eine ähnliche Kennzeichnung von $H_0(X, \mathscr{G})$ im allgemeinen nicht ohne weiteres zu erwarten, da wir keine *kanonischen* Cogarbendaten definiert haben. In speziellen Fällen gibt jedoch der folgende Satz Auskunft:

Satz 4.4: *Ist X ein im Unendlichen abzählbarer lokalkompakter Raum, $\mathscr{G}$ eine $\mathscr{F}$-Garbe und gilt $(H^0(X, \mathscr{G}))' \cong H_0(X, \mathscr{G}')$, so ist $H_0(X, \mathscr{G}')$ kanonisch isomorph zu dem globalen Cogarbendatenmodul von $\mathscr{G}'$.*

Sind also speziell die Bedingungen von Satz 3.1 erfüllt, so gilt auch Satz 4.4.

Beweis: Die im folgenden auftretenden Überdeckungen können wir wieder als abzählbar voraussetzen. Ist $\mathfrak{U} = \{U_\iota\}_{\iota \in I}$ eine solche Überdeckung, so hat man bekanntlich

$$\Gamma(X, \mathscr{G}) \cong H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \subset C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) = \prod_{\iota \in I} \Gamma(U_\iota, \mathscr{G}),$$

d. h. $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ ist ein $\mathscr{F}$-Raum[12]), dessen Topologie wir mit $\mathscr{T}_2$ bezeichnen, $\mathscr{T}_1$ sei die $\mathscr{F}$-Topologie von $\Gamma(X, \mathscr{G})$. Da $\mathscr{G}$ eine TV-Garbe ist, ist mit den Abbildungen $r^X_{U_\iota} : \Gamma(X, \mathscr{G}) \to \Gamma(U_\iota, \mathscr{G})$ $(\iota \in I)$ auch $r_\mathfrak{U} : \Gamma(X, \mathscr{G}) \to H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ stetig, dabei sei $r_\mathfrak{U}\sigma(X) = \prod_{\iota \in I} r^X_{U_\iota}\sigma(X)$ $(\sigma(X) \in \Gamma(X, \mathscr{G}))$. $r_\mathfrak{U}$ ist also nach dem Satz von BANACH ein Homöomorphismus, woraus die Behauptung folgt, da $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ zu $H^0(X, \mathscr{G})$ homöomorph ist.

Aus Satz 4.4 folgt, daß die nullte Homologiegruppe $H_0(R^n, \{\mathscr{E}'_U\})$ des in § 1, Beispiel 3 eingeführten Cogarbendatums zu $\mathscr{E}' = \mathscr{E}'_{R^n}$ isomorph ist.

Daß $H_0(X, \mathscr{G})$ nicht immer kanonisch isomorph zum globalen Cogarbendatenmodul von $\mathscr{G}$ zu sein braucht, zeigt ein einfaches Beispiel: Ordnet man jeder echten offenen Teilmenge U von X den Nullmodul 0_U zu, dem ganzen Raum X hingegen einen nichttrivialen Modul G_X, ist ferner $r^V_U : 0_U \to 0_V$ bzw. $r^X_U : 0_U \to G_X$ der Nullhomomorphismus, so erhält man ein Cogarbendatum $\tilde{\mathscr{G}}$ mit $H_0(X, \tilde{\mathscr{G}}) = 0 \neq G_X$. Ähnliche Erscheinungen treten in der Garbentheorie bei den flachen Garbendaten auf.

Bislang haben wir die Homologiegruppen von X mit Koeffizienten in einem Cogarbendatum mit Hilfe des Systems der eigentlichen Überdeckungen von X bzw. unter Verwendung einer einzigen Lerayschen Überdeckung (Corollar zu Satz 4.3) konstruiert. Im folgenden geben wir eine dritte Konstruktionsmöglichkeit an, die wesentlich die Berechnung der Cohomologiegruppen aus Auflösungen benutzt (vgl. etwa [12], § 2.12).

Satz 4.5: *Es sei X ein im Unendlichen abzählbarer lokalkompakter Raum, $\mathscr{G}$ eine $\mathscr{F}$-Garbe mit* $\dim H^q(X, \mathscr{G}) < \infty$ *für alle $q \geq 1$, und es existiere ein confinales System $\{\mathfrak{U}\}$ von Lerayschen Überdeckungen von X. Ferner sei eine Auflösung*

$$0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}_0 \to \mathscr{G}_1 \to \cdots$$

von $\mathscr{G}$ gegeben mit der Eigenschaft:

[12]) Da $H^0(\mathfrak{U}, G) = (\delta^0_\mathfrak{U})^{-1}(0)$ und der Kern einer stetigen Abbildung abgeschlossen ist, ist $H^0(\mathfrak{U}, G)$ ein $\mathscr{F}$-Raum.

1) *Die $\Gamma(X, \mathcal{G}_q)$ sind $\mathcal{F}$-Räume* ($q \geq 0$).

2) *Die Abbildungen $h_q : \Gamma(X, \mathcal{G}_q) \to \Gamma(X, \mathcal{G}_{q+1})$ sind stetig* ($q \geq 0$).

Dann lassen sich die Homologiegruppen $H_q(X, \mathcal{G}')$ des topologisch dualen Cogarbendatums $\mathcal{G}'$ aus der Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{{}^t h_q} \Gamma'(X, \mathcal{G}_q) \xrightarrow{{}^t h_{q-1}} \cdots \xrightarrow{{}^t h_1} \Gamma'(X, \mathcal{G}_1) \xrightarrow{{}^t h_0} \Gamma'(X, \mathcal{G}_0) \to 0$$

wie folgt berechnen:

$$H_q(X, \mathcal{G}') \cong \operatorname{Kern}({}^t h_{q-1})/\operatorname{Bild}({}^t h_q) \qquad (q \geq 0)\,.$$

Beispiele von $\mathcal{F}$-Garben, die den Forderungen dieses Satzes genügen, werden wir in § 6 kennenlernen.

Beweis: Wegen $\dim H^q(X, \mathcal{G}) < \infty$ und [23], lemme 2 sind die Abbildungen h_q topologische Homomorphismen[13]). Nach Satz 4.3 und Hilfssatz 3.1 gilt daher

$$H_q(X, \mathcal{G}') \cong (H^q(X, \mathcal{G}))' \cong (\operatorname{Kern}(h_q)/\operatorname{Bild}(h_{q-1}))' \cong \operatorname{Kern}({}^t h_{q-1})/\operatorname{Bild}({}^t h_q)\,,$$

denn da die Topologien von $H^q(X, \mathcal{G})$ und $\operatorname{Kern}(h_q)/\operatorname{Bild}(h_{q-1})$ separiert sind, sind ihre topologischen Duale kanonisch isomorph.

Bemerkung: Unsere Resultate lassen sich nun in folgender Weise verallgemeinern: Da die Topologie von $H^q(X, \mathcal{G})$ bereits unter Benutzung eines confinalen Überdeckungssystems $\{\mathfrak{U}\}$ von X definiert werden kann, braucht man nur zu verlangen, daß die Räume $\Gamma(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n}, \mathcal{G})$ ($U_{i_\nu} \in \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \in \{\mathfrak{U}\}$) $\mathcal{F}$-Räume sind. Daher bleiben die Sätze 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 und 4.5 erhalten, wenn $\mathcal{G}$ eine TV-Garbe mit der ebengenannten Eigenschaft ist.

§ 5. Anwendungen auf kompakte und holomorph-vollständige Mannigfaltigkeiten

Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{O}$ die Garbe der Keime lokaler holomorpher Funktionen auf X; $O_x (x \in X)$ ist ein Integritätsring, das Einselement $1_x \in O_x$ variiert stetig mit x.

Eine Garbe $\mathcal{G}$ über X heißt *analytisch*, wenn jeder Halm G_x von $\mathcal{G} (x \in X)$ unitärer O_x-Modul und die Abbildung $(o_x, g_x) \to o_x \cdot g_x$ von

$$\mathfrak{M} = \{(o_x, g_x) : o_x \in O_x, g_x \in G_x\} \subset \mathcal{O} \times \mathcal{G}$$

in $\mathcal{G}$ stetig ist. Sind $\mathcal{G}^1$ und $\mathcal{G}^2$ zwei analytische Garben über X, so läßt sich über X das Tensorprodukt $\mathcal{G}^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}^2$ definieren; $\mathcal{G}^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}^2$ ist wieder analytisch, und es gilt $(\mathcal{G}^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}^2)_x = G^1_x \otimes_{O_x} G^2_x$ für alle $x \in X$ (vgl. [24]). Ein Garbenhomomorphismus h der analytischen Garbe $\mathcal{G}^1$ in die analytische Garbe $\mathcal{G}^2$ heißt $\mathcal{O}$-Homomorphismus, wenn die Restriktion $h_x : G^1_x \to G^2_x$ für jedes $x \in X$ ein O_x-Homomorphismus ist.

---

[13]) In [23] lemme 2 setzt man $L = \Gamma(X, \mathcal{G}_q)$ und $M = h_{q+1}^{-1}(0)$.

$\mathcal{S}$ sei eine analytische Garbe über X, ferner seien n Schnitte $\sigma^1, \ldots, \sigma^n \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ gegeben. Vermöge

$$(o^1_x, \ldots, o^n_x) \to \sum_{i=1}^{n} o^i_x \sigma^i_x \qquad (x \in U)$$

wird ein $\mathcal{O}$-Homomorphismus α von $\mathcal{O}^n(U)$[14]) in $\mathcal{S}(U)$ definiert. α definiert zwei neue analytische Garben, nämlich Kern $\alpha = \mathcal{R}(\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$ („Garbe der Relationen zwischen den $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$") und Bild α (die „von den $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$ über U erzeugte Garbe"). $\mathcal{S}$ heißt *analytisch-kohärent*, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) *$\mathcal{S}$ ist von endlichem Typ: es existiert eine Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X, so daß die Garbe $\mathcal{S}(U_i)$ für jedes $i \in I$ durch endlich viele Schnitte $\sigma^1_i, \ldots, \sigma^{n_i}_i$ erzeugt wird.*

2) *Sind $\sigma^1, \ldots, \sigma^m \in \Gamma(U, \mathcal{S})$, so ist $\mathcal{R}(\sigma^1, \ldots, \sigma^m)$ von endlichem Typ.*

Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert daher eine Umgebung $U \subset X$ mit der Eigenschaft, daß die Sequenz

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{R}(\sigma^1_U, \ldots, \sigma^n_U) \to \mathcal{O}^n(U) \to \mathcal{S}(U) \to 0$$

für geeignetes n exakt ist ($\sigma^1_U, \ldots, \sigma^n_U \in \Gamma(U, \mathcal{S}), \mathcal{R}(\sigma^1_U, \ldots, \sigma^n_U)$ von endlichem Typ).

Eine offene Menge $U \subset C^n$ heißt *Holomorphiegebiet*, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ die Menge

$$M = \{x \in U : |f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \quad \text{für alle in } U \text{ holomorphen Funktionen } f\}$$

kompakt ist. Jeder endliche Durchschnitt von Holomorphiegebieten ist wieder ein Holomorphiegebiet[15]). Jede im Unendlichen abzählbare lokalkompakte komplexe Mannigfaltigkeit besitzt beliebig feine lokalendliche Überdeckungen durch Holomorphiegebiete (*Steinsche Überdeckungen*), vgl. [5], exp. XVII).

Wir zeigen nun, daß man die analytisch-kohärenten Garben über einer im Unendlichen abzählbar lokalkompakten komplexen Mannigfaltigkeit X als TV-Garben auffassen kann. Ist U ein genügend kleines Holomorphiegebiet, so hat man wegen (1) über U die exakte Garbensequenz

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{O}^r(U) \to \mathcal{S}(U) \to 0\,.$$

Nach dem théorème B für holomorph-vollständige Mannigfaltigkeiten[16]) folgt

[14]) $\mathcal{O}^n$ bezeichnet die direkte Summe von n zu $\mathcal{O}$ isomorphen Garben.

[15]) Beispiele für Holomorphiegebiete sind die offenen Vollkugeln.

[16]) Eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit X heißt *holomorph-vollständig*, wenn die Menge $\mathcal{F}$ der auf ganz X definierten holomorphen Funktionen den folgenden Bedingungen genügt: (I) Zu je zwei Punkten $x, y \in X$ $(x \neq y)$ gibt es ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \neq f(y)$. (II) Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es n Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ und eine Umgebung U von x, so daß die $f_1, \ldots, f_n$ auf U eine lokale Karte von X definieren. (III) Für jede kompakte Menge K von X ist die Menge $M = \left\{x \in X : |f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \text{ für alle } f \in \mathcal{F}\right\}$ kompakt. Eine genauere Untersuchung dieses Begriffs findet man in [9]. — Das *théorème B* lautet dann: Ist X eine holomorph-vollständige Mannigfaltigkeit und $\mathcal{S}$ eine analytisch-kohärente Garbe über X, so gilt für alle $q \geq 1$: $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$ (vgl. [4]).

aus der exakten Cohomologiesequenz für Garben

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{R}) \to \Gamma(U, \mathcal{O}^r) \to \Gamma(U, \mathcal{G}) \to 0$$

d. h. $\Gamma(U, \mathcal{G}) \cong \Gamma(U, \mathcal{O}^r)/\Gamma(U, \mathcal{R})$. $\Gamma(U, \mathcal{O}^r)$ ist, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, ein $\mathcal{F}$-Raum. Da $\Gamma(U, \mathcal{R})$ in $\Gamma(U, \mathcal{O}^r)$ abgeschlossen ist (vgl. [5], exp. XVII), wird auch $\Gamma(U, \mathcal{G})$ zu einem $\mathcal{F}$-Raum. Diese Topologie ist unabhängig von der Wahl der obigen exakten Garbensequenz. Ist $\tilde{U}$ ein Holomorphiegebiet mit $\tilde{U} \subset U$, so ist die Abbildung $r^U_{\tilde{U}} : \Gamma(U, \mathcal{G}) \to \Gamma(\tilde{U}, \mathcal{G})$ stetig ([5], exp. XVII). Nunmehr können wir auf einem beliebigen $\Gamma(V, \mathcal{G})$ eine lokalkonvexe Topologie einführen. Dazu betrachten wir die folgenden Paare $(U, \mathfrak{V}_U)$ mit den Eigenschaften:

(1) $U \subset V$ ist bezüglich einer geeigneten U umfassenden Karte ein Holomorphiegebiet des C^n mit der Eigenschaft, daß für $\mathcal{G}$ über U die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{O}^r(U) \to \mathcal{G}(U) \to 0$$

gilt.

(2) $\mathfrak{V}_U$ sei eine Nullumgebung von $\Gamma(U, \mathcal{G})$.

Lassen wir nun die Paare $(U, \mathfrak{V}_U)$ auf alle möglichen Arten variieren, so bilden die Mengen $(r^V_U)^{-1}(\mathfrak{V}_U)$ und ihre endlichen Durchschnitte eine Nullumgebungsbasis für eine (separierte) lokalkonvexe Topologie auf $\Gamma(V, \mathcal{G})$. Ist V' eine offene Teilmenge von V, so ist die Abbildung $r^V_{V'} : \Gamma(V, \mathcal{G}) \to \Gamma(V', \mathcal{G})$ stetig. Ist speziell V ein Holomorphiegebiet mit der Eigenschaft (1), so ist die Topologie von $\Gamma(V, \mathcal{G})$ mit der eingangs definierten Quotiententopologie identisch.

Durch Übergang zu den topologischen Dualen erhält man wiederum ein Cogarbendatum, das wir als *analytisch-kohärentes Cogarbendatum* bezeichnen[17]).

Satz 5.1: *Ist X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{G}'$ ein analytisch-kohärentes Cogarbendatum über X, so gilt*

$$(H^q(X, \mathcal{G}))' \cong H_q(X, \mathcal{G}') \qquad (q \geq 0)\,.$$

$H^q(X, \mathcal{G})$ ist separiert mit $\dim H^q(X, \mathcal{G}) = \dim H_q(X, \mathcal{G}') < \infty$ *für alle $q \geq 0$.*

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß eine Steinsche Überdeckung einer komplexen Mannigfaltigkeit X für jede analytisch-kohärente Garbe über X eine Leraysche Überdeckung ist[18]). Die Behauptung folgt dann wegen der Schlußbemerkung von § 4 sofort aus Satz 4.3 und dem *Endlichkeitstheorem von* Cartan-Serre[19]) (vgl. [5], exp. XVII; [6], [11]) für analytisch-kohärente Garben auf kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten, wenn man als confinales Leraysches Überdeckungssystem alle eigentlichen bezüglich $\mathcal{G}$ „genügend

[17]) Ein besonders anschauliches Beispiel eines analytisch-kohärenten Cogarbendatums ist in § 7 zu finden.

[18]) Dies ist eine unmittelbare Folge des théorème B, vgl. Fußnote 16.

[19]) Das Theorem lautet: Die Cohomologiegruppen einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit mit Koeffizienten in einer analytisch-kohärenten Garbe über X sind für alle $q \geq 0$ endlich-dimensionale Vektorräume.

feinen" Steinschen Überdeckungen von X wählt. Eine Steinsche Überdeckung $\{U_\iota\}_{\iota \in I}$ von X heiße *genügend fein*, wenn $\mathscr{G}$ über jedem Holomorphiegebiet U_ι eine exakte Sequenz $0 \to \mathscr{R} \to \mathscr{O}^r \to \mathscr{G} \to 0$ gestattet, $\mathscr{R}$ von endlichem Typ.

Das bekannte théorème B für holomorph-vollständige Mannigfaltigkeiten gestattet folgende Dualisierung:

Satz 5.2: *Ist X eine holomorph-vollständige Mannigfaltigkeit, $\mathscr{G}'$ ein analytisch-kohärentes Cogarbendatum über X, so gilt für alle $q \geqq 1$:*

$$H_q(X, \mathscr{G}') = 0 .$$

Beweis klar.

Ist X eine n-dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathscr{O}$ die Garbe der Keime lokaler holomorpher Funktionen auf X, so heißt die Euler-Poincarésche Charakteristik $\chi(X, \mathscr{O}) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim H^q(X, \mathscr{O})$ von X mit Koeffizienten in $\mathscr{O}$ das *arithmetische Geschlecht* von X. Unter Benutzung von Satz 5.1 läßt sich $\chi(X, \mathscr{O})$ nunmehr auch homologisch kennzeichnen:

Corollar: *Für das arithmetische Geschlecht $\chi(X, \mathscr{O})$ einer n-dimensionalen kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X gilt:*

$$\chi(X, \mathscr{O}) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim H_q(X, \mathscr{O}') ,$$

dabei ist $\mathscr{O}'$ das zu $\mathscr{O}$ topologisch duale Cogarbendatum.

§ 6. Eine Poincarésche Dualität auf kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten

Bevor wir eine Poincarésche Dualität auf kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten herleiten, stellen wir einige im folgenden benötigte Ergebnisse über die Cohomologiegruppen spezieller Garben zusammen (vgl. etwa [23]).

X sei eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n, Ω^p die Garbe der Keime lokaler holomorpher Differentialformen auf X vom Grade p und $\mathscr{A}^{p,q}$ die Garbe der Keime der lokalen differenzierbaren Differentialformen auf X vom Bigrad (p, q). $\mathscr{A}^{p,q}$ ist gleich der Garbe der Keime der lokalen differenzierbaren Schnitte des differenzierbaren Vektorraumbündels $\overset{p}{\wedge} T \otimes \overset{q}{\wedge} \overline{T}$, dabei ist $\overset{p}{\wedge} T$ das Bündel der tangentiellen kovarianten p-Vektoren von X, $\overline{T}$ entsteht aus T durch Konjugieren der Koordinatentransformationen, vgl. [12], § 15. Ferner sei $\mathscr{K}^{p,q}$ die Garbe der Keime lokaler Ströme vom Bigrad (p, q)[20]). Es gilt $\Omega^0 = \mathscr{O}$, ferner hat man die Inklusionen $\Omega^p \subset \mathscr{A}^{p,0}$ und $\mathscr{A}^{p,q} \subset \mathscr{K}^{p,q}$.

Für bigraduierte Differentialformen ist eine äußere Differentiation d definiert, die sich in der Form $d = \partial + \bar{\partial}$ schreiben läßt[21]). Dabei bedeutet ∂

---

[20]) Die Ströme vom Bigrad (p, q) bilden den dualen Raum zum Raum der C^∞-Differentialformen vom Bigrad $(n-p, n-q)$ mit kompakten Trägern. Die Dualität ist im Sinne einer *Pseudotopologie* zu verstehen, vgl. [19].

[21]) Vgl. dazu [19].

die Differentiation nach den z-Variablen, $\bar\partial$ die Differentiation nach den $\bar z$-Variablen. $\bar\partial \overset{p,q}{\omega}$ ist eine Form vom Bigrad $(p, q+1)$. Für Ströme definiert man entsprechend $\langle \overset{n-p,n-(q+1)}{\omega}, \bar\partial \overset{p,q}{T} \rangle = \langle \bar\partial \overset{n-p,n-(q+1)}{\omega}, \overset{p,q}{T} \rangle$. $\bar\partial$ definiert daher Garbenhomomorphismen $\bar\partial : \mathscr{A}^{p,q} \to \mathscr{A}^{p,q+1}$ und $\bar\partial : \mathscr{K}^{p,q} \to \mathscr{K}^{p,q+1}$. Es gilt $\bar\partial \overset{p,0}{\omega} = 0$ genau dann, wenn $\overset{p,0}{\omega} \in \Omega^p$. Nach Grothendieck sind die Sequenzen

$$0 \to \Omega^p \to \mathscr{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{A}^{p,n} \to 0$$

$$0 \to \Omega^p \to \mathscr{K}^{p,0} \xrightarrow[\bar\partial]{} \mathscr{K}^{p,1} \xrightarrow[\bar\partial]{} \cdots \xrightarrow[\bar\partial]{} \mathscr{K}^{p,n} \to 0$$

exakt ([5], exp. XVIII). Wir definieren nun drei neue Garben (V sei ein komplexanalytisches Vektorraumbündel): $\Omega^p(V) = \mathcal{O}(V) \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^p$ die Garbe der Keime lokaler holomorpher p-Formen mit Koeffizienten in V, $\mathscr{A}^{p,q}(V) = \mathcal{O}(V) \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathscr{A}^{p,q}$ die Garbe der Keime lokaler C^∞-Formen vom Bigrad (p, q) mit Koeffizienten in V und $\mathscr{K}^{p,q}(V) = \mathcal{O}(V) \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathscr{K}^{p,q}$ die Garbe der Keime lokaler Ströme vom Bigrad (p, q) mit Koeffizienten in V; dabei bezeichne $\mathcal{O}(V)$ die Garbe der Keime lokaler holomorpher Schnitte von V. Da $\bar\partial$ $\mathcal{O}$-linear ist, erhält man die Garbenhomomorphismen $1 \otimes \bar\partial : \mathscr{A}^{p,q}(V) \to \mathscr{A}^{p,q+1}(V)$ bzw. $1 \otimes \bar\partial : \mathscr{K}^{p,q}(V) \to \mathscr{K}^{p,q+1}(V)$. Nach [23], § 2 sind auch die Sequenzen

$$(2)\quad \begin{aligned} &0 \to \Omega^p(V) \to \mathscr{A}^{p,0}(V) \xrightarrow{1\otimes\bar\partial} \mathscr{A}^{p,1}(V) \xrightarrow{1\otimes\bar\partial} \cdots \xrightarrow{1\otimes\bar\partial} \mathscr{A}^{p,n}(V) \to 0 \\ &0 \to \Omega^p(V) \to \mathscr{K}^{p,0}(V) \xrightarrow[1\otimes\bar\partial]{} \mathscr{K}^{p,1}(V) \xrightarrow[1\otimes\bar\partial]{} \cdots \xrightarrow[1\otimes\bar\partial]{} \mathscr{K}^{p,n}(V) \to 0 \end{aligned}$$

exakt. Da die Garben $\mathscr{A}^{p,q}(V)$ und $\mathscr{K}^{p,q}(V)$ *fein* sind ([23], § 2), besitzt man für $\Omega^p(V)$ zwei feine Auflösungen, d. h. (vgl. auch [7])

$$(3)\quad \begin{aligned} H^q(X, \Omega^p(V)) &\cong Z^{p,q}/1 \otimes \bar\partial[\Gamma(X, \mathscr{A}^{p,q-1}(V))] \\ H^q(X, \Omega^p(V)) &\cong \mathfrak{Z}^{p,q}/1 \otimes \bar\partial[\Gamma(X, \mathscr{K}^{p,q-1}(V))] \end{aligned}$$

mit

$$Z^{p,q} = \{\overset{p,q}{\omega} : (1 \otimes \bar\partial)\, \overset{p,q}{\omega} = 0,\ \overset{p,q}{\omega} \in \Gamma(X, \mathscr{A}^{p,q}(V))\}$$

bzw.

$$\mathfrak{Z}^{p,q} = \{\overset{p,q}{T} : (1 \otimes \bar\partial)\, \overset{p,q}{T} = 0,\ \overset{p,q}{T} \in \Gamma(X, \mathscr{K}^{p,q}(V))\}.$$

Da $\Omega^p(V)$ analytisch-kohärent ist, sind die Cohomologiegruppen $H^q(X, \Omega^p(V))$ endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper der komplexen Zahlen (vgl. Fußnote 19). Insbesondere gilt $H^q(X, \Omega^p(V)) = 0$ für alle $q > n$.

Es sei V^* das zu V duale Vektorraumbündel[22]) und ${}^*\Omega^p(V)$ das zu $\Omega^p(V)$ duale Cogarbendatum. Dann können wir unseren Satz wie folgt formulieren:

Satz 6.1: *Ist X eine n-dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $\Omega^p(V)$ die Garbe der Keime lokaler holomorpher p-Formen auf X mit*

[22]) Zur Definition vgl. [12], § 3.6.

Koeffizienten in dem komplexanalytischen Vektorraumbündel V, so hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$H_q(X, {}^*\Omega^p(V)) \cong H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*)) .$$

Beweis: Die globalen Schnittflächenmoduln $\Gamma(X, \mathscr{A}^{p,q}(V))$ kann man in natürlicher Weise mit einer $\mathscr{F}$-Topologie versehen (vgl. [23], § 3). Der topologische Dual von $\Gamma(X, \mathscr{A}^{p,q}(V))$ ist isomorph $\Gamma(X, \mathscr{K}^{n-p,n-q}(V^*))$ ([23], § 3). Die Abbildung $1 \otimes \bar\partial : \Gamma(X, \mathscr{A}^{p,q}(V)) \to \Gamma(X, \mathscr{A}^{p,q+1}(V))$ ist stetig und die Transponierte stimmt bis auf ein Vorzeichen mit

$$1 \otimes \bar\partial : \Gamma(X, \mathscr{K}^{n-p,n-(q+1)}(V^*)) \to \Gamma(X, \mathscr{K}^{n-p,n-q}(V^*))$$

überein. Daher folgt aus dem Diagramm (vgl. (2)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{A}^{p,0}(V)) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{A}^{p,1}(V)) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{A}^{p,n}(V)) & \longrightarrow 0 \\ | & | & & | & & | & | \\ 0 \longleftarrow & \Gamma(X, \mathscr{K}^{n-p,n}(V^*)) & \longleftarrow & \Gamma(X, \mathscr{K}^{n-p,n-1}(V^*)) & \longleftarrow \cdots \longleftarrow & \Gamma(X, \mathscr{K}^{n-p,0}(V^*)) & \longleftarrow 0 \end{array}$$

wegen Satz 4.5 und (3) die Behauptung.

Corollar: *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.1 ist $H_{n-q}(X, {}^*\Omega^{n-p}(V^*))$ kanonisch isomorph zum Dual des Vektorraumes $H_q(X, {}^*\Omega^p(V))$.*

Beweis: Aus Satz 6.1 und Satz 4.3 folgt:

$$\big(H_q(X, {}^*\Omega^p(V))\big)' \cong \big(H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*))\big)' \cong$$
$$\cong H_{n-q}(X, {}^*\Omega^{n-p}(V^*)) .$$

Auf kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten ist $H^q(X, \Omega^p(V))$ isomorph zum Raum $B^{p,q}(V)$ der *komplex-harmonischen Formen vom Bigrad* (p, q) mit Koeffizienten in V. Dabei ist $B^{p,q}(V)$ der Kern des komplexen Laplace-Beltrami-Operators $\square = \vartheta\bar\partial + \bar\partial\vartheta$[23]), der $\Gamma(X, \mathscr{A}^{p,q}(V))$ homomorph in sich abbildet. Ist X außerdem eine kählersche Mannigfaltigkeit[24]), so gilt für die singulären Cohomologiegruppen:

$$H^r(X, C) \cong \sum_{p+q=r} B^{p,q}(1) \cong \sum_{p+q=r} H^q(X, \Omega^p(1))^{25})$$

(vgl. [12], § 15.7). Weiter ist nach dem klassischen Poincaréschen Dualitätssatz: $H^r(X, C) \cong H_{2n-r}(X, C)$ ($2n$ = reelle Dimension von X). Also erhält man aus Satz 6.1:

Satz 6.2: *Für die singulären Homologiegruppen $H_r(X, C)$ einer kompakten komplexen kählerschen Mannigfaltigkeit X mit Koeffizienten in C gilt:*

$$H_r(X, C) \cong \sum_{p+q=r} H_q(X, {}^*\Omega^p(1)) .$$

---

[23]) ϑ ist ein wohldefinierter Garbenhomomorphismus $\vartheta : \mathscr{A}^{p,q}(V) \to \mathscr{A}^{p,q-1}(V)$, vgl. [12], § 15.4.

[24]) Zur Definition der kählerschen Mannigfaltigkeiten vgl. [12], § 15.6.

[25]) 1 bezeichne das triviale Geradenbündel $X \times C$.

Wie man sofort sieht, kann man auch die *Bettischen Zahlen* $b_r(X)$ homologisch kennzeichnen.

Aus den obigen Bemerkungen und Satz 6.1 folgt:

Satz 6.3: *Auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X ist $H_q(X, {}^*\Omega^p(V))$ isomorph zum Raum $B^{n-p,n-q}(V^*)$ der auf X definierten komplex-harmonischen $(n-p, n-q)$-Formen mit Koeffizienten in V^*.*

Die klassische Poincarésche Dualität wird im allgemeinen mit Hilfe des *cap-Produktes* definiert[26]). Wir wollen im folgenden zeigen, daß sich die oben definierte Poincaré-Dualität ebenfalls durch ein Produkt von Homologie- und Cohomologieklassen erklären läßt.

Es sei X ein im Unendlichen abzählbarer lokalkompakter Raum und $\mathscr{G}_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ seien $\mathscr{F}$-Garben, die die Bedingungen von Satz 4.5 erfüllen. Diese Garben mögen folgender Verknüpfungsrelation genügen:

(V) *Zu jedem Paar nichtnegativer ganzer Zahlen q, r $(r \geqq q)$ existiert eine stetige Abbildung*

$$\psi_{q,r-q}\colon \Gamma(X, \mathscr{G}^q_{(1)}) \times \Gamma(X, \mathscr{G}^{r-q}_{(3)}) \to \Gamma(X, \mathscr{G}^r_{(2)})$$

mit der Eigenschaft

$$h^r_{(2)} \circ \psi_{q,r-q}(g^q_{(1)}, g^{r-q}_{(3)}) = \psi_{q+1,r-q}(h^q_{(1)}\, g^q_{(1)}, g^{r-q}_{(3)}) +$$
$$+ (-1)^{q+\alpha}\, \psi_{q,r-q+1}(g^q_{(1)}, h^{r-q}_{(3)}\, g^{r-q}_{(3)}), \ [g^q_{(i)} \in \Gamma(X, \mathscr{G}^q_{(i)});\ i = 1, 3];$$

dabei ist α beliebig aber fest und hänge nicht von r und q ab. ($h^r_{(2)}\colon \Gamma(X, \mathscr{G}^r_{(2)}) \to \Gamma(X, \mathscr{G}^{r+1}_{(2)})$).

Dann wird durch

$$\langle g^{r-q}_{(3)}, g^q_{(1)} * g^{(2)}_r\rangle = \langle \psi_{q,r-q}(g^q_{(1)}, g^{r-q}_{(3)}), g^{(2)}_r\rangle \ (g^{(2)}_r \in \Gamma''(X, \mathscr{G}^r_{(2)}))$$

eine Abbildung von $\Gamma(X, \mathscr{G}^q_{(1)}) \times \Gamma''(X, \mathscr{G}^r_{(2)})$ in $\Gamma''(X, \mathscr{G}^{r-q}_{(3)})$ definiert. Wie man leicht nachprüft, gilt die Randformel

$${}^t h^{r-q-1}_{(3)}(g^q_{(1)} * g^{(2)}_r) = (-1)^{q+\alpha}\{g^q_{(1)} * {}^t h^{r-1}_{(2)}\, g^{(2)}_r - (h^q_{(1)}\, g^q_{(1)}) * g^{(2)}_r\}$$

Daher erhalten wir nach Satz 4.5 eine Abbildung

$$H^q(X, \mathscr{G}_{(1)}) \times H_r(X, \mathscr{G}'_{(2)}) \to H_{r-q}(X, \mathscr{G}'_{(3)}),$$

die wir als $*$-Produkt bezeichnen ($\mathscr{G}'_{(i)}$ $(i = 2, 3)$ ist das zu $\mathscr{G}_{(i)}$ topologisch duale Cogarbendatum).

Um die Poincaré-Dualität mit Hilfe dieses $*$-Produktes zu charakterisieren, setzen wir

$$\mathscr{G}_{(1)} = \Omega^p(V), \quad \mathscr{G}_{(2)} = \Omega^r, \quad \mathscr{G}_{(3)} = \Omega^{r-q}(V^*),$$

---

[26]) Mit Hilfe des cap-Produktes kann man bekanntlich singuläre Homologie- und Cohomologieklassen vermöge einer Abbildung von $H^q(X, Z) \times H_r(X, Z)$ in $H_{r-q}(X, Z)$ miteinander multiplizieren. Dieses (antikommutative) cap-Produkt ist in gewissem Sinne dual zum cup-Produkt.

ferner

$$\mathscr{G}^q_{(1)} = \mathscr{A}^{p,q}(V)\,, \quad \mathscr{G}^s_{(2)} = \mathscr{A}^{r,s}, \quad \mathscr{G}^{s-q}_{(3)} = \mathscr{A}^{r-p,s-q}(V^*)\,.$$

Die Abbildung $\psi_{q,s-q}: \Gamma(X, \mathscr{A}^{p,q}(V)) \times \Gamma(X, \mathscr{A}^{r-p,s-q}(V^*)) \to \Gamma(X, \mathscr{A}^{r,s})$ sei das äußere Produkt globaler Formen (für das äußere Produkt globaler Formen mit Koeffizienten in komplexanalytischen Vektorraumbündeln vgl. [23]). Außerdem sei

$$h^q_{(1)}: \Gamma(X, \mathscr{A}^{p,q}(V)) \xrightarrow{1\otimes\bar\partial} \Gamma(X, \mathscr{A}^{p,q+1}(V)), h^s_{(2)}: \Gamma(X, \mathscr{A}^{r,s}) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma(X, \mathscr{A}^{r,s+1}),$$

$$h^{s-q}_{(3)}: \Gamma(X, \mathscr{A}^{r-p,s-q}(V^*)) \xrightarrow{1\otimes\bar\partial} \Gamma(X, \mathscr{A}^{r-p,s-q+1}(V^*))\,.$$

Damit geht die Bedingung (V) für $\alpha = p$ gerade in die Differentiationsformel $\bar\partial(\alpha \wedge \beta) = \bar\partial\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q}\, \alpha \wedge \bar\partial\beta$ über, d. h. wir haben eine Abbildung

$$H^q(X, \Omega^p(V)) \times H_s(X, {}^*\Omega^r) \to H_{s-q}(X, {}^*\Omega^{r-p}(V^*))\,.$$

Wegen $\int\limits_X \bar\partial \overset{n,n-1}{\omega} = \int\limits_X d \overset{n,n-1}{\omega} = 0$ definiert das Integral $\int\limits_X \overset{n,n}{\omega}$ der differenzierbaren (n, n)-Formen[27]) eine Linearform auf $H^n(X, \Omega^n)$, d. h. ein Element von $H_n(X, {}^*\Omega^n)$. Wir behaupten, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^q(X, \Omega^p(V)) \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "i"'] & & H_{n-q}(X, {}^*\Omega^{n-p}(V^*)) \\ & H^q(X, \Omega^p(V)) \times \left[\int\limits_X\right] \arrow[ur, "*"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, Δ bezeichne den Isomorphismus der Poincaré-Dualität. Es sei $\left[\overset{p,q}{\omega}\right] \in H^q(X, \Omega^p(V))$; dann ist

$$* \, i \left[\overset{p,q}{\omega}\right] = f\left(\left[\overset{n-p,n-q}{\tau}\right]\right) = \int\limits_X \overset{p,q}{\omega} \wedge \overset{n-p,n-q}{\tau}$$

$\left(\left[\overset{n-p,n-q}{\tau}\right] \in H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*))\right)$ ein Element von $H_{n-q}(X, {}^*\Omega^{n-p}(V^*))$, das, wie man sich anhand von [12], § 15.4 sofort überzeugt, mit $\Delta\left[\overset{p,q}{\omega}\right]$ übereinstimmt, q. e. d.

Ebenso einfach läßt sich die Abbildung

$$*: H^q(X, \Omega^p(V)) \times H_s(X, {}^*\Omega^r) \to H_{s-q}(X, {}^*\Omega^{r-p}(V^*))$$

interpretieren:

$$\left[\overset{p,q}{\omega}\right] * \left(\Delta\left[\overset{n-r,n-s}{\omega}\right]\right) \left(\left[\overset{p,q}{\omega}\right] \in H^q(X, \Omega^p(V)),\ \left[\overset{n-r,n-s}{\omega}\right] \in H^{n-s}(X, \Omega^{n-r})\right)$$

stimmt mit der durch $\overset{n-r,n-s}{\omega}$ und $\overset{p,q}{\omega}$ auf natürliche Weise definierten Linearform

$$\int\limits_X \overset{n-r,n-s}{\omega} \overset{*}{\wedge} \overset{p,q}{\omega} \wedge \overset{r-p,s-q}{\tau}$$

übereín.

[27]) Zur Definition vgl. [19].

§ 7. Anwendung auf kompakte Riemannsche Flächen

In diesem Paragraphen definieren wir ein analytisch-kohärentes Cogarbendatum über einer kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, dessen erste Homologiegruppe die Dimension p besitzt, wenn p das Geschlecht von $\mathfrak{R}$ bezeichnet.

Wir beginnen zunächst mit einigen Vorbereitungen. Ist $\mathfrak{R}'$ eine offene Riemannsche Fläche, so existiert auf $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{R}'$ eine *Elementarfunktion erster Ordnung* $A(\zeta, z)$, die sich lokal wie der Cauchy-Kern $\frac{1}{\zeta - z}$ verhält [1]. Genauer bedeutet dies folgendes: Sind τ und t die zu den Punkten $q_0(\zeta_0), p_0(z_0) \in \mathfrak{R}'$ gehörigen Ortsuniformisierenden, so gilt in einer Umgebung von $(q_0(\zeta_0), p_0(z_0))$

$$A(\zeta(\tau), z(t)) \frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} = R(\tau, t) \qquad \text{für} \quad q_0(\zeta_0) \neq p_0(z_0)\,,$$

$$A(\zeta(\tau), z(t)) \frac{d\zeta(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\tau - t} + S(\tau, t) \qquad \text{für} \quad q_0(\zeta_0) = p_0(z_0)\,,$$

wobei $R(\tau, t)$ und $S(\tau, t)$ in τ und t holomorph sind. Damit kann man die Cauchysche Integralformel wie folgt formulieren: Es sei G ein Gebiet der offenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}'$ mit rektifizierbarem Rand C, so daß $G \dot{\cup} C$ ganz im Innern von $\mathfrak{R}'$ enthalten ist. Dann gilt für jede in G holomorphe und auf C noch stetige Funktion $f(p)$:

$$(4) \qquad f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(q)\, A(q, p)\, dq\,. \qquad (p \in G)$$

Ist U eine offene Teilmenge der kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, so sei $\mathfrak{H}(U)$ der Raum der in U holomorphen Funktionen. $\mathfrak{H}(U)$ versehen wir mit der Topologie der kompakten Konvergenz. Hierdurch wird $\mathfrak{H}(U)$ zu einem $\mathscr{F}$-Raum. Bevor wir den topologischen Dual von $\mathfrak{H}(U)$ bestimmen, geben wir noch zwei Definitionen:

Definition 7.1 *(Lokalholomorphe Funktion): $\mathfrak{M}$ sei eine beliebige Teilmenge einer offenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}'$. Eine Klasse $\mathscr{L}$ holomorpher Funktionen heißt lokalholomorphe Funktion in $\mathfrak{M}$, wenn gilt:*

1) *Jedes $f \in \mathscr{L}$ ist in einer Umgebung U von $\mathfrak{M}$ eindeutig definiert und in jeder Komponente von U holomorph.*

2) *Sind $f, g \in \mathscr{L}$, so existiert eine Umgebung von $\mathfrak{M}$, auf der f und g übereinstimmen.*

3) *Ist $f \in \mathscr{L}$ und stimmt f in einer Umgebung von $\mathfrak{M}$ mit einer holomorphen Funktion g überein, so gilt $g \in \mathscr{L}$.*

Uns interessiert eine besondere Klasse lokalholomorpher Funktionen, die wir nun definieren:

Definition 7.2 *(Biholomorphe Funktion): $\mathfrak{M}$ sei eine beliebige Teilmenge einer offenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}'$* [28]*). Eine Klasse $\mathscr{L}$ holomorpher Funktionen heißt biholomorphe Funktion in $\complement\mathfrak{M}$ bezüglich $A(q, p)$, wenn gilt:*

[28]) Dabei ist auch der Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}'$ zugelassen.

1) *Jedes $f \in \mathscr{L}$ ist eine im Komplement einer kompakten Teilmenge $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{M}$ analytische Funktion, für die die Darstellung*

$$f(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Rd\mathfrak{N}} f(p)\, A(q, p)\, dp \qquad (q \in \complement \mathfrak{N})$$

gilt, wobei $\mathfrak{N}$ eine $\mathfrak{B}$ ganz im Innern enthaltende abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{R}'$ ist.

2) *Sind $f, g \in \mathscr{L}$, so existiert eine kompakte Teilmenge von $\mathfrak{M}$, in deren Komplement f und g übereinstimmen.*

3) *Ist $f \in \mathscr{L}$, und stimmt f im Komplement einer kompakten Teilmenge von $\mathfrak{M}$ mit einer Funktion g mit den in* 1) *genannten Eigenschaften überein, so gilt $g \in \mathscr{L}$.*

Den Raum der in $\complement \mathfrak{M}$ bezüglich $A(q, p)$ biholomorphen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_A(\complement \mathfrak{M})$.

Den topologischen Dual von $\mathfrak{H}(U)$ ($U \subset \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ kompakt) bestimmt man nun in folgender Weise [25]: Zu U und $\mathfrak{R}$ existiert offenbar eine offene Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}'$ mit $U \subset \mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$. $A(q, p)$ sei eine Elementarfunktion 1. Ordnung auf $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{R}'$. Ist O eine offene, relativ kompakte Teilmenge von $\mathfrak{R}'$, so bezeichne $\mathfrak{B}(\bar{O})$ den Raum der in O holomorphen und in $\bar{O}$ stetigen Funktionen. Die Topologie von $\mathfrak{B}(\bar{O})$ werde definiert durch die Norm $\|f\|_{\bar{O}} = \sup_{p \in \bar{O}} |f(p)|$.

Da $u \in \mathfrak{H}'(U)$ eine stetige Linearform ist, ist u auch stetig *in* einem geeigneten Raum $\mathfrak{B}(\bar{\mathfrak{G}}_U)$, dabei ist $\mathfrak{G}_U$ eine offene, relativ kompakte Teilmenge von U. Daher läßt sich u stetig *auf* den ganzen Raum $\mathfrak{B}(\bar{\mathfrak{G}}_U)$ zu einem Funktional $\hat{u}$ fortsetzen. Ist $\mathfrak{N}$ eine abgeschlossene Teilmenge von U mit rektifizierbarem Rand, die $\mathfrak{G}_U$ ganz im Innern enthält, so folgt aus der Cauchyschen Integralformel (4):

$$u[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{Rd\mathfrak{N}} \hat{u}_p[A(q, p)]\, f(q)\, dq \qquad (f \in \mathfrak{H}(U)).$$

Aus dem Rungeschen Approximationssatz für offene Riemannsche Flächen [1] ergibt sich, daß die durch die Indikatrix $\tilde{u}(q) = \hat{u}_p[A(q, p)]$ ($q \in \mathfrak{R}' - \bar{\mathfrak{G}}_U$) in $\mathfrak{R}' - U$ definierte biholomorphe Funktion $[\tilde{u}(q)]$ durch $u \in \mathfrak{H}'(U)$ eindeutig definiert ist. Ist umgekehrt $u^*(q)$ Repräsentant eines Elements aus $\mathfrak{H}_A(\mathfrak{R}' - U)$, so ist $u^*(q)$ im Komplement einer kompakten Teilmenge $\mathfrak{B}$ von U holomorph. $\bar{\mathfrak{G}}_U$ sei eine kompakte Teilmenge von U mit rektifizierbarem Rand, die $\mathfrak{B}$ ganz im Innern enthält. Dann ist

$$u[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{Rd\bar{\mathfrak{G}}_U} u^*(q)\, f(q)\, dq \qquad (f \in \mathfrak{H}(U)) \tag{5}$$

eine stetige Linearform auf $\mathfrak{H}(U)$, die von der Wahl von $\bar{\mathfrak{G}}_U$ unabhängig ist. u besitzt als Indikatrix wieder die Funktion $u^*(q)$. $\mathfrak{H}'(U)$ ist damit zu dem Raum $\mathfrak{H}_A(\mathfrak{R}' - U)$ isomorph.

Wir definieren nun ein Cogarbendatum $\{G_U, r_U^V\}$, dessen erste Homologiegruppe isomorph C^p ist. Dazu ordnen wir zunächst jeder offenen Menge U der kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ zu:

1. *eine offene Riemannsche Fläche* $\mathfrak{R}'_U$ *mit* $U \subset \mathfrak{R}'_U \subset \mathfrak{R}$.

2. *eine auf* $\mathfrak{R}'_U \times \mathfrak{R}'_U$ *definierte Elementarfunktion* 1. *Ordnung* $A_U(q, p)$.

Der Cogarbendatenmodul G_U sei der Raum $\mathfrak{H}_{A_U}(\mathfrak{R}'_U - U)$, außerdem setzen wir $G_{\mathfrak{R}} = C$. Die Homomorphismen r_U^V ergeben sich aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H}_{A_V}(\mathfrak{R}'_V - V) & \mathfrak{H}_{A_U}(\mathfrak{R}'_U - U) \arrow[l, "r_U^V"'] \arrow[d, "\alpha_U"] \\
\mathfrak{H}'(V) \arrow[u, "\alpha_V^{-1}"] \arrow[d, dash] & \mathfrak{H}'(U) \arrow[l, "i_U^V"] \arrow[d, dash] \\
\mathfrak{H}(V) \arrow[r, "\varrho_U^V"'] & \mathfrak{H}(U),
\end{tikzcd} \qquad (U \subset V)$$

dabei sei α_U der durch (5) definierte Isomorphismus, ϱ_U^V bezeichne den Restriktionshomomorphismus, ferner gilt $\alpha_V^{-1}(u) = \{\tilde{u}(q)\} = \{\hat{u}_p[A_V(q, p)]\}$ $(q \in \mathfrak{R}'_V - \mathfrak{G}_V)$. Im Falle $V = \mathfrak{R}$ sei α_V^{-1} der natürliche Isomorphismus zwischen $\mathfrak{H}'(\mathfrak{R})$ und C.

Nunmehr sind wir in der Lage, den Hauptsatz zu formulieren:

Satz 7.1 (Hauptsatz): *Ist* $\mathfrak{R}$ *eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht p, so gilt für das auf* $\mathfrak{R}$ *definierte Cogarbendatum* $\mathscr{G} = \{\mathfrak{H}_{A_U}(\mathfrak{R}'_U - U), r_U^V\}$ *der biholomorphen Funktionen:*

$$\dim H_1(\mathfrak{R}, \mathscr{G}) = p .$$

Beweis: Das Garbendatum $\{\mathfrak{H}(U), \varrho_U^V\}$ definiert gerade die analytisch-kohärente Garbe $\mathcal{O}$ über $\mathfrak{R}$. Das Cogarbendatum $\mathscr{G} = \{\mathfrak{H}_{A_U}(\mathfrak{R}'_U - U), r_U^V\}$ ist isomorph zu dem analytisch-kohärenten Cogarbendatum $\mathcal{O}'$. Daher ergibt sich aus Satz 6.1 mit $V = 1$, $n = 1$, $p = 0$ und $q = 1$:

$$H_1(\mathfrak{R}, \mathscr{G}) \cong H^0(\mathfrak{R}, \Omega^1) .$$

$H^0(\mathfrak{R}, \Omega^1)$ besitzt aber bekanntlich die Dimension p, da auf $\mathfrak{R}$ genau p linear-unabhängige holomorphe Differentiale existieren.

Literatur

[1] Behnke, H., u. K. Stein: Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120**, 430—461 (1949).

[2] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques. Act. scient. ind. 1189, Paris 1953.

[3] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques. Act. scient. ind. 1229, Paris 1955.

[4] Cartan, H.: Séminaire ENS, 1951/52.

[5] Cartan, H.: Séminaire ENS, 1953/54.

[6] Cartan, H., et J. P. Serre: Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compacts. Compt. rend. (Paris) **237**, 128—130 (1953).

[7] Dolbeault, P.: Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes. Compt. rend. (Paris) **236**, 175—177 (1953).

[8] Godement, R.: Théorie des faisceaux. Paris 1958.

[9] Grauert, H.: Charakterisierung der holomorph-vollständigen komplexen Räume.

Math. Ann. **129**, 233—259 (1955).
[10] GROTHENDIECK, A.: Sur certaines espaces de fonctions holomorphes. J. reine angew. Math. **192**, 35—64 (1953).
[11] GROTHENDIECK, A.: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux. Bull. soc. math. France **84**, 1—7 (1956).
[12] HIRZEBRUCH, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Berlin 1956.
[13] v. HOVE, L.: Topologie des espaces fonctionels analytiques et des groupes infinis de transformations. Acad. roy. Belg. Bull. Cl. Sci. **38**, 333—351 (1952).
[14] HUREWICZ, W., u. H. WALLMAN: Dimension theory. Princeton 1941.
[15] KÖTHE, G.: Dualität in der Funktionentheorie. J. reine angew. Math. **191**, 30—49 (1953).
[16] KULTZE, R.: Dualität von Homologie- und Cohomologiegruppen in der Garbentheorie. Arch. Math. **10**, 438—442 (1959).
[17] LUFT, E.: Eine Verallgemeinerung der Čechschen Homologietheorie. Bonner math. Schriften Nr. 8 (1959).
[18] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions I. Paris 1957, 2e éd.
[19] SCHWARTZ, L.: Lectures on complex analytic manifolds. Tata Inst. of fund. research, Bombay 1955.
[20] SEBASTIÃO E SILVA, J.: As funções analiticas e a análise funcional. Portugaliae Math. **9**, 1—130 (1950).
[21] SEBASTIÃO E SILVA, J.: Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici. Portugaliae Math. **12**, 1—46 (1953).
[22] SEBASTIÃO E SILVA, J.: Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni. Rend. di Mat. **14**, 388—410 (1955).
[23] SERRE, J. P.: Un théorème de dualité. Comment. Math. Helv. **29**, 9—26 (1955).
[24] SERRE, J. P.: Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math. **61**, 197—278 (1955).
[25] TILLMANN, H. G.: Dualität in der Funktionentheorie auf Riemannschen Flächen. J. reine angew. Math. **195**, 76—101 (1956).

(Eingegangen am 25. September 1960)

Anderson, F. W., and R. L. Blair
Math. Annalen 143, 187—211 (1961)

Representations of Distributive Lattices as Lattices of Functions*

By

F. W. Anderson and R. L. Blair in Eugene, Oregon**

Introduction

This paper is inspired by two related results. The first is the classical representation theorem for distributive lattices: Every distributive lattice is isomorphic to a subdirect product[1]) of copies of the two element chain 2 (G. Birkhoff [4], Theorem 2.5; cf. [5], p. 95). The second is the recent successful characterization of those distributive lattices L that are isomorphic to the lattice $C(X, R)$ of all real-valued continuous functions on some compact Hausdorff space X[2]). The concept that underlies both of these results is that of a subdirect product of copies of a preassigned chain K (in the first case, K is the chain 2; in the second, K is the chain R of real numbers). This observation, which is the point of departure for the present investigation, immediately suggests the following basic problem (in what follows, L always denotes a distributive lattice):

I. *Given a chain K, find necessary and sufficient conditions in order that L be isomorphic to a subdirect product of copies of K.*

Specializations of I appear as Problems II and III below.

Before describing our results, some comments are in order concerning the possible types of solutions of I. In the first place, a (completely trivial) solution can be formulated in terms of homomorphisms of L onto K: the required condition on L is merely that there exist sufficiently many homomorphisms

*) Portions of this paper were presented, in preliminary form, at the American Mathematical Society Symposium on Lattice Theory held at Monterey, California, April 16—17, 1959; see Anderson [1]. This research was supported by a grant from the National Science Foundation.

**) University of Oregon.

[1]) If $(L_i)_{i\in I}$ is a family of lattices and if $j \in I$, denote by π_j the projection of the direct product $\prod_{i\in I} L_i$ of index j. A sublattice L of $\prod_{i\in I} L_i$ is a *subdirect product* of the family $(L_i)_{i\in I}$ in case $\pi_j(L) = L_j$ for every $j \in I$. We note that if I is the empty set θ, then $\prod_{i\in I} L_i$ is the lattice consisting of the single element θ; this remark will permit us to treat lattices with a single element on a par with those having more than one element.

[2]) Several such characterizations have, in fact, been obtained; see Heider [7], Pinsker [12], and Anderson and Blair ([2], Corollaries 8.4 and 8.10).

of L onto K to distinguish points in L[3]). A somewhat less trivial solution is also readily obtained simply by imposing suitable conditions on the prime ideals of L (see Theorem 1 below). However, solutions of this latter type, while of interest, tend nevertheless to lack the depth, and the economy of hypothesis, that one might wish. An obvious desideratum, then, is a standard against which to measure the non-triviality of solutions of I and related problems. Here, as in [2], a suitable standard is the extent to which the conditions imposed on L are *arithmetic*[4]), the ideal type of solution being that type in which *all* the conditions on L are arithmetic. We shall comment below on the extent to which our results approximate this ideal.

Aside from Theorem 1, mentioned above, Section 1 is devoted to solutions of I that are as nearly arithmetic as possible; for this purpose we find it necessary to restrict K to be complete. The main tool here is the concept of a "locally separated" family $(f_\alpha)_{\alpha\in K}$ of elements of L indexed by K (Definitions 1 and 2). Theorem 3 asserts that L is isomorphic to a subdirect product of copies of the complete chain K if and only if each pair of elements $f < g$ in L is contained in some locally separated family $(f_\alpha)_{\alpha\in K}$. If K is finite, the preceding result can be sharpened by replacing "family" by "chain"; this is Theorem 2. If $K = 2$, then each chain $f < g$ in L is itself automatically locally separated, and we immediately deduce the representation theorem of Birkhoff cited above.

In Section 2 we consider the special class of subdirect products of copies of K that we call "K-lattices of functions": L is a K-lattice of functions (with some nonempty set X as domain) in case L is a sublattice of K^X that contains every constant K-valued function on X. In terms of this notion, I specializes as follows:

II. *Given a chain K, find necessary and sufficient conditions in order that L be isomorphic to some K-lattice of functions.*

We are able to solve II for the case in which K is conditionally complete and in which the K-lattice of functions consists entirely of bounded functions (see Theorem 4). If K is finite, the result is remarkably simple (see Theorem 4, Corollary 2); in fact, we require only that L contain a copy $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ of K that behaves as if it were a chain of constant functions. Explicitly, this means that (i) $\alpha_1 \leqq f \leqq \alpha_n$ for every $f \in L$ and (ii) if $f \in L$ and if $f \vee \alpha_i \geqq \alpha_j > \alpha_i$, then $f \geqq \alpha_j$, and dually.

---

[3]) More precisely, for each pair of distinct elements f and g of L (and it suffices to suppose that $f < g$) there must exist a homomorphism φ from L onto K such that $\varphi(f) \neq \varphi(g)$. Remark: If $f < g$, then to ensure the existence of an order-preserving mapping φ from L onto K such that $\varphi(f) \neq \varphi(g)$, it is enough to require that f and g be contained in a chain that is isomorphic to K and that is maximal in L (Baer [3], p. 95). However, this condition cannot guarantee that φ will be a lattice homomorphism (consider the four element lattice that has two non-comparable elements).

[4]) See Tarski [16]. A condition on L is arithmetic in case it can be expressed in terms of the arithmetic of L; i.e., in terms of (i) elements of L, (ii) elementary logical constants (connectives, quantifiers, identity symbol), and (iii) the lattice operations $\vee$ and $\wedge$. For example, conditions that involve assertions about ideals or homomorphisms of L are in general not arithmetic.

If X is a topological space and if K is a chain equipped with its interval topology ([5], p. 39), then we denote by $C(X, K)$ the lattice of all continuous functions on X to K. In order to avoid pathological cases we restrict our attention to the class of "K-normal spaces"; that is, those spaces X for which $C(X, K)$ separates closed sets. Sections 3 and 4 deal with the following special case of II:

III. *Given a chain K, find necessary and sufficient conditions in order that L be isomorphic to $C(X, K)$ for some compact K-normal space X.*

If K is a conditionally complete dense-in-itself chain ([5], pp. 31 and 51) with neither a first nor a last element, then Theorems 8.3 and 8.9 of [2] already provide solutions of III. Using techniques considerably simpler than those of [2] (and this time requiring only that K be conditionally complete), we obtain in Theorem 9 still a third solution. (More detailed comparisons with [2] will be made at appropriate places below.) The proof is accomplished in essentially two steps: (1) Theorem 7 characterizes those lattices that are representable as "normally separating K-sublattices" of $C(X, K)$ (i.e., sublattices of $C(X, K)$ that contain every constant function and that separate closed sets in X). (2) A corollary of Theorem 8 provides a necessary and sufficient condition (of a purely lattice-theoretic nature) in order that a normally separating K-sublattice L of $C(X, K)$ coincide with $C(X, K)$.

We remark that if K is conditionally complete, dense-in-itself, and without extreme elements, then two conditions of the sort described in (2) are immediately available from [2][5]): (i) $L = C(X, K)$ if and only if L is "locally complete" in a suitable intrinsically defined uniformity, and (ii) $L = C(X, K)$ if and only if for each "bounded direct extension" (L', Λ) of L the mapping Λ is an isomorphism from L onto L'. It is probable that both (i) and (ii) could be adapted to the merely conditionally complete case. However, each is open to certain objections: (ii) is "external" in character, requiring the examination of a large class of extensions of L in order to decide whether L coincides with $C(X, K)$; (i), while internal, requires (in effect) that L already be represented as a lattice of functions (on a suitable intrinsically defined space $X(L)$) before the uniformity on L can even be introduced. The condition alluded to in (2) is subject to neither of these objections.

For the case in which K is the real chain R, Problem III was originally proposed by Birkhoff ([5], Problem 81) and by Kaplansky [9]. Theorem 9 therefore provides still another solution of this Birkhoff-Kaplansky problem. For the case in which K is the chain 2, our Theorem 9 easily yields Stone's representation theorem for Boolean algebras [14].

The main results having now been described, we comment briefly on the extent to which their formulations are arithmetic. (For related comments, see [2], pp. 337—338.) In any solution of I, II, or III, it is obviously necessary

[5]) For the definitions of "locally complete" and "bounded direct extension", see [2], pp. 358 and 360. For condition (i) above, see [2, (1.2) and Lemma 8.2]. Condition (ii) is easily deducible from the proof of Theorem 8.9 (with the aid of (1.2), Lemma 8.5, and Theorem 4.3) of [2].

(at the very least) to require in L, in one guise or another, a subset K' with cardinality that of K. (In fact, for II and III the requirement in L of an isomorphic copy K' of K seems unavoidable.) Now the existence of such a K' in L is formulable arithmetically if and only if K is finite. With this in mind, one sees easily that, for K finite, the requirements on L in Theorems 2, 3, and 4, and in the converse assertions of Theorems 5 and 7, are all arithmetic; in particular, Theorems 2, 3, and 4 provide (in this case) arithmetic solutions of I and II[6]). If K is infinite, the situation is most conveniently described with reference to Problem II (cf. Theorem 4). Assuming outright that L contains (a copy of) K, and introducing the predicate $\mathscr{E}_K$ expressing elementhood in K, we can still insist on conditions that are arithmetic relative to the system $\langle L, \vee, \wedge, \mathscr{E}_K \rangle$; that is, conditions formulable solely in terms of (i)—(iii) of footnote 4 and (iv) the predicate $\mathscr{E}_K$. An analysis of the relevant condition of Theorem 4 (namely, that L be a "bounded K-lattice") shows, in fact, that this condition is equivalent to the conjunction of countably many conditions, each of which is arithmetic relative to $\langle L, \vee, \wedge, \mathscr{E}_K \rangle$. Similar remarks apply to Theorems 3, 5, and 7. As for Problem III, however, any solution seems to require some such step as (2) above; and it seems impossible to formulate arithmetically (even relative to $\langle L, \vee, \wedge, \mathscr{E}_K \rangle$) the hypothesis of "completeness" called for in such a step.

By the *prime ideal theorem for Boolean algebras* we mean the assertion that in every Boolean algebra with more than one element there is a (proper) prime ideal. This theorem is known to be effectively equivalent (i.e., equivalent without recourse to transfinite methods) to a variety of propositions drawn from various parts of mathematics[7]). In each of our main results (Theorems 2, 3, 4, 5, 7, and 9) there is included a representation theorem for a certain class of lattices. In an appendix (Section 5), we observe that each of these representation theorems is effectively equivalent to the prime ideal theorem for Boolean algebras.

We conclude this introduction by fixing some notation and terminology that will be used throughout the paper. (For definitions not explicitly given, the reader is referred to BIRKHOFF [5].)

For convenience of exposition, we agree that L will always denote a distributive lattice. (For emphasis, however, it will occasionally be desirable to make explicit the hypothesis of distributivity.) The lattice operations in L will be denoted by $\vee$ and $\wedge$, the symbols $\cup$ and $\cap$ being reserved for set-theoretic union and intersection. By a *prime ideal* of L we mean a sublattice P of L such that $a \wedge b \in P$ if and only if either $a \in P$ or $b \in P$; by this usage, L itself is a prime ideal.

---

[6]) Let K be a finite chain consisting of n elements. Denote by $\mathscr{V}$ the class of all lattices and by $\mathscr{S}_n$ (respectively, $\mathscr{C}_n$) the class of all lattices that are isomorphic to subdirect products of copies of K (respectively, to K-lattices of functions). Our results imply that both $\mathscr{S}_n$ and $\mathscr{C}_n$ are (in the sense of TARSKI [16]) *arithmetical classes* relative to $\mathscr{V}$. So far as we are aware, this latter result is in itself new.

[7]) See for example (*S*), (*T*), and (*D*) of Section 5 and the references given in footnote 20.

We agree further that K will always denote a chain. The completion of K by cuts will be denoted by $\bar{K}$ (see [5], p. 58). Whenever K or $\bar{K}$ is regarded as a topological space, the topology in question will be understood to be the interval topology; it is known that in this topology $\bar{K}$ is compact ([5], p. 41). Unless otherwise specified, lower case Greek letters will denote elements of K.

If n is any positive integer, then, permitting ourselves a convenient ambiguity, $\mathbf{n}$ will denote the chain of integers $1 < \cdots < n$ as well as any isomorphic chain. When necessary for clarity, the elements of $\mathbf{n}$ will be specified.

By a topological space, we shall always mean a topological space in which points are closed.

1. Subdirect products of copies of K

This section is devoted to solutions of Problem I of the Introduction. Our first result is highly non-arithmetic and of considerably less depth than those that follow; however, it does show that a complete solution of Problem I can be given in terms of the prime ideals of L.

We require the following definition:

Definition 1. Let L be a lattice and let $\mathscr{C}$ be a set of prime ideals of L that forms a chain under set inclusion; if $h \in L$, we set

$$\mathscr{C}_h = \{P \in \mathscr{C}; h \in P\}.$$

If K is a chain, then we shall say that $\mathscr{C}$ is a *K-chain of prime ideals* in case (i) $\mathscr{C}$ is isomorphic to K and (ii) $P \in \mathscr{C}$ if and only if $P = \cap \mathscr{C}_h$ for some $h \in L$.

Theorem 1. *Let K be an arbitrary chain. A lattice L is isomorphic to a subdirect product of copies of K if and only if for every pair of elements $f < g$ in L there exists a K-chain $\mathscr{C}$ of prime ideals of L such that $\mathscr{C}_f \neq \mathscr{C}_g$.*

Proof. Suppose first that L is a subdirect product of copies of K and let $f < g$ be in L. Then there is a homomorphism φ from L onto K such that $\varphi(f) \neq \varphi(g)$. For each $\alpha \in K$, set

$$P_\alpha = \{h \in L; \varphi(h) \leq \alpha\}$$

and set

$$\mathscr{C} = \{P_\alpha; \alpha \in K\}.$$

Then $\mathscr{C}$ is a chain of prime ideals of L that is isomorphic to K and $\mathscr{C}_f \neq \mathscr{C}_g$. Moreover, one easily verifies that $P_{\varphi(h)} = \cap \mathscr{C}_h$ for each $h \in L$, and from this it follows that $P \in \mathscr{C}$ if and only if $P = \cap \mathscr{C}_h$ for some $h \in L$.

Conversely, if $f < g$, then by hypothesis there exists a K-chain $\mathscr{C}$ of prime ideals of L such that $\mathscr{C}_f \neq \mathscr{C}_g$. Let ψ be an isomorphism from $\mathscr{C}$ onto K and define the mapping φ from L onto K by

$$\varphi(h) = \psi(\cap \mathscr{C}_h) \qquad (h \in L).$$

It will be enough to show that φ is a homomorphism such that $\varphi(f) \neq \varphi(g)$. Now in view of the identities

$$\mathscr{C}_{h \vee k} = \mathscr{C}_h \cap \mathscr{C}_k,$$
$$\mathscr{C}_{h \wedge k} = \mathscr{C}_h \cup \mathscr{C}_k,$$

one readily verifies that φ is, in fact, a homomorphism. Moreover, since $\mathscr{C}_f \neq \mathscr{C}_g$, we have either $\mathscr{C}_f \not\subset \mathscr{C}_g$ or $\mathscr{C}_g \not\subset \mathscr{C}_f$, say the former. Then for some $P \in \mathscr{C}_f$ we have $g \notin P$, whence $g \notin \cap \mathscr{C}_f$ so that $\cap \mathscr{C}_f \neq \cap \mathscr{C}_g$. Thus $\varphi(f) \neq \varphi(g)$, and the proof is complete.

We note that in Theorem 1 it is unnecessary to assume *a priori* that L is distributive.

If K is any chain, then by a *K-family* $(f_\alpha)_{\alpha \in K}$ *in* L we shall mean a mapping $\alpha \to f_\alpha$ from K into L.

Let $(f_\alpha)_{\alpha \in K}$ be a K-family in L. If $f \in L$, then $(f_\alpha)_{\alpha \in K}$ *contains* f in case $f = f_\alpha$ for some $\alpha \in K$. If J is a subchain of K, then $(f_\alpha)_{\alpha \in J}$ is a *subfamily* of $(f_\alpha)_{\alpha \in K}$ and $(f_\alpha)_{\alpha \in J}$ is *finite* in case J is finite. Moreover, $(f_\alpha)_{\alpha \in K}$ is a *K-chain* in case the set $\{f_\alpha;\ \alpha \in K\}$ is itself a chain in L.

If L has no least (or no greatest) element, then it will occasionally be convenient (for notational purposes only) to regard L as embedded in a distributive lattice having a zero element 0 and a unit element 1; this we shall do without further comment.

We can now formulate the basic definition and lemma of this section.

Definition 2. Let $\mathbf{n}$ be the finite chain $1 < \cdots < n$. We shall say that an $\mathbf{n}$-family $(f_i)_{i \in \mathbf{n}}$ in L is *locally separated*[8]) in case either (i) $n = 1$ or (ii) the system of inequalities

$$f_{i+1} \wedge h_i \leq f_i \vee h_{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

has no solution of the form

$$h_0 = 0\,,$$
$$h_1, \ldots, h_{n-2} \in L\,,$$
$$h_{n-1} = 1\,.$$

Lemma 1. *Suppose that K has at least n elements and that $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ is a subchain of K. If $(f_i)_{i \in \mathbf{n}}$ is an $\mathbf{n}$-family in L, then the following statements are equivalent:*

(i) *$(f_i)_{i \in \mathbf{n}}$ is locally separated.*

(ii) *There exists a homomorphism φ from L onto K such that $\varphi(f_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

(iii) *Every subfamily of $(f_i)_{i \in \mathbf{n}}$ is locally separated.*

Proof. We shall verify the implications (i) $\to$ (ii) $\to$ (iii) $\to$ (i). Obviously we may assume that $n > 1$. Suppose then that $(f_i)_{i \in \mathbf{n}}$ is locally separated. Set $I_0 = \{0\}$ and then, recursively, for $i = 1, \ldots, n-1$,

$$I_i = \{h_i \in L;\ f_{i+1} \wedge h_i \leq f_i \vee h_{i-1} \quad \text{for some} \quad h_{i-1} \in I_{i-1}\}\,.$$

It is easy to see that each I_i is an ideal of L and that $f_i \in I_i$ $\quad = 1, \ldots, n-1)$. Moreover, for each $i = 1, \ldots, n-2$ we have $I_i \subset I_{i+1}$. We claim that $f_i \notin I_{i-1}$ for each $i = 2, \ldots, n$. For suppose that $2 \leq k \leq n$ and that $f_k \in I_{k-1}$. Then there exist elements $h_i \in I_i$ $(i = 0, \ldots, k-2)$ such that

$$f_k \leq f_{k-1} \vee h_{k-2}$$

---

[8]) In [1] the term "weakly separating" is used for this concept.

and

$$f_{i+1} \wedge h_i \leqq f_i \vee h_{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, k-2).$$

Setting $h_i = f_n$ for $i = k-1, \ldots, n-2$ and $h_{n-1} = 1$, we also have

$$f_k \wedge h_{k-1} \leqq f_k \leqq f_{k-1} \vee h_{k-2}$$

and

$$f_{i+1} \wedge h_i \leqq f_i \vee h_{i-1} \qquad (i = k, \ldots, n-1).$$

But this is contrary to our assumption that $(f_i)_{i \in n}$ is locally separated, and we conclude that $f_k \notin I_{k-1}$.

We now set $P_n = L$. Since $f_n \notin I_{n-1}$, there exists a prime ideal P_{n-1} of L such that $I_{n-1} \subset P_{n-1}$ and $f_n \notin P_{n-1}$ *). Let G_{n-1} be the dual ideal generated by $D_n = L - P_{n-1}$ and f_{n-1}. If $I_{n-2} \cap G_{n-1} \neq \theta$, then there exists an element $h \in D_n$ such that $f_{n-1} \wedge h \in I_{n-2}$. But, by the definition of I_{n-2}, this implies that $h \in I_{n-2}$, which is contrary to $I_{n-1} \cap D_n = \theta$. Thus $I_{n-2} \cap G_{n-1} = \theta$ and we conclude that there exists a prime ideal P_{n-2} such that $I_{n-2} \subset P_{n-2}$ and $P_{n-2} \cap G_{n-1} = \theta$. Continuing in this manner, we construct a chain of prime ideals

$$P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_n$$

such that $f_i \in P_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ and $f_i \notin P_{i-1}$ $(i = 2, \ldots, n)$.

Now for each $f \in L$, set

$$\varphi(f) = \wedge \{\alpha_i;\, f \in P_i\}.$$

Then it follows easily that φ is a homomorphism of L into K with the property that $\varphi(f_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Thus (i) implies (ii).

Suppose next that there exists a homomorphism φ from L into K that satisfies the requirements of (ii). Consider a subchain $i_1 < \cdots < i_m$ of n; we may assume that $m > 1$. Setting $g_j = f_{i_j}$, $\beta_j = \alpha_{i_j}$, and $h_0 = 0$, suppose there exist elements $h_1, \ldots, h_{m-2} \in L$ such that

$$g_{j+1} \wedge h_j \leqq g_j \vee h_{j-1} \qquad (j = 1, \ldots, m-2).$$

Then $\beta_2 \wedge \varphi(h_1) \leqq \beta_1$ so that, since K is a chain and $\beta_1 < \beta_2$, we have $\varphi(h_1) \leqq \beta_1$. Proceeding inductively, and noting that

$$\beta_{j+1} \wedge \varphi(h_j) \leqq \beta_j \vee \varphi(h_{j-1}) \qquad (j = 2, \ldots, m-2),$$

we obtain

$$\varphi(h_j) \leqq \beta_j \qquad (j = 1, \ldots, m-2).$$

It follows that

$$\beta_{m-1} \vee \varphi(h_{m-2}) = \beta_{m-1} < \beta_m,$$

and hence

$$g_m \not\leqq g_{m-1} \vee h_{m-2}.$$

Thus $(g_j)_{j \in m} = (f_{i_j})_{j \in m}$ is locally separated and the implication (ii) $\rightarrow$ (iii) is established.

Since the implication (iii) $\rightarrow$ (i) is trivial, the proof of the lemma is complete.

*) This is an immediate consequence of the "prime ideal theorem for distributive lattices" (see (*D*) in Section 5); in the sequel we shall use (*D*) without specific mention.

We insert at this point a series of remarks designed to elucidate the concept of a locally separated n-family. It is immediate from Definition 2 that a 2-family $(f_i)_{i\in 2}$ in L is locally separated if and only if $f_2 \nleq f_1$. (In particular, a 2-chain in L is necessarily locally separated.) As a consequence of the implication (i) $\to$ (iii) of Lemma 1, it follows that if $(f_i)_{i\in n}$ is a locally separated n-family in L, then $i<j$ in n only if $f_j \nleq f_i$; in particular, the mapping $i \to f_i$ is one-to-one. If in addition $(f_i)_{i\in n}$ is an n-chain, then $i<j$ in n only if $f_i < f_j$. We observe finally that, according to Definition 2, a 3-chain $(f_i)_{i\in 3}$ is locally separated if and only if f_2 has no complement relative to f_1 and f_3 (i.e., there exists no element $h \in L$ such that $f_2 \wedge h = f_1$ and $f_2 \vee h = f_3$)[10]).

We can now state our first main result.

Theorem 2. *Let n be the finite chain $1 < \cdots < n$. A lattice L is isomorphic to a subdirect product of copies of n if and only if* (1) *L is distributive and* (2) *for every pair of elements $f < g$ in L there exists a locally separated n-chain in L that contains both f and g.*

Proof. In view of the implication (i) $\to$ (ii) of Lemma 1, the sufficiency of our conditions is clear. To prove their necessity, let L be a subdirect product of copies of n (so that L is necessarily distributive) and suppose that $f, g \in L$ with $f < g$. Then there is a homomorphism φ from L onto n such that $p = \varphi(f) < < \varphi(g) = q$. Choose elements $f_1, \ldots, f_n \in L$ such that $f_p = f$, $f_q = g$, and $\varphi(f_i) = i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Set

$$g_i = \bigwedge_{j=i}^{p} f_j \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

$$g_i = f_p \vee \left(\bigwedge_{j=i}^{q} f_j\right) \qquad (i = p+1, \ldots, q-1),$$

and

$$g_i = \bigvee_{j=q}^{i} f_j \qquad (i = q, \ldots, n).$$

Then $(g_i)_{i\in n}$ is an n-chain in L that contains both f and g. Moreover, $\varphi(g_i) = i$ $(i = 1, \ldots, n)$ so that, by Lemma 1, $(g_i)_{i\in n}$ is locally separated.

As noted above, any 2-chain in L is automatically locally separated. We therefore obtain at once the classical representation theorem of BIRKHOFF ([4], Theorem 2.5):

Corollary 1. (BIRKHOFF). *If L is an arbitrary distributive lattice, then L is isomorphic to a subdirect product of copies of* 2.

As a consequence of the characterization of locally separated 3-chains mentioned above, we also have the following result[11]):

Corollary 2. *A lattice L is isomorphic to a subdirect product of copies of* 3 *if and only if* (1) *L is distributive and* (2) *every two element chain in L is contained*

---

[10]) As a consequence of this remark and Lemma 1, we see that if L is a distributive lattice that is not relatively complemented, then there exists a homomorphism from L onto the three element chain 3; this is a result due to GRÄTZER and SCHMIDT [6].

[11]) Corollary 2 was originally conjectured to us by HERMAN RUBIN.

in some chain $f_1 < f_2 < f_3$ having the property that f_2 has no complement relative to f_1 and f_3.

The following lemma will enable us to handle situations in which the chain K is complete.

Lemma 2. *Suppose that K is complete, that K' is a subchain of K, and that $(f_\alpha)_{\alpha \in K'}$ is a K'-family in L. Let $f, g \in L$, let $\mu, \nu \in K$, and, for every subset A of K', denote by $\mathscr{H}(A)$ the set of all homomorphisms φ from L into K such that*

(i) *$\varphi(f_\alpha) = \alpha$ for every $\alpha \in A$;*

(ii) *$\varphi(f) \leqq \mu$ and $\varphi(g) \geqq \nu$.*

If $\mathscr{H}(F) \neq \theta$ for every finite subset F of K', then $\mathscr{H}(K') \neq \theta$.

Proof. Equip the set K^L of all mappings of L into K with the product topology; since K is compact, K^L is compact. It is easy to verify that $\mathscr{H}(A)$ is closed in K^L for every subset A of K' and that the collection

$$\mathscr{F} = \{\mathscr{H}(F); F \text{ is a finite subset of } K'\}$$

has the finite intersection property. Since $\mathscr{H}(K') = \cap \mathscr{F}$, we conclude that $\mathscr{H}(K') \neq \theta$[12]).

Taking our cue from the equivalence of (i) and (iii) of Lemma 1, we now extend Definition 2 as follows:

Definition 3. Let K be an arbitrary chain. We shall say that a K-family $(f_\alpha)_{\alpha \in K}$ in L is *locally separated* in case every finite subfamily of $(f_\alpha)_{\alpha \in K}$ is locally separated in the sense of Definition 2.

Theorem 3. *Let K be a complete chain. A lattice L is isomorphic to a subdirect product of copies of K if and only if* (1) *L is distributive and* (2) *for every pair of elements $f < g$ in L there exists a locally separated K-family in L that contains both f and g.*

Proof. If L is a subdirect product of copies of K (so that L is distributive) and if $f < g$, then there is a homomorphism φ from L onto K such that $\mu = \varphi(f) < \varphi(g) = \nu$. Select (using the axiom of choice) a K-family $(f_\alpha)_{\alpha \in K}$ in L such that $f_\mu = f$, $f_\nu = g$, and $\varphi(f_\alpha) = \alpha$ for every $\alpha \in K$. It follows from Definition 3 and Lemma 1 that $(f_\alpha)_{\alpha \in K}$ is locally separated.

Conversely, if $f < g$, we must produce a homomorphism ψ from L onto K such that $\psi(f) < \psi(g)$. By hypothesis, there exists a locally separated K-family $(f_\alpha)_{\alpha \in K}$ in L such that $f = f_\mu$ and $g = f_\nu$ for some $\mu, \nu \in K$; necessarily, $\mu < \nu$. If F is any finite subset of K, set $F_0 = F \cup \{\mu, \nu\}$. Then $(f_\alpha)_{\alpha \in F_0}$ is locally separated so that, by Lemma 1, there is a homomorphism φ from L into K such that $\varphi(f_\alpha) = \alpha$ for every $\alpha \in F_0$; in the notation of Lemma 2, $\varphi \in \mathscr{H}(F)$. Using Lemma 2 (with $K' = K$), we conclude that $\mathscr{H}(K) \neq \theta$. Then any $\psi \in \mathscr{H}(K)$ satisfies our requirements.

2. *K*-lattices of functions

In this section we direct our attention to the special class of subdirect products of copies of K described in the following definition.

[12]) As a methodological comment, we remark that Lemma 2 can also be deduced from a general theorem on "consistent choice" due to Łoś and Ryll-Nardzewski [10, Theorem 2].

Definition 4. A lattice L will be called a *K-lattice of functions with domain X* in case (i) X is a nonempty set, (ii) L is a sublattice of the direct product K^X, and (iii) L contains every constant K-valued function on X[13]).

When referring to a K-lattice of functions, we shall frequently simply omit the phrase "with domain X".

We shall say that a K-lattice of functions L is *bounded* in case every function in L is bounded both above and below by constant K-valued functions. Our problem here is that of characterizing those lattices L that are representable as bounded K-lattices of functions (see Problem II of the Introduction). We solve this problem for the case in which K is conditionally complete. The fundamental tool for this work is the notion of a separated chain in L.

Definition 5. A chain K in L is said to be *separated*[14]) in case for every $\alpha, \beta \in K$ and every $f \in L$,

(S 1) $f \vee \alpha \geqq \beta > \alpha$ implies $f \geqq \beta$

and

(S 2) $f \wedge \alpha \leqq \beta < \alpha$ implies $f \leqq \beta$.

The motivation for the preceding definition is immediate. In fact, if L is a K-lattice of functions, then the chain K of constant functions in L is obviously separated.

Remark. If K is a chain in L, then the identity mapping $\alpha \to \alpha$ of K is, in the sense of § 1, a K-chain in L. It is easy to verify that if K is separated, then this K-chain is necessarily locally separated. The converse, however, is not in general true.

Now let K be a chain in L. If $\alpha \in K$, set

$$\alpha^+ = \{\beta \in K; \beta > \alpha\}$$

and denote by $\mathscr{P}_\alpha$ the set of all prime ideals P of L such that $\alpha \in P$ and $P \cap \alpha^+ = \theta$.

Lemma 3. *If K is a separated chain in L, if $\alpha \in K$, and if I is an ideal of L, then the following statements hold:*

(i) *If $I \cap \alpha^+ = \theta$, then $I \subset P$ for some $P \in \mathscr{P}_\alpha$.*

(ii) *If I is prime and if $\alpha \in I$, then $P \subset I$ for some $P \in \mathscr{P}_\alpha$.*

Proof. To prove (i), note first that if $\alpha^+ = \theta$, then L itself is in $\mathscr{P}_\alpha$. Assume therefore that $\alpha^+ \neq \theta$, let D be the dual ideal generated by α^+, and let J be the ideal generated by $I \cup \{\alpha\}$. If $J \cap D \neq \theta$, then there exists a $\beta > \alpha$ and an element $f \in I$ such that $\beta \leqq f \vee \alpha$. But then (S 1) yields $f \geqq \beta$, contrary to $\beta \notin I$. It follows that there is a prime ideal P that contains J and that is disjoint from D. Obviously $I \subset P$ and $P \in \mathscr{P}_\alpha$.

[13]) If L is a K-lattice of functions with domain X, then it will be convenient to identify the chain of all constant K-valued functions in L with the chain K; in particular, if $\alpha \in K$, then we shall denote by α the constant function in L whose value is α.

[14]) In [1] and [2] a separated chain is called a "separating chain"; the present requirements for a separated chain are formally weaker than, but actually equivalent to, those of [1] and [2].

To prove (ii), let J be the ideal generated by α. If $I = L$, then, by (i), $J \subset P \subset I$ for some $P \in \mathscr{P}_\alpha$; and if $\alpha^+ = \theta$, then already $I \in \mathscr{P}_\alpha$. We may therefore assume that both $H = L - I$ and α^+ are nonempty. Let D be the dual ideal generated by H and α^+. If $J \cap D \neq \theta$, then there exists a $\beta > \alpha$ and an element $f \in H$ such that $f \wedge \beta \leq \alpha$. But then $f \leq \alpha$ by (S 2) so that $f \in I$, a contradiction. We conclude again that there is a prime ideal P that contains J and that is disjoint from D. This time we have $P \subset I$ and $P \in \mathscr{P}_\alpha$.

Lemma 4. *Let K be a separated chain in L, let $\mu, \nu \in K$ with $\mu < \nu$, and suppose that σ is a homomorphism from L into K such that $\sigma(\mu) = \mu$ and $\sigma(\nu) = \nu$. If $\alpha, \beta \in K$ with $\alpha \leq \mu < \nu \leq \beta$, then there exists a homomorphism θ from L into K such that $\theta(\alpha) = \alpha$, $\theta(\beta) = \beta$, and $\theta(h) = \sigma(h)$ for every $h \in L$ such that $\mu \leq h \leq \nu$.*

Proof. Set

$$P = \{f \in L; \sigma(f) \leq \mu\}.$$

Then P is a prime ideal of L such that $\alpha \in P$; by Lemma 3 (ii), $P' \subset P$ for some $P' \in \mathscr{P}_\alpha$. Next, set

$$Q = \{f \in L; \sigma(f) < \nu\}.$$

Then Q is a (prime) ideal of L such that $Q \cap \nu^+ = \theta$; by Lemma 3 (i), $Q \subset Q'$ for some $Q' \in \mathscr{P}_\nu$. We therefore have the chain of prime ideals

$$P' \subset P \subset Q \subset Q'.$$

Now define θ as follows:

$$\theta(h) = \begin{cases} \alpha & \text{if } h \in P', \\ \mu & \text{if } h \in P - P', \\ \sigma(h) & \text{if } h \in Q - P, \\ \nu & \text{if } h \in Q' - Q, \\ \beta & \text{if } h \in L - Q'. \end{cases}$$

It is a routine matter to verify that θ is a homomorphism from L into K having the required properties.

Again let K be a chain in L. If $\mu < \nu$ in K, we set

$$[\mu, \nu] = \{\alpha \in K; \mu \leq \alpha \leq \nu\}.$$

Suppose now that $f < g$ in L and that $\mu < \nu$ in K. Defining the $[\mu, \nu]$-family $(f_\alpha)_{\alpha \in [\mu,\nu]}$ in L by

$$f_\alpha = \begin{cases} f \vee \mu & \text{if } \alpha = \mu, \\ \alpha & \text{if } \mu < \alpha < \nu, \\ g \wedge \nu & \text{if } \alpha = \nu, \end{cases}$$

we shall say that f and g are *separated by μ and ν* in case the family $(f_\alpha)_{\alpha \in [\mu,\nu]}$ is locally separated (Definitions 2 and 3). Moreover, we shall say that f and g are *strongly separated by μ and ν* in case there is an element $h \in L$ such that $f \wedge h \leq \mu$ and $g \wedge h \not\leq \eta$ for every $\eta < \nu$ in K.

Lemma 5. *Let K be a separated chain in L and suppose that $f < g$ in L and $\mu < \nu$ in K. If f and g are strongly separated by μ and ν, then f and g are separated by μ and ν.*

Proof. By hypothesis, there is an $h \in L$ such that $f \wedge h \leqq \mu$ and $g \wedge h \nleqq \eta$ for every $\eta < \nu$. Let $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ be a finite subchain of $[\mu, \nu]$ such that $\alpha_1 = \mu$ and $\alpha_n = \nu$. Set $f_{\alpha_1} = f \vee \mu$, $f_{\alpha_i} = \alpha_i$ $(i = 2, \ldots, n-1)$, and $f_{\alpha_n} = g \wedge \nu$. In view of Lemma 1 (iii), it will suffice to show that the n-family $(f_{\alpha_i})_{i \in n}$ is locally separated. Setting $h_0 = 0$ and $h_{n-1} = 1$, suppose there exist elements $h_1, \ldots, h_{n-2} \in L$ such that

$$f_{\alpha_{i+1}} \wedge h_i \leqq f_{\alpha_i} \vee h_{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Since $f_{\alpha_1} \wedge h \leqq \mu = \alpha_1$ and $f_{\alpha_i} \wedge h \leqq \alpha_i$ $(i = 2, \ldots, n-1)$, it follows that

$$f_{\alpha_{i+1}} \wedge h_i \wedge h \leqq \alpha_i \vee (h_{i-1} \wedge h) \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

In particular, $g \wedge \nu \wedge h \leqq \alpha_{n-1} \vee (h_{n-2} \wedge h)$; and since $g \wedge h \nleqq \alpha_{n-1}$, an application of (S 2) then shows that $h_{n-2} \wedge h \nleqq \alpha_{n-1}$. Let k be the largest index $(0 \leqq k \leqq n-2)$ such that $h_k \wedge h \leqq \alpha_{k+1}$. Clearly $k < n-2$ so that $f_{\alpha_{k+2}} = \alpha_{k+2}$. But then

$$\alpha_{k+2} \wedge h_{k+1} \wedge h \leqq \alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$$

so that, by (S 2),

$$h_{k+1} \wedge h \leqq \alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}.$$

This is a contradiction, and we conclude that $(f_{\alpha_i})_{i \in n}$ is locally separated.

If K is a chain in L and if $f, g \in L$ with $f < g$, then we shall say that f and g are *(strongly) separated by* K in case there exist $\mu < \nu$ in K such that f and g are (strongly) separated by μ and ν.

We are now ready for the following basic definition:

Definition 6. By a *K-lattice* we shall mean a pair (L, K) such that (i) L is a distributive lattice, (ii) K is a separated chain in L, and (iii) for every pair of elements $f < g$ in L, f and g are separated by K. By a *special K-lattice* we shall mean a pair (L, K) that satisfies (i), (ii), and (iii)$_1$: for every pair of elements $f < g$ in L, f and g are strongly separated by K. A K-lattice (L, K) will be called *bounded* in case for each $f \in L$ there exist $\alpha, \beta \in K$ such that $\alpha \leqq f \leqq \beta$.

When referring to a K-lattice (L, K), and when confusion is unlikely, it will usually be convenient to write L instead of (L, K) and to speak simply of "the K-lattice L".

In view of Lemma 5, it is clear that a special K-lattice is indeed a K-lattice. (Special K-lattices will enter most importantly in § 3; in fact, in Lemma 6 below we shall see that, conversely, the members of an important class of K-lattices are special.) If $L = K$, then it is trivial to verify that (i), (ii), and (iii)$_1$ are satisfied; we shall always regard the chain K as the (special) K-lattice (K, K).

The following observation provides an alternative description of special K-lattices:

In the presence of (ii), (iii)$_1$ *is equivalent to the conjunction of* (iii)$_2$ *and* (iii)$_3$:

(iii)$_2$. *If $f \in L$, if α has no cover in K, and if $f \leqq \beta$ for every $\beta > \alpha$ in K, then $f \leqq \alpha$.*

(iii)$_3$. *If $f, g \in L$ and if, for all $\alpha \in K$ and all $h \in L$, $g \wedge h \leqq \alpha$ implies $f \wedge h \leqq \alpha$, then $f \leqq g$*[15]).

To see that (iii)$_1$ implies (iii)$_2$ and (iii)$_3$, suppose first that α has no cover in K, that $f \leqq \beta$ for every $\beta > \alpha$, but that $f \nleqq \alpha$. Then $f \wedge \alpha < f$ so that, by (iii)$_1$, there exist elements $\mu < \nu$ in K and $h \in L$ such that $f \wedge \alpha \wedge h \leqq \mu$ and $f \wedge h \nleqq \eta$ for every $\eta < \nu$. If $\mu < \alpha$, then by (ii) we have $f \wedge h \leqq \mu$, a contradiction; hence $\alpha \leqq \mu < \nu$. Choosing $\eta \in K$ such that $\alpha < \eta < \nu$, we have $f \wedge h \leqq f \leqq \eta$, again a contradiction. Thus (iii)$_1$ implies (iii)$_2$. Suppose next that, for all $\alpha \in K$ and all $h \in L$, $g \wedge h \leqq \alpha$ implies $f \wedge h \leqq \alpha$, but that $f \nleqq g$. Then $g \wedge f < f$ so that, by (iii)$_1$, there exist $\mu < \nu$ in K and $h \in L$ such that $g \wedge f \wedge h \leqq \mu$ and $f \wedge h \nleqq \eta$ for every $\eta < \nu$. But then $f \wedge h \leqq \mu$, a contradiction. Thus (iii)$_1$ implies (iii)$_3$.

Conversely, suppose that $f, g \in L$ with $f < g$. Then by (iii)$_3$ there exist $\mu \in K$ and $h \in L$ such that $f \wedge h \leqq \mu$ and $g \wedge h \nleqq \mu$. Then by (iii)$_2$ either μ has a cover ν or $g \wedge h \nleqq \nu$ for some $\nu > \mu$. In either case, $g \wedge h \nleqq \eta$ for every $\eta < \nu$. Thus (iii)$_2$ and (iii)$_3$ together imply (iii)$_1$.

If (L_1, K) and (L_2, K) are K-lattices, then by a *K-homomorphism* from (L_1, K) into (L_2, K) we shall mean a homomorphism φ from L_1 into L_2 such that $\varphi(\alpha) = \alpha$ for every $\alpha \in K$. The terms *K-isomorphism* and *K-isomorphic* will have their obvious meanings.

The basic theorem on K-lattices can now be stated:

Theorem 4. *If L is a (bounded) K-lattice of functions with domain X and if K is the chain of all constant K-valued functions on X, then (L, K) is a (bounded) K-lattice; a K-lattice of functions L will always be regarded as the K-lattice (L, K) just described. Conversely, if K is a conditionally complete chain and if L is a bounded K-lattice, then L is K-isomorphic to a bounded K-lattice of functions.*

Proof. The proof of the first assertion is straightforward and will be omitted (cf. the proof of Theorem 3).

Conversely, suppose that K is conditionally complete and that L is a bounded K-lattice. Let $f, g \in L$ with $f < g$ and suppose that f and g are separated by $\mu < \nu$ in K. It will suffice to show that there is a homomorphism φ from L onto K such that $\varphi(f) \leqq \mu$, $\varphi(g) \geqq \nu$, and $\varphi(\alpha) = \alpha$ for every $\alpha \in K$. Moreover, since K is conditionally complete and L is bounded, it will suffice that φ be a homomorphism (with the stated properties) into the completion $\bar{K}$ of K. Now, by Lemma 2, such a homomorphism φ into $\bar{K}$ will exist provided that for every finite subchain $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ of K there is a homomorphism ψ from L into K such that $\psi(f) \leqq \mu$, $\psi(g) \geqq \nu$, and $\psi(\alpha_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. To show the existence of such a ψ (and thereby completing the proof), let us suppose that

$$\alpha_{s-1} \leqq \mu < \alpha_s < \cdots < \alpha_t < \nu \leqq \alpha_{t+1}.$$

[15]) In the following comments, we refer to conditions (C.0), (C.2′), and (C.3) of Definition 5.8 of [2]. Condition (iii)$_3$ is precisely (C.3) and condition (ii) of Definition 6, with the additional requirement that K have neither a first nor a last element, is precisely (C.0). Moreover, if K is dense-in-itself, then (iii)$_2$ is the same as (C.2′). (In particular, then, we note that in the context of [2] the two conditions (C.2′) and (C.3) are replaceable by the single condition (iii)$_1$.)

Since f and g are separated by μ and ν, Lemma 1 provides a homomorphism σ' from L into K such that $\sigma'(f \vee \mu) = \mu$, $\sigma'(g \wedge \nu) = \nu$, and $\sigma'(\alpha_i) = \alpha_i$ $(i = s, \ldots, t)$. Define σ by

$$\sigma(h) = (\sigma'(h) \vee \mu) \wedge \nu \qquad (h \in L) .$$

Then σ is a homomorphism from L into K such that

$$\sigma(\mu) = \sigma((f \wedge \nu) \vee \mu) = \mu ,$$
$$\sigma(\nu) = \sigma((g \vee \mu) \wedge \nu) = \nu ,$$

and

$$\sigma(\alpha_i) = \alpha_i \qquad (i = s, \ldots, t) .$$

An application of Lemma 4 then provides a homomorphism θ from L into K that agrees with σ at $(f \wedge \nu) \vee \mu$ and at $(g \vee \mu) \wedge \nu$ (whence $\theta(f) \leqq \mu$ and $\theta(g) \geqq \nu$) and which is such that $\theta(\alpha_i) = \alpha_i$ $(i = s-1, \ldots, t+1)$. It is now clear that repeated applications of Lemma 4 will eventually yield the desired homomorphism ψ.

If K is complete, then it is easy to see from the preceding proof (or directly from the definitions) that any K-lattice is bounded. We therefore have the following corollary:

Corollary 1. *If K is a complete chain and if L is a K-lattice, then L is K-isomorphic to a bounded K-lattice of functions.*

Our result assumes an especially simple form if K is any subchain of the chain of all natural numbers:

Corollary 2. *Let K be a subchain of the chain of all natural numbers. If L is a distributive lattice such that* (i) *K is a separated chain in L and* (ii) *for each $f \in L$ there exist $\alpha, \beta \in K$ such that $\alpha \leqq f \leqq \beta$, then L is a K-lattice; as a consequence, L is K-isomorphic to a K-lattice of functions.*

Proof. It will evidently suffice to show that if $f, g \in L$ with $f < g$, then f and g are separated by some $\mu < \nu$ in K. Choose a chain $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ of consecutive elements of K such that $\alpha_1 \leqq f < g \leqq \alpha_n$. Let α_k be the largest element of the chain $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ such that $f \vee \alpha_k < g \vee \alpha_k$. Clearly $\alpha_k < \alpha_n$. Set $\mu = \alpha_k$ and $\nu = \alpha_{k+1}$, and suppose that $g \wedge \nu \leqq f \vee \mu$. Noting that $f \vee \nu = g \vee \nu$, we then have

$$f \vee \mu = (g \wedge \nu) \vee (f \vee \mu) = (g \vee f \vee \mu) \wedge (\nu \vee f \vee \mu) \geqq g \vee \mu ,$$

which is a contradiction. Thus $g \wedge \nu \nleqq f \vee \mu$ so that f and g are separated by μ and ν. The proof is therefore complete[16]).

[16]) It is easy to give a brief, direct proof of Corollary 2. Let K be the chain $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$. To see that L is K-isomorphic to a K-lattice of functions, it will suffice to show that if $f < g$ in L, then there exists a homomorphism φ from L onto K such that $\varphi(f) < \varphi(g)$ and $\varphi(\alpha_i) = \alpha_i$ for each i. By hypothesis, there exists an n such that $\alpha_1 \leqq f < g \leqq \alpha_n$. Choose α_k as in the proof given above and note again that $\alpha_k < \alpha_n$. Then there is a prime ideal P of L such that $f \vee \alpha_k \in P$ and $g \vee \alpha_k \notin P$. If $\alpha_{k+1} \in P$, then $g \vee \alpha_{k+1} = f \vee \alpha_{k+1} = f \vee \alpha_k \vee \alpha_{k+1}$ is in P; but then $g \vee \alpha_k \in P$, a contradiction. Thus $\alpha_{k+1} \notin P$ so that $P \in \mathcal{P}_{\alpha_k}$. Setting $P_k = P$, we can now use Lemma 3 (and induction) to construct a chain $P_1 \subset P_2 \subset \cdots$ of prime ideals of L such that $P_i \in \mathcal{P}_{\alpha_i}$ for each i. If for each $h \in L$ we set $\varphi(h) = \wedge\{\alpha_i; h \in P_i\}$, then φ is a homomorphism from L onto K that satisfies the stated conditions.

In particular, if a distributive lattice L contains a separated chain $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ such that $\alpha_1 \leq f \leq \alpha_n$ for every $f \in L$, then L is an n-lattice and hence n-isomorphic to an n-lattice of functions.

Corollary 3. *A lattice L is a bounded 2-lattice if and only if L is a distributive lattice $\neq 1$ that contains a 0 and 1; necessarily, 2 is the chain $0 < 1$ and L is 2-isomorphic to a 2-lattice of functions.*

Proof. We need only remark that if $L \neq 1$ and if L contains a 0 and 1, then the chain $0 < 1$ is automatically separated.

3. K-lattices of continuous functions

We have now finished the purely algebraic portion of our work. For the remainder of the paper we devote our attention to representations of distributive lattices by certain lattices of continuous functions.

If X is a topological space, then the lattice $C(X, K)$ of all continuous K-valued functions on X is obviously a K-lattice of functions with domain X. A sublattice L of $C(X, K)$ will be called a *K-sublattice* of $C(X, K)$ in case L itself is a K-lattice of functions with domain X; that is, in case L contains every constant K-valued function on X. In this section we characterize (for the case X compact Hausdorff and K conditionally complete) two classes of K-sublattices of $C(X, K)$: those that separate points in X and those that separate closed sets in X.

If L is any K-lattice, then we shall denote by $\mathscr{X}(L)$ the set of all K-homomorphisms of L into (and hence onto) K. We shall always view $\mathscr{X}(L)$ as a subspace of the (compact Hausdorff) product space $\bar{K}^L$. If K is conditionally complete and if L is bounded, then $\mathscr{X}(L)$ is precisely the set of all homomorphisms of L into $\bar{K}$ that leave K elementwise fixed. It follows that in this case $\mathscr{X}(L)$ is a closed, and therefore compact, subspace of $\bar{K}^L$.

The argument for our first representation theorem now proceeds along familiar lines. If L is a K-lattice and if $f \in L$, define the function f^* on $\mathscr{X}(L)$ to K by

$$f^*(\varphi) = \varphi(f) \qquad (\varphi \in \mathscr{X}(L)).$$

Then it is clear that the mapping $f \to f^*$ is a K-homomorphism from L into $C(\mathscr{X}(L), K)$; we shall call $f \to f^*$ the *canonical* mapping of L into $C(\mathscr{X}(L), K)$. If now K is conditionally complete and L is bounded, then according to Theorem 4 we may assume that L is a K-lattice of functions with domain X. Thus if $f \neq g$ in L, then $f(x) \neq g(x)$ for some $x \in X$. Denoting by π_x the projection of the product K^X of index x, we then have $\pi_x \in \mathscr{X}(L)$ and $f^*(\pi_x) \neq g^*(\pi_x)$. Thus $f \to f^*$ is a K-isomorphism from L onto a K-sublattice L^* of $C(\mathscr{X}(L), K)$. Moreover, it is clear that L^* is *point-separating* in the sense that, given $\varphi_1 \neq \varphi_2$ in $\mathscr{X}(L)$, $f^*(\varphi_1) \neq f^*(\varphi_2)$ for some $f^* \in L^*$.

Of the two assertions of the following theorem, the first is obvious and the second has just been proved.

Theorem 5. *If X is compact and if L is a K-sublattice of $C(X, K)$, then L is a bounded K-lattice. Conversely, if K is conditionally complete and if L is a bounded K-lattice, then the space $\mathscr{X}(L)$ of all K-homomorphisms of L into K is compact*

Hausdorff and the canonical mapping $f \to f^*$ is a K-isomorphism from L onto a point-separating K-sublattice of $C(\mathcal{X}(L), K)$.

Among other things, Theorem 5 asserts that if L is a subdirect product of copies of K (for definiteness, let us say that L is a sublattice of K^I) and if (i) L contains every constant K-valued function on I and (ii) every element of L is bounded by constant functions, then L is representable as a point-separating sublattice of $C(X, K)$ for some compact Hausdorff space X. The first example below shows that in this result hypothesis (i) cannot simply be omitted. The second shows that the space X is not necessarily unique, even if L is a special K-lattice.

Example 1. Let I be an infinite set, $\mathbf{2}$ the chain $0 < 1$, and L the set of all $f \in \mathbf{2}^I$ such that the set $\{t \in I; f(t) = 1\}$ is finite. Then L is a subdirect product of copies of $\mathbf{2}$ that fails to contain the constant function 1. Now assume that L is (isomorphic to) a point-separating sublattice of $C(X, \mathbf{2})$ for some (necessarily infinite) topological space X. For each $x \in X$, it is easy to verify that the ideal $\{f \in L; f(x) = 0\}$ of L must be of the form $\{f \in L; f(t) = 0\}$ for some $t \in I$, and from this it follows that X is discrete. We conclude that X cannot be compact.

Example 2. Let $\mathbf{3}$ be the chain $0 < 1 < 2$ and let X_1 and X_2 be the discrete spaces $\{x, y, z\}$ and $\{p, q\}$, respectively. Let L_1 be the set of all $f \in C(X_1, \mathbf{3})$ such that $f(x) \neq f(y)$ only if $f \leqq 1$ and $f(y) \neq f(z)$ only if $f \geqq 1$, and let L_2 be the set of all $f \in C(X_2, \mathbf{3})$ such that $f \leqq 1$ or $f \geqq 1$. Then one easily verifies that L_1 and L_2 are $\mathbf{3}$-isomorphic point-separating special $\mathbf{3}$-sublattices of $C(X_1, \mathbf{3})$ and $C(X_2, \mathbf{3})$, respectively.

If the underlying space X is to be uniquely determined by a K-sublattice L of $C(X, K)$, then, as the preceding example shows, one must demand more of L than mere point-separation. The following stronger separation property will prove adequate: We shall say that a sublattice L of $C(X, K)$ is *normally separating* in case for each pair of disjoint closed subsets F_1 and F_2 of X and each pair of elements $\alpha, \beta \in K$ there exists a function $f \in L$ such that $f \leqq \alpha$ on F_1 and $f \geqq \beta$ on F_2. Theorem 6 below shows that a normally separating K-sublattice of $C(X, K)$ does, in fact, determine X to within a homeomorphism. Theorem 7 achieves a characterization of those lattices that are representable as normally separating K-sublattices of some $C(X, K)$.

The following notation will be useful, both here and in the sequel: If $f \in C(X, K)$ and if $\mu \in K$, we set

$$P(f, \mu) = \{x \in X; f(x) \geqq \mu\}$$

and

$$N(f, \mu) = \{x \in X; f(x) \leqq \mu\}.$$

It is clear that both $P(f, \mu)$ and $N(f, \mu)$ are closed in X.

Special K-lattices enter the theory as a consequence of the next lemma.

Lemma 6. *If L is a normally separating K-sublattice of $C(X, K)$, then L is special*[17]).

[17]) We note that the proof of this lemma does not make use of the full force of normal separation.

Proof. We need only show that if $f < g$ in L, then f and g are strongly separated by some $\mu < \nu$ in K. Now there is an $x \in X$ such that $f(x) < g(x)$. Set $f(x) = \alpha$ and $g(x) = \nu$. If ν covers α in K, set $\alpha = \mu$ and $F = P(f, \nu)$. If ν does not cover α, choose $\mu \in K$ such that $\alpha < \mu < \nu$ and set $F = P(f, \mu)$. In either case, $x \notin F$, so there exists an $h \in L$ such that $h \leqq \alpha$ on F and $h(x) \geqq \nu$. Then $f \wedge h \leqq \mu$ and $g \wedge h \nleqq \eta$ for every $\eta < \nu$ in K.

Remark. Example 2 above shows that a special K-sublattice of $C(X, K)$ need not be normally separating.

The basic observation concerning normally separating sublattices is embodied in the following lemma (cf. [2], Lemma 5.6).

Lemma 7. *Let L be a normally separating sublattice of $C(X, K)$, let $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$, and let $f \in C(X, K)$. If $\beta < \gamma$, then there exist $k, l, m \in L$ and $\gamma' < \gamma$, $\beta' > \beta$ in K such that $k \vee m \geqq \delta$, $f \wedge m \leqq \gamma'$, $k \wedge l \leqq \alpha$, and $f \vee l \geqq \beta'$.*

Proof. We consider two cases:

Case 1. *The interval $[\beta, \gamma]$ of K is dense-in-itself.* Choose $\beta', \beta'', \gamma', \gamma''$ in K such that $\beta < \beta' < \beta'' < \gamma'' < \gamma' < \gamma$. Then the closed sets $P(f, \gamma'')$, $P(f, \gamma')$, and $P(f, \beta'')$ are disjoint, respectively, from the closed sets $N(f, \beta'')$, $N(f, \gamma'')$, and $N(f, \beta')$. Since L is normally separating, there exist $k, l, m \in L$ such that $P(f, \gamma'') \subset P(k, \delta)$, $N(f, \beta'') \subset N(k, \alpha)$, $P(f, \gamma') \subset N(m, \gamma')$, $N(f, \gamma'') \subset P(m, \delta)$, $P(f, \beta'') \subset N(l, \alpha)$, and $N(f, \beta') \subset P(l, \beta')$. Since $X = P(f, \gamma'') \cup N(f, \gamma'') \subset P(k, \delta) \cup P(m, \delta) = P(k \vee m, \delta)$, we have $k \vee m \geqq \delta$; and since $P(f, \gamma') \subset N(m, \gamma')$, we have $f \wedge m \leqq \gamma'$. In a similar fashion, it follows that $k \wedge l \leqq \alpha$ and $f \vee l \geqq \beta'$.

Case 2. *The interval $[\beta, \gamma]$ of K is not dense-in-itself.* Choose $\beta', \gamma' \in K$ such that $\beta \leqq \gamma' < \beta' \leqq \gamma$ and such that β' covers γ'. Then $N(f, \gamma')$ is both open and closed. Hence there exist $k, l \in L$ such that

$$N(f, \gamma') \subset N(k, \alpha \wedge \beta) \cap P(l, \delta \vee \gamma)$$

and

$$X - N(f, \gamma') \subset N(l, \alpha \wedge \beta) \cap P(k, \delta \vee \gamma).$$

Setting $m = l$, one easily verifies that k, l, m, β', and γ' satisfy the requirements of the lemma.

Our next definition is motivated by Lemma 7. If L is any K-lattice, then by the *stretching function* S_L we mean the function on the cartesian product $L \times K^4$ to the subsets of the cartesian product L^3 defined as follows: $(k, l, m) \in S_L(f, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in case there exist $\gamma' < \gamma$ and $\beta' > \beta$ in K such that

$$k \vee m \geqq \delta, \quad f \wedge m \leqq \gamma',$$
$$k \wedge l \leqq \alpha, \quad f \vee l \geqq \beta'.$$

Definition 7. We shall say that a K-lattice L is *normal* in case whenever $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$, $\beta < \gamma$, and $f \in L$, we have $S_L(f, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq \theta$.

Remarks: (1) In view of Lemma 7, a normally separating K-sublattice of $C(X, K)$ is necessarily normal.

(2) Let B be a Boolean algebra $\neq 1$ and let 2 be the chain $0 < 1$ in B; as noted in Theorem 4, Corollary 3, B is a 2-lattice. If f is any element of B, if f'

is the complement of f, and if $\alpha, \delta \in 2$, then it is immediate that $(f, f', f') \in S_B(f, \alpha, 0, 1, \delta)$. Hence B is normal.

(3) If K is dense-in-itself, then the definition of normality assumes a somewhat simpler form. In fact, in this case L is normal if and only if whenever $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$, $\beta < \gamma$, and $f \in L$ there exist $k, l, m \in L$ such that $k \vee m \geqq \delta$, $f \wedge m \leqq \gamma$, $k \wedge l \leqq \alpha$, and $f \vee l \geqq \beta$; this is precisely condition (C.1) of ([2], Definition 5.8). In the terminology of [2], a distributive lattice L is a *C_1-lattice relative to K* in case conditions (C.0), (C.1), (C.2′), and (C.3) are satisfied (see footnote 15). Thus L is a C_1-lattice relative to K if and only if (i) K is dense-in-itself and without extreme elements and (ii) L is a normal special K-lattice.

Lemma 8. *Let L be a K-lattice and let ψ be a K-homomorphism from L onto K. Let $f \in L$, let $\alpha \leqq \beta < \gamma \leqq \delta$ be in K, and suppose that $(k, l, m) \in S_L(f, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$. If $\psi(f) \geqq \gamma$, then $\psi(k) \geqq \delta$ and $\psi(m) < \gamma$. If $\psi(f) \leqq \beta$, then $\psi(k) \leqq \alpha$ and $\psi(m) \geqq \delta$.*

Proof. From $\psi(f) \geqq \gamma$, $f \wedge m \leqq \gamma' < \gamma$, and the fact that ψ is a K-homomorphism, we obtain $\psi(m) \leqq \gamma' < \gamma$. Then $k \vee m \geqq \delta > \gamma'$ yields $\psi(k) \geqq \delta$. The second assertion of the lemma is proved in a similar way.

Lemma 9. *Let L be a normal K-sublattice of $C(X, K)$, let ψ_1 and ψ_2 be K-homomorphisms from L onto K, and suppose that $\psi_1(f) \neq \psi_2(f)$ for some $f \in L$. If $\mu, \nu \in K$, then there exists an element $k \in L$ such that $\psi_1(k) \leqq \mu$ and $\psi_2(k) \geqq \nu$.*

Proof. Let $\beta = \psi_1(f)$ and $\gamma = \psi_2(f)$. If $\beta < \gamma$, set $\alpha = \mu \wedge \beta$ and $\delta = \nu \vee \gamma$ and let $(k, l, m) \in S_L(f, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Taking first $\psi = \psi_1$ and then $\psi = \psi_2$ in Lemma 8, we obtain $\psi_1(k) \leqq \alpha \leqq \mu$ and $\psi_2(k) \geqq \delta \geqq \nu$. If, on the other hand, $\gamma < \beta$, let $(k, l, m) \in S_L(f, \gamma, \gamma, \beta, \beta)$. An application of Lemma 8 then yields $\psi_1(m) < \beta \leqq \psi_2(m)$, and the previous case can now be applied with m in place of f.

We can now prove the following result:

Theorem 6[18]). *Let K be a chain with at least two elements. If X_i is compact, if L_i is a normally separating K-sublattice of $C(X_i, K)$ $(i = 1, 2)$, and if L_1 is K-isomorphic to L_2, then X_1 is homeomorphic to X_2.*

Proof. Let X be a compact space, let L be a normally separating K-sublattice of $C(X, K)$, and consider the (Hausdorff) space $\mathscr{X}(L)$ of all K-homomorphisms of L into K. For each $x \in X$ the mapping

$$\pi_x : f \to f(x) \qquad (f \in L)$$

is in $\mathscr{X}(L)$, and it is clear that $x \to \pi_x$ is a continuous mapping from X into $\mathscr{X}(L)$. Moreover, since K has at least two elements, $x \to \pi_x$ is one-to-one. To prove the theorem, it will evidently suffice to show that each $\varphi \in \mathscr{X}(L)$ is of the form π_x for some $x \in X$. Suppose, on the contrary, that for some $\varphi \in \mathscr{X}(L)$ we have $\varphi \neq \pi_x$ for every $x \in X$. Choose $\mu < \nu$ in K. Now for each

[18]) This result, for the case in which $L_i = C(X_i, K)$ $(i = 1, 2)$, is due to KAPLANSKY [8] (KAPLANSKY, however, requires only that L_1 and L_2 be isomorphic rather than K-isomorphic); see, also, Theorem 4.3 of [2].

$x \in X$ there is an element $f_x \in L$ such that $\varphi(f_x) \neq \pi_x(f_x)$; hence, by Lemma 9, there is an element $k_x \in L$ such that

$$\varphi(k_x) \leqq \mu < \nu \leqq \pi_x(k_x).$$

Now if ν does not cover μ, choose $\alpha \in K$ such that $\mu < \alpha < \nu$; and if ν covers μ, let $\alpha = \nu$. Using the compactness of X, a routine argument provides a finite set of elements $k_1, \ldots, k_n \in L$ such that, for each $x \in X$,

$$\varphi(k_i) \leqq \mu < \alpha \leqq k_i(x)$$

for some $i = 1, \ldots, n$. Setting $k = \bigvee_{i=1}^{n} k_i$, we then have

$$\varphi(k) \leqq \mu < \alpha \leqq k.$$

But then $\alpha = \varphi(\alpha) \leqq \varphi(k) < \alpha$, a contradiction. The proof is now complete.

The proof of the next lemma involves a routine application of compactness; we omit the details.

Lemma 10. *Let X be compact, let L be a sublattice of $C(X, K)$ and let F_1 and F_2 be closed subsets of X. If $\mu, \nu \in K$ and if for each $x \in F_1$ and each $y \in F_2$ there exists a function $g \in L$ such that $g \leqq \mu$ on a neighborhood of x and $g \geqq \nu$ on a neighborhood of y, then there exists a function $h \in L$ such that $h \leqq \mu$ on F_1 and $h \geqq \nu$ on F_2.*

We shall say that a space X is *K-normal* (cf. [8]) in case $C(X, K)$ is itself normally separating. Obviously X is K-normal if and only if $C(X, K)$ contains a normally separating sublattice.

We can now state the main result of this section.

Theorem 7. *If K is a chain, if X is a compact space, and if L is a normally separating K-sublattice of $C(X, K)$, then L is a bounded normal special K-lattice. Conversely, if K is a conditionally complete chain with at least two elements and if L is a bounded normal K-lattice, then there exists a K-isomorphism of L onto a normally separating K-sublattice of $C(X, K)$ for some topologically unique compact K-normal space X. In fact, X can be chosen as the space $\mathscr{X}(L)$ of all K-homomorphisms of L onto K, and the K-isomorphism can be taken to be the canonical mapping $f \to f^*$ from L into $C(\mathscr{X}(L), K)$.*

Proof. The first assertion is an immediate consequence of Theorem 5, Lemma 6, and the remark following Definition 7. Let us suppose, then, that K is a conditionally complete chain with at least two elements. In order to complete the proof it will suffice, in view of Theorems 5 and 6, to show that if X is a compact space and if L is a point-separating normal K-sublattice of $C(X, K)$, then L is normally separating. Thus let F_1 and F_2 be disjoint closed subsets of X and let $\alpha, \delta \in K$; there will be no loss if we assume that $\alpha < \delta$. For each $x \in F_1$ and $y \in F_2$ there is an $f \in L$ such that $f(x) \neq f(y)$; hence, by Lemma 9, there is a $g \in L$ such that

$$g(x) \leqq \alpha < \delta \leqq g(y).$$

If there exist $\beta, \gamma \in K$ such that $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, then Lemma 10 (with $\mu = \beta$, $\nu = \gamma$) provides an $h \in L$ such that $h \leqq \beta$ on F_1 and $h \geqq \gamma$ on F_2.

Let (k, l, m) be in $S_L(h, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Then, using Lemma 8, $k \leqq \alpha$ on F_1 and $k \geqq \delta$ on F_2. If, on the other hand, there is at most one element of K between α and δ, then Lemma 10 (with $\mu = \alpha$, $\nu = \delta$) immediately yields an $h \in L$ such that $h \leqq \alpha$ on F_1 and $h \geqq \delta$ on F_2. The proof is now complete.

In view of Remark 3 following Definition 7, Theorem 7.7 of [2] is, in its essential features, Theorem 7 above for the case is which K is conditionally complete, dense-in-itself, and with neither a first nor a last element.

4. A characterization of $C(X, K)$

In this section we obtain a characterization of the entire lattice $C(X, K)$ for the case in which X is compact K-normal and K is conditionally complete. Normally separating K-sublattices of $C(X, K)$ have already been characterized in Theorem 7. What is required, therefore, is an algebraic (i.e., lattice-theoretic) criterion for determining when a normally separating K-sublattice of $C(X, K)$ is actually all of $C(X, K)$ (see the remarks of the Introduction). Such a criterion will be obtained as a corollary of Theorem 8 below. The latter theorem is a considerably more general result than is needed for our present purposes; we present it here, however, both for its intrinsic interest and in anticipation of future applications.

The main new tool that we need is the notion of a continuous ideal of a K-lattice.

Definition 8. Let I be an ideal of a K-lattice L. We say that I is *continuous* in case for each pair of elements $\alpha < \beta$ in K there exist $\alpha' > \alpha$ and $\beta' < \beta$ in K, $k_1, k_2 \in L$, and $g \in I$ such that

(i) $I \leqq k_1 \vee k_2$[19];

(ii) For every $f \geqq g$ in I, if $k_i \wedge \alpha' \not\leqq f$, then $k_i \wedge f \leqq \beta'$ $(i = 1, 2)$.

If I is an ideal of a lattice L, then I is *bounded* in case $I \leqq f$ for some $f \in L$, and I is *pseudoprincipal* in case I has a least upper bound $\vee I$ in L.

It is clear that if I is a principal ideal of L, then I is pseudoprincipal and that if I is a continuous ideal of a K-lattice L, then I is necessarily bounded.

Remark. If L is a bounded 2-lattice (so that 2 is the chain $0 < 1$ in L), then every continuous ideal of L is principal and therefore pseudoprincipal. To see this, let I be a continuous ideal of L, let $\alpha = 0$ and $\beta = 1$, and let α', β', k_1, k_2, and g be as required in Definition 8; necessarily, $\alpha' = 1$ and $\beta' = 0$. If $I = \{0\}$ or if $k_1 \vee k_2 \in I$, then already I is principal. We may therefore suppose that $I \neq \{0\}$ and that $k_1 \notin I$ or $k_2 \notin I$, say $k_1 \notin I$. To complete the argument, we shall show that $k_2 \in I$ and that $I \leqq k_2$. Let f be any nonzero element of I. Since $k_1 \not\leqq f \vee g$, condition (ii) above yields $k_1 \wedge (f \vee g) = 0$. Now if $k_2 \not\leqq f \vee g$, then (ii) also gives $k_2 \wedge (f \vee g) = 0$; but then $f \vee g = (k_1 \vee k_2) \wedge (f \vee g) = 0$, contrary to $f \neq 0$. Hence $k_2 \leqq f \vee g$. Then $k_2 \in I$ and

$$k_2 = (k_1 \vee k_2) \wedge (f \vee g \vee k) = (k_1 \vee k_2) \wedge (f \vee g) = f \vee g\,,$$

whence $f \leqq k_2$.

[19]) If L is any lattice, if $S \subset L$, and if $f \in L$, then by $S \leqq f$ we mean that $g \leqq f$ for every $g \in S$.

Now let X be a topological space. A subset Z of X will be called a *zero-set* (relative to K) in case for some $f \in C(X, K)$ and some $\alpha \in K$ either $Z = P(f, \alpha)$ or $Z = N(f, \alpha)$. Obviously any zero-set is closed. We shall denote the collection of all zero-sets by $\mathscr{Z}(X, K)$. (The motivation for our terminology is clear; in fact, if R is the chain of real numbers, then $Z \in \mathscr{Z}(X, R)$ if and only if $Z = \{x \in X; f(x) = 0\}$ for some $f \in C(X, R)$.)

We shall say that a sublattice L of $C(X, K)$ is *Z-separating* in case for each pair of disjoint zero-sets Z_1 and Z_2 in $\mathscr{Z}(X, K)$ and each pair of functions $h_1, h_2 \in L$ there exists a function $f \in L$ such that $f \leqq h_1$ on Z_1 and $f \geqq h_2$ on Z_2. If X is *pseudocompact relative to* K (i.e., if every function in $C(X, K)$ is bounded), then clearly any normally separating sublattice of $C(X, K)$ is Z-separating.

A sublattice L of $C(X, K)$ will be called *convex* in case $h_1, h_2 \in L$, $p \in C(X,K)$, and $h_1 \leqq p \leqq h_2$ together imply $p \in L$.

We can now state the following result:

Theorem 8. *Let X be a topological space, let K be a chain, and let L be a K-sublattice of $C(X, K)$. If K is conditionally complete and if L is convex, then every continuous ideal of L is pseudoprincipal. Conversely, if L is Z-separating and if every continuous ideal of L is pseudoprincipal, then L is convex.*

Proof. Suppose first that K is conditionally complete and that L is convex. If I is a bounded ideal of L, set

$$(\sup I)(x) = \sup\{f(x); f \in I\} \qquad (x \in X).$$

Then $\sup I$ is a K-valued function on X. To show that every continuous ideal of L is pseudoprincipal, it will suffice to show that if I is a bounded ideal of L such that $p = \sup I$ is not continuous, then I is not continuous. Suppose then that p is discontinuous at some point $x \in X$ and set $p(x) = \gamma$. Two cases can arise:

Case 1. *There is a $\delta > \gamma$ such that $p(U) \not\leqq \eta$ for every $\eta < \delta$ and every neighborhood U of x.* Choose $\beta \in K$ such that $\gamma < \beta \leqq \delta$, with the proviso that $\beta = \delta$ only if δ covers γ. Suppose that $\alpha', \beta' \in K$ with $\alpha' > \gamma$ and $\beta' < \beta$. Suppose further that $g \in I$ and that $k_1, k_2 \in L$ such that $I \leqq k_1 \vee k_2$. If $(k_1 \vee k_2)(x) < \delta$, then on some neighborhood of x we have $p \leqq k_1 \vee k_2 \leqq \eta$ for some $\eta < \delta$, which is contrary to hypothesis. Thus either $k_1(x) \geqq \delta$ or $k_2(x) \geqq \delta$, say the former. Then $k_1(U) \geqq \beta$ for some neighborhood U of x. Since $p(U) \not\leqq \beta'$, we have $h(y) > \beta'$ for some $y \in U$ and some $h \in I$. Set $f = g \vee h$. Since $f \in I$, we have

$$f(x) \leqq \gamma < \alpha' \wedge \beta \leqq \alpha' \wedge k_1(x),$$

and hence $k_1 \wedge \alpha' \not\leqq f$. But also

$$\beta' < \beta \wedge h(y) \leqq k_1(y) \wedge f(y),$$

so that $k_1 \wedge f \not\leqq \beta'$. Since $f \geqq g$, we conclude that I is not continuous.

Case 2. *There is a $\delta < \gamma$ such that $p(U) \not\geqq \eta$ for every $\eta > \delta$ and every neighborhood U of x.* Choose $\beta \in K$ such that $\delta < \beta \leqq \gamma$, this time with the proviso that $\beta = \gamma$ only if γ covers δ. Suppose that $\alpha', \beta' \in K$ with $\alpha' > \delta$ and

$\beta' < \beta$ and that k_1, k_2 and g are as before. Since $p \leqq k_1 \vee k_2$, either $k_1(x) \geqq \gamma$ or $k_2(x) \geqq \gamma$, say the former. Then $k_1(U) \geqq \beta$ for some neighborhood U of x. Moreover, since $p(x) = \gamma$, we have $h(x) > \beta'$ for some $h \in I$. Set $f = g \vee h$. Since $p(U) \ngeq \alpha' \wedge \beta$ and $f \in I$, $f(y) < \alpha' \wedge \beta$ for some $y \in U$. Then

$$f(y) < \alpha' \wedge \beta \leqq \alpha' \wedge k_1(y),$$

so that $k_1 \wedge \alpha' \nleqq f$. But also

$$\beta' < \beta \wedge h(x) \leqq k_1(x) \wedge f(x),$$

and therefore $k_1 \wedge f \nleqq \beta'$. Since $f \geqq g$, we again conclude that I is not continuous.

We have now proved that every continuous ideal of L is pseudoprincipal.

Conversely, assume that L is Z-separating and that every continuous ideal of L is pseudoprincipal. Let $h_1, h_2 \in L$ and suppose that $p \in C(X, K)$ with $h_1 \leqq p \leqq h_2$. Clearly

$$I = \{f \in L; f \leqq p\}$$

is an ideal of L. We claim that I is continuous. To see this, suppose that $\alpha, \beta \in K$ with $\alpha < \beta$. We consider two cases:

Case 1. *α has a cover in K.* Let α' cover α and set $\beta' = \alpha$, $U = N(p, \beta')$, and $V = X - U = P(p, \alpha')$.

Case 2. *α has no cover in K.* Choose $\alpha', \beta' \in K$ such that $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ and set $U = N(p, \alpha')$ and $V = P(p, \beta')$.

We shall treat the two cases simultaneously. In both cases U and V are disjoint zero-sets relative to K. Hence there exists a function $k_1 \in L$ such that $k_1 \geqq \beta$ on U and $k_1 \leqq \alpha$ on V. Set $W = N(k_1, \beta')$ and observe that $V \subset W$ and $W \cap U = \emptyset$. Since $W \in \mathscr{Z}(X, K)$, there exists a function $k_2 \in L$ such that $k_2 \leqq h_1$ on U and $k_2 \geqq h_2$ on W. Now let $g = k_2 \wedge \alpha'$. Since $k_2 \leqq h_1 \leqq p$ on U and $\alpha' \leqq p$ on $X - U$, we have $g \leqq p$ so that $g \in I$. Moreover, $p \leqq h_2 \leqq k_2$ on W and $p \leqq \beta' < k_1$ on $X - W$; hence $p \leqq k_1 \vee k_2$ so that $I \leqq k_1 \vee k_2$. Finally, suppose that $f \in I$ with $f \geqq g$. Then $k_1 \leqq \alpha \leqq \beta'$ on V and $f \leqq p \leqq \beta'$ on $X - V$ so that $k_1 \wedge f \leqq \beta'$. Since, trivially, $k_2 \wedge \alpha' = g \leqq f$, we conclude that I is continuous.

Now, by hypothesis, I has a least upper bound $\vee I$ in L. To complete the proof, it will suffice to show that $p = \vee I$. Thus let $x \in X$, set $\alpha = p(x)$, and consider an arbitrary $\beta \in K$ such that $\alpha < \beta$. Retaining the notation of the preceding paragraph, we have $p \leqq h_2 \leqq k_2$ on V and $p \leqq \beta'$ on $X - V$, and hence $I \leqq p \leqq k_2 \vee \beta'$. Moreover, $x \in U$ so that $k_2(x) \leqq h_1(x) \leqq p(x) \leqq \beta'$. Thus $(\vee I)(x) \leqq k_2(x) \vee \beta' < \beta$, and we conclude that $(\vee I)(x) \leqq p(x)$. A dual argument shows that $p(x) \leqq (\vee I)(x)$, and therefore $p = \vee I$. The proof is now complete.

Corollary. *Let K be a conditionally complete chain, let X be a space that is pseudocompact relative to K, and let L be a normally separating K-sublattice of $C(X, K)$. Then $L = C(X, K)$ if and only if every continuous ideal of L is pseudoprincipal.*

Remarks. (1) The hypothesis of Z-separation cannot be omitted from the second assertion of the theorem. For example, let X be a discrete space with at least two elements and let L be the sublattice 2 of $C(X; 2)$. Then every continuous ideal of L is pseudoprincipal, but L is not convex.

(2) A convex K-sublattice L of $C(X, K)$ need not be Z-separating, even if K is complete. For example, let X be the closed unit interval $[0, 1]$, let K be the subchain $[0, 1] \cup \{2\}$ of R, and let $L = C(X, K)$.

(3) Suppose that in the above definition of Z-separation the functions h_1 and h_2 are required to belong to K instead of to L. Then the proof of Theorem 8 shows the following: If L is a K-sublattice of $C(X, K)$, if L is Z-separating in this modified sense, and if every continuous ideal of L is pseudoprincipal, then L contains every bounded function in $C(X, K)$.

Our final result is now an immediate consequence of Theorem 7 and the preceding corollary.

Theorem 9. *Let K be a conditionally complete chain. If X is a compact K-normal space, then $C(X, K)$ is a bounded normal special K-lattice and every continuous ideal of $C(X, K)$ is pseudoprincipal. Conversely, if K has at least two elements and if L is a bounded normal K-lattice such that every continuous ideal of L is pseudoprincipal, then there exists a K-isomorphism of L onto $C(X, K)$ for some topologically unique compact K-normal space X. In fact, X can be chosen as the space $\mathscr{X}(L)$ of all K-homomorphisms of L onto K, and the K-isomorphism can be taken to be the canonical mapping $f \to f^*$ from L into $C(\mathscr{X}(L), K)$.*

As noted in the introduction, we obtain as a corollary a new solution of Birkhoff's Problem 81 [5] (see also Kaplansky [9]):

Corollary 1. *Let R be the chain of real numbers. A lattice L is isomorphic to $C(X, R)$ for some compact Hausdorff space X if and only if L is a (special) bounded normal R-lattice such that every continuous ideal of L is pseudoprincipal.*

If B is a Boolean algebra $\neq 1$, then B can be regarded as a bounded normal 2-lattice in which every continuous ideal is pseudoprincipal (see the remarks following Definitions 7 and 8). Thus B is isomorphic to $C(\mathscr{X}(B), 2)$, and $\mathscr{X}(B)$, being 2-normal, is necessarily totally disconnected. Since a one element Boolean algebra is isomorphic to $C(\theta, 2) = \{\theta\}$, we therefore obtain the representation theorem of Stone [14] for Boolean algebras:

Corollary 2. (Stone). *If B is a Boolean algebra, then B is isomorphic to $C(X, 2)$ for some topologically unique compact totally disconnected space X.*

5. Appendix

By the *prime ideal theorem for Boolean algebras* we mean the following proposition:

(B) *In every Boolean algebra $\neq 1$ there is a proper prime ideal.*

It is known that **(B)** is effectively equivalent (i.e., equivalent without recourse to transfinite methods) to a large number of propositions occuring in various parts of mathematics. Among these, we mention Stone's representa-

tion theorem for Boolean algebras and Tychonoff's theorem on products of compact Hausdorff spaces[20]):

(S) *Every Boolean algebra is isomorphic to a subdirect product of copies of* 2.

(T) *The product of any family of compact Hausdorff spaces is compact.*

As a part of each of Theorems 2, 3, 4, 5, 7, and 9 of this paper there is included a representation theorem for some class of lattices (i.e., an assertion to the effect that if L is a lattice with some property $\mathscr{P}$, then L is isomorphic to a subdirect product of a certain prescribed form). We shall establish the following result:

Theorem. *Each of the representation theorems associated with Theorems* 2, 3, 4, 5, 7, *and* 9 *is effectively equivalent to the prime ideal theorem for Boolean algebras.*

One readily verifies that each of these theorems implies, without transfinite methods, proposition **(S)**. On the other hand, their proofs invoke transfinite methods only in the use of **(T)** (Lemma 2 and Theorem 5) and of the *prime ideal theorem for distributive lattices* (Lemmas 1 and 3):

(D) *If in any distributive lattice I is an ideal disjoint from a dual ideal D, then there is a prime ideal containing I that is disjoint from D.*

To establish the theorem, it is therefore enough to show that **(T)** implies **(D)**. For the sake of completeness, we provide a proof of this implication[21]).

We shall need the following lemma:

Lemma. *Let L be a distributive lattice, let I be an ideal of L disjoint from the dual ideal D, and let $x, y \in L$. Then there exists an ideal I^* containing I and a dual ideal D^* containing D such that* (i) $I^* \cap D^* = \theta$ *and* (ii) *either* $x \in I^*$ *or* $y \in I^*$ *or* $x \wedge y \in D^*$[22]).

Proof. Let I_x and I_y be the ideals generated by $I \cup \{x\}$ and $I \cup \{y\}$, respectively. We may obviously assume that both I_x and I_y meet D; hence there exist elements $a_i \in I$ $(i = 1, 2)$ such that $a_1 \vee x$ and $a_2 \vee x$ are in D. Set $I^* = I$ and let D^* be the dual ideal generated by $D \cup \{x \wedge y\}$. It will suffice to show that $I^* \cap D^* = \theta$. Now if $I^* \cap D^* \neq \theta$, then for some $z \in D$ we have $x \wedge y \wedge z \in I$. But then $(a_1 \vee x) \wedge (a_2 \vee y) \wedge z$ is in $I \cap D$, which is a contradiction.

Now let L be a distributive lattice, let I and D be as in **(D)**, and let 2 be the chain $0 < 1$. To establish **(D)** it is enough to show that there is a homomorphism φ from L onto 2 such that $\varphi = 0$ on I and $\varphi = 1$ on D. Assign 2 its discrete topology; then by **(T)** the product 2^L is compact. If $x, y \in L$, denote by $F(x, y)$ the set of all $\psi \in 2^L$ such that $\psi = 0$ on I, $\psi = 1$ on D, $\psi(x \vee y) = \psi(x) \vee \psi(y)$,

[20]) The equivalence of **(B)** and **(S)** is due to Stone [14] and that of **(B)** and **(T)** to Łoś and Ryll-Nardzewski [11] and to Rubin and Scott [13]. For other propositions effectively equivalent to **(B)**, see e.g., [11] and [13] as well as the reports of Henkin, Scott, and Tarski: Bull. Am. Math. Soc. **60**, 387—391 (1954).

[21]) The equivalence of **(B)** and **(D)** is no doubt reasonably well known; however, we are not aware of a proof in the literature.

[22]) This lemma is the key step in the proof of **(D)** by transfinite induction (see, e.g., Stone [15], p. 8).

and $\psi(x \wedge y) = \psi(x) \wedge \psi(y)$. Then $F(x, y)$ is closed in 2^L. If $x_i, y_i \in L$ ($i = 1, \ldots, n$), then after n applications of the lemma we obtain an ideal I^* containing I and a dual ideal D^* containing D such that (i) $I^* \cap D^* = \theta$ and (ii) for each $i = 1, \ldots, n$, either $x_i \in I^*$ or $y_i \in I^*$ or $x_i \wedge y_i \in D^*$. Defining $\psi = 0$ on I and $\psi = 1$ on $L - I$, one readily verifies that $\psi \in \bigcap_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)$, and we conclude that the collection $\mathcal{F} = \{F(x, y); (x, y) \in L \times L\}$ has the finite intersection property. Then any element φ in $\cap \mathcal{F}$ will satisfy our requirements.

References

[1] ANDERSON, F. W.: Function lattices. Proc. Symposia Pure Mathematics. Volume 2, 198—202 (1961).

[2] ANDERSON, F. W., and R. L. BLAIR: Characterizations of certain lattices of functions. Pacific J. Math. **9**, 335—364 (1959).

[3] BAER, R. M.: Certain homomorphisms onto chains. Arch. Math. **8**, 93—95 (1957).

[4] BIRKHOFF, G.: On the combination of subalgebras. Proc. Cambridge Phil. Soc. **29**, 441—464 (1933).

[5] BIRKHOFF, G.: Lattice theory. Am. Math. Soc. Colloq. Publ. **25**, rev. ed. (1948).

[6] GRÄTZER, G., and E. T. SCHMIDT: Characterizations of relatively complemented distributive lattices. Publ. Math., Debrecen **5**, 275—287 (1958).

[7] HEIDER, L. J.: A characterization of function lattices. Duke Math. J. **23**, 297—301 (1956).

[8] KAPLANSKY, I.: Lattices of continuous functions. Bull. Am. Math. Soc. **53**, 617—623 (1947).

[9] KAPLANSKY, I.: Lattices of continuous functions. II. Am. J. Math. **70**, 626—634 (1948).

[10] ŁOŚ, J., and C. RYLL-NARDZEWSKI: On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs. Fundamenta Math. **38**, 233—237 (1951).

[11] ŁOŚ, J., and C. RYLL-NARDZEWSKI: Effectiveness of the representation theory for Boolean algebras. Fundamenta Math. **41**, 49—56 (1954).

[12] PINSKER, A. G.: A lattice characterization of function spaces (in Russian). Uspekhi Mat. Nauk (N. S.) **12**, 226—229 (1957).

[13] RUBIN, H., and D. SCOTT: Some topological theorems equivalent to the Boolean prime ideal theorem (abstract). Bull. Am. Math. Soc. **60**, 389 (1954).

[14] STONE, M. H.: Applications of the theory of Boolean rings to general topology Trans. Am. Math. Soc. **41**, 375—481 (1937).

[15] STONE, M. H.: Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics. Cas. Mat. Fys. **67**, 1—25 (1937).

[16] TARSKI, A.: Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics. Proc. Intern. Congr. Math. Cambridge I, 705—720 (1950).

(Received September 1, 1960)

Pejas, W.
Math. Annalen 143, 212—235 (1961)

Die Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie

Von
W. Pejas in Kiel

Einleitung

In dieser Arbeit soll eine Übersicht über die algebraischen Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie gegeben werden. Unter der absoluten Geometrie im Hilbertschen Sinne sei hier die durch die Hilbertschen Axiome I der Inzidenz, II der Anordnung und III der Kongruenz definierte Geometrie verstanden (vgl. Hilbert [5]). Wir beschränken uns auf die Ebene, legen also aus der Gruppe I nur die Axiome 1—3 zugrunde. Die Modelle dieses Axiomensystems bezeichnen wir in dieser Arbeit als *Hilbert-Ebenen.*

Als Ausgangspunkt der Untersuchung wird uns die Tatsache dienen, daß jede Hilbert-Ebene „algebraisiert" werden kann. Dies ergibt sich als ein Spezialfall des Haupt-Theorems aus Bachmann [1][1]), wonach die dort behandelten allgemeineren metrischen Ebenen auf folgende Weise algebraisch dargestellt werden können: Die gegebene metrische Ebene wird erweitert zur Idealebene; die Idealebene erweist sich als eine projektiv-metrische Ebene[2]) und kann daher als projektiv-metrische Koordinatenebene über einem Körper dargestellt werden.

Wir formulieren diese Einbettung in eine projektiv-metrische Koordinatenebene — für den uns interessierenden Spezialfall der Hilbert-Ebenen — in § 1,3 Satz 1 genauer.

Unser Ziel, alle Hilbert-Ebenen zu bestimmen, können wir also dadurch erreichen, daß wir in den projektiv-metrischen Koordinatenebenen die Hilbert-Teilebenen kennzeichnen.

Die §§ 1 und 2 enthalten vorbereitende Betrachtungen. Die in § 2 bewiesenen Sätze 3 und 4 über formalreelle Körper sind auch für sich von Interesse. Satz 3 hat eine mehr beiläufige Anwendung in § 3; für den Beweis der wesentlichen Theoreme 1 bis 4 werden die erwähnten beiden Sätze nicht benötigt.

In § 3 behandeln wir zunächst die Hilbert-Ebenen mit euklidischer Metrik. Deren algebraische Kennzeichnung erhält man sofort aus der in AGS § 19 gegebenen algebraischen Kennzeichnung der metrischen Teilebenen einer euklidischen Ebene.

---

[1]) Dieses Buch wird im folgenden als AGS zitiert.

[2]) Die Begriffe (singuläre, ordinäre, elliptische, hyperbolische) projektiv-metrische Ebene und projektiv-metrische Koordinatenebene verwenden wir in der in AGS angegebenen Bedeutung.

In § 4 wenden wir uns dann den Hilbert-Ebenen mit nichteuklidischer Metrik zu. Wir erhalten zunächst eine Klasse von Hilbert-Ebenen, die wie die Dehnsche nichtlegendresche Geometrie[3]) konstruiert sind (Theorem 2). Eine weitere Klasse ergibt sich aus einer Verallgemeinerung des Kleinschen Modells der hyperbolischen Geometrie (Theorem 3). Es läßt sich dann zeigen, daß diese beiden Klassen die sämtlichen Hilbert-Ebenen mit nichteuklidischer Metrik enthalten (Theorem 4).

Damit ist das Ziel dieser Arbeit erreicht. In § 5 wird — anhangsweise — die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem Verhalten der Winkelsumme im Dreieck und dem (hyperbolischen bzw. elliptischen) Charakter der Idealebene diskutiert.

Die Anregung zu dieser Arbeit gab mein verehrter akademischer Lehrer, Herr Professor Dr. F. Bachmann. Ich bin ihm darüber hinaus auch zu Dank verpflichtet für viele Hinweise auf einzelne Fragestellungen, die mir bei der Durchführung dieser Untersuchungen von großem Nutzen waren.

§ 1. Die Algebraisierung der Hilbert-Ebenen

1. Angeordnete metrische Ebenen mit freier Beweglichkeit. Wir wollen in diesem Paragraphen das in der Einleitung erwähnte Haupt-Theorem aus AGS über die Einbettung der metrischen Ebenen in projektiv-metrische Ebenen auf die Hilbert-Ebenen anwenden. Zunächst geben wir ein für diesen Zweck geeigneteres Axiomensystem für die Hilbert-Ebenen an.

Wir legen den Begriff der *metrischen Ebene* im Sinne des Bachmannschen Axiomensystems zugrunde, denken uns eine metrische Ebene also durch das in AGS § 2,3 angegebene System von Forderungen definiert. Das dort benutzte Reichhaltigkeitsaxiom *(„Es gibt mindestens eine Gerade, und mit jeder Geraden inzidieren mindestens drei Punkte")* kann nach einer Bemerkung von J. Ahrens durch das folgende ersetzt werden: *„Es gibt mindestens zwei Punkte."* (Für den Beweis siehe die Note am Schluß von Bachmann-Pejas [2].)

Eine metrische Ebene heiße *angeordnet*, wenn für ihre Punkte eine Zwischenbeziehung gegeben ist, die den Hilbertschen Axiomen der Anordnung genügt und die bei den Bewegungen der metrischen Ebene erhalten bleibt. Letzteres bedeutet genauer: Liegt der Punkt A zwischen den Punkten B und C und ist α eine Bewegung, so liegt auch $A\alpha$ zwischen $B\alpha$ und $C\alpha$. ($A\alpha$ bezeichnet das Bild von A bei der Bewegung α.)

Man sagt, daß eine metrische Ebene *freie Beweglichkeit* besitzt, wenn es zu je zwei inzidenten Paaren Punkt und Gerade P, g und P', g' eine Bewegung gibt, die P in P' und zugleich g in g' überführt.

Es läßt sich nun leicht zeigen, was hier nicht ausgeführt werden soll, daß jede Hilbert-Ebene eine angeordnete metrische Ebene mit freier Beweglichkeit ist und umgekehrt. Von dieser Äquivalenz werden wir im folgenden Gebrauch machen.

2. Teilebenen. Es sei E eine projektiv-metrische Koordinatenebene über einem Körper K von Charakteristik $\neq 2$ (vgl. AGS § 5 und § 8). Wir bezeichnen

[3]) Dehn [4].

die Punkte bzw. Geraden von E durch $K\mathfrak{x}$ bzw. $K\mathfrak{u}$, wobei $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3)$ bzw. $\mathfrak{u} = [u_1, u_2, u_3]$ Tripel homogener Punkt- bzw. Geradenkoordinaten sind. Eine Menge T von Punkten und Geraden aus E nennen wir eine *metrische Teilebene* von E, wenn T mit der in E gegebenen Inzidenz und Orthogonalität eine metrische Ebene ist.

Ist der Koordinatenkörper K geordnet und enthält T nur Punkte von der Form $K(x_1, x_2, 1)$, so kann man für die Punkte von T auf die übliche Weise eine Zwischenbeziehung definieren: Der Punkt $K\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, 1)$ liege zwischen den Punkten $K\mathfrak{b}$ und $K\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{b} = (b_1, b_2, 1)$ und $\mathfrak{c} = (c_1, c_2, 1)$, wenn eine Gleichung

$$\mathfrak{a} = b\mathfrak{b} + c\mathfrak{c} \quad \text{mit} \quad b, c \in K, \quad b, c > 0$$

besteht. Wir bezeichnen T als eine *Hilbert-Teilebene* von E, wenn T mit dieser Zwischenbeziehung eine Hilbert-Ebene ist.

Man sagt, eine metrische Teilebene T von E *gehört* zu E, wenn T der folgenden Zugehörigkeitsbedingung genügt:

(Z) *T enthält mit einem Punkt stets auch alle mit ihm inzidierenden Geraden von E.*

Die Bedingung (Z) ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Idealebene von T isomorph zu E ist (vgl. AGS § 18,5). Ist die Bedingung (Z) nicht erfüllt, so ist die Idealebene von T schon zu einer in E echt enthaltenen projektiv-metrischen Koordinatenebene (über einem Unterkörper von K) isomorph.

3. Die Idealebenen der Hilbert-Ebenen. Nach dem Haupt-Theorem aus AGS kann jede metrische Ebene als zugehörige metrische Teilebene einer projektiv-metrischen Koordinatenebene (nämlich ihrer Idealebene) über einem Körper von Charakteristik $\neq 2$ aufgefaßt werden (AGS § 6 und § 8). Für die Hilbert-Ebenen gilt nun genauer der folgende Satz:

Satz 1. *Jede Hilbert-Ebene ist darstellbar als zugehörige Hilbert-Teilebene T einer projektiv-metrischen Koordinatenebene E über einem geordneten pythagoräischen*[4]) *Körper K, in der die Orthogonalität von zwei Geraden $K\mathfrak{u}$, $K\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\mathfrak{v} = [v_1, v_2, v_3]$ durch das Verschwinden einer symmetrischen Bilinearform*

$$f(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + k u_3 v_3 \tag{1}$$

gegeben wird. Diese Darstellung ist überdies derart möglich, daß T den Nullpunkt $K(0, 0, 1)$ von E enthält.

Die Form (1) bezeichnen wir auch als *metrische Form* von E und den Koeffizienten k als *metrische Konstante*. Je nachdem $k = 0$ oder $k \neq 0$ ist, ist E eine singuläre oder eine ordinäre projektiv-metrische Ebene. Der erste Fall tritt ein, wenn die Metrik von T euklidisch ist, d. h. wenn es in T ein Rechtseit gibt, und der zweite Fall tritt ein, wenn die Metrik nichteuklidisch ist (AGS § 6, 7—10). Im Falle $k \neq 0$ ist für die Punkte von E eine Polarität erklärt: Zwei Punkte $K\mathfrak{x}$, $K\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, y_3)$ sind

[4]) Ein Körper heißt *pythagoräisch*, wenn er formalreell ist und wenn in ihm jede Summe von Quadraten ein Quadrat ist. Dafür, daß der Körper K pythagoräisch ist, ist offenbar hinreichend: Für alle $c \in K$ ist $1 + c^2$ Quadrat eines Elementes $\neq 0$ aus K.

genau dann zueinander polar, wenn die Form

$$(1') \qquad g(x, y) = k(x_1 y_1 + x_2 y_2) + x_3 y_3$$

verschwindet.

Es sind nun noch die Behauptungen des Satzes 1 zu beweisen, welche nicht mehr in dem Haupt-Theorem aus AGS enthalten sind.

Für den Beweis, daß es zu der Zwischenbeziehung von T eine Anordnung von K gibt, welche die Zwischenbeziehung in der in 2 genannten Weise festlegt, sei verwiesen auf SCHUR [6], § 4.

Die weiteren Behauptungen des Satzes ergeben sich folgendermaßen: Für die Einführung von Koordinaten in der Idealebene E von T wähle man ein Bezugsdreieck aus paarweise zueinander orthogonalen Seiten, dessen einer Eckpunkt zu T gehört. Ist die Idealebene eine singuläre projektiv-metrische Ebene, so ist die diesem Eckpunkt gegenüberliegende Seite die unendlichferne Gerade. Die metrische Form hat dann die Gestalt

$$(2) \qquad f(v, v) = \sum_1^3 k_i u_i v_i \quad \text{mit} \quad k_1, k_2 \neq 0\,.$$

Die Reihenfolge der Koordinaten ist dabei so, daß $K(0, 0, 1)$ der zu T gehörende Punkt des Bezugsdreiecks ist. Je nachdem E singulär oder ordinär ist, ist $k_3 = 0$ oder $k_3 \neq 0$.

Durch die Form (2) wird jeder Geraden Kv von E eine Quadratklasse[5]) von K zugeordnet, nämlich die Quadratklasse $\{f(v, v)\}$. Zwei nicht selbstorthogonale Geraden lassen sich dann und nur dann durch eine Bewegung von E ineinander überführen, wenn die zugeordneten Quadratklassen gleich sind (AGS § 9, Lemma 1 sowie § 10,3). Da wegen der Zugehörigkeitsbedingung (Z) alle durch den Nullpunkt gehenden Geraden, d. h. die Geraden $K[u_1, u_2, 0]$ mit $u_1, u_2 \neq 0, 0$, zu T gehören, und wegen der freien Beweglichkeit in T daher auch alle ineinander beweglich sind, liegen alle Elemente

$$k_1 u_1^2 + k_2 u_2^2 \quad \text{mit} \quad u_1, u_2 \neq 0, 0$$

in derselben Quadratklasse. Insbesondere ist $\{k_1\} = \{k_2\}$, d. h. $k_2 = c^2 k_1$ mit $c \neq 0$. Durch eine Transformation $u_1 = cu_1^*$ erreicht man, daß die beiden entsprechenden Koeffizienten im neuen Koordinatensystem gleich sind, und durch Multiplikation der Form mit einem Faktor können sie zu 1 normiert werden. Die metrische Form hat dann die Gestalt (1).

Wendet man den gleichen Schluß auf diese Form noch einmal an, so ergibt sich: Alle Elemente

$$u_1^2 + u_2^2 \quad \text{mit} \quad u_1, u_2 \neq 0, 0$$

liegen in derselben Quadratklasse, und diese ist die Quadratklasse $\{1\}$. Insbesondere sind alle diese Elemente $\neq 0$. Das besagt aber gerade: K ist ein pythagoräischer Körper.

Damit sind die restlichen Behauptungen von Satz 1 bewiesen.

4. Hilbertsche Eigentlichkeitsbereiche. Der Satz 1 gibt eine Einschränkung der projektiv-metrischen Koordinatenebenen, die als Idealebenen von Hilbert-

[5]) Unter der *Quadratklasse* eines Elementes $a \in K$ versteht man die Menge der Elemente $c^2 a$ mit $c \neq 0$, $c \in K$. Die Quadratklasse von a bezeichnen wir durch $\{a\}$.

die Punkte bzw. Geraden von E durch $K\mathfrak{x}$ bzw. $K\mathfrak{u}$, wobei $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3)$ bzw. $\mathfrak{u} = [u_1, u_2, u_3]$ Tripel homogener Punkt- bzw. Geradenkoordinaten sind. Eine Menge T von Punkten und Geraden aus E nennen wir eine *metrische Teilebene* von E, wenn T mit der in E gegebenen Inzidenz und Orthogonalität eine metrische Ebene ist.

Ist der Koordinatenkörper K geordnet und enthält T nur Punkte von der Form $K(x_1, x_2, 1)$, so kann man für die Punkte von T auf die übliche Weise eine Zwischenbeziehung definieren: Der Punkt $K\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, 1)$ liege zwischen den Punkten $K\mathfrak{b}$ und $K\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{b} = (b_1, b_2, 1)$ und $\mathfrak{c} = (c_1, c_2, 1)$, wenn eine Gleichung

$$\mathfrak{a} = b\mathfrak{b} + c\mathfrak{c} \quad \text{mit} \quad b, c \in K, \quad b, c > 0$$

besteht. Wir bezeichnen T als eine *Hilbert-Teilebene* von E, wenn T mit dieser Zwischenbeziehung eine Hilbert-Ebene ist.

Man sagt, eine metrische Teilebene T von E *gehört* zu E, wenn T der folgenden Zugehörigkeitsbedingung genügt:

(Z) *T enthält mit einem Punkt stets auch alle mit ihm inzidierenden Geraden von E.*

Die Bedingung (Z) ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Idealebene von T isomorph zu E ist (vgl. AGS § 18,5). Ist die Bedingung (Z) nicht erfüllt, so ist die Idealebene von T schon zu einer in E echt enthaltenen projektiv-metrischen Koordinatenebene (über einem Unterkörper von K) isomorph.

3. Die Idealebenen der Hilbert-Ebenen. Nach dem Haupt-Theorem aus AGS kann jede metrische Ebene als zugehörige metrische Teilebene einer projektiv-metrischen Koordinatenebene (nämlich ihrer Idealebene) über einem Körper von Charakteristik $\neq 2$ aufgefaßt werden (AGS § 6 und § 8). Für die Hilbert-Ebenen gilt nun genauer der folgende Satz:

Satz 1. *Jede Hilbert-Ebene ist darstellbar als zugehörige Hilbert-Teilebene T einer projektiv-metrischen Koordinatenebene E über einem geordneten pythagoräischen*[4]) *Körper K, in der die Orthogonalität von zwei Geraden $K\mathfrak{u}$, $K\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\mathfrak{v} = [v_1, v_2, v_3]$ durch das Verschwinden einer symmetrischen Bilinearform*

$$f(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + k u_3 v_3 \tag{1}$$

gegeben wird. Diese Darstellung ist überdies derart möglich, daß T den Nullpunkt $K(0, 0, 1)$ von E enthält.

Die Form (1) bezeichnen wir auch als *metrische Form* von E und den Koeffizienten k als *metrische Konstante*. Je nachdem $k = 0$ oder $k \neq 0$ ist, ist E eine singuläre oder eine ordinäre projektiv-metrische Ebene. Der erste Fall tritt ein, wenn die Metrik von T euklidisch ist, d. h. wenn es in T ein Rechtseit gibt, und der zweite Fall tritt ein, wenn die Metrik nichteuklidisch ist (AGS § 6, 7—10). Im Falle $k \neq 0$ ist für die Punkte von E eine Polarität erklärt: Zwei Punkte $K\mathfrak{x}$, $K\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, y_3)$ sind

[4]) Ein Körper heißt *pythagoräisch*, wenn er formalreell ist und wenn in ihm jede Summe von Quadraten ein Quadrat ist. Dafür, daß der Körper K pythagoräisch ist, ist offenbar hinreichend: Für alle $c \in K$ ist $1 + c^2$ Quadrat eines Elementes $\neq 0$ aus K.

genau dann zueinander polar, wenn die Form

$$g(x, y) = k(x_1 y_1 + x_2 y_2) + x_3 y_3 \tag{1'}$$

verschwindet.

Es sind nun noch die Behauptungen des Satzes 1 zu beweisen, welche nicht mehr in dem Haupt-Theorem aus AGS enthalten sind.

Für den Beweis, daß es zu der Zwischenbeziehung von T eine Anordnung von K gibt, welche die Zwischenbeziehung in der in 2 genannten Weise festlegt, sei verwiesen auf SCHUR [6], § 4.

Die weiteren Behauptungen des Satzes ergeben sich folgendermaßen: Für die Einführung von Koordinaten in der Idealebene E von T wähle man ein Bezugsdreieck aus paarweise zueinander orthogonalen Seiten, dessen einer Eckpunkt zu T gehört. Ist die Idealebene eine singuläre projektiv-metrische Ebene, so ist die diesem Eckpunkt gegenüberliegende Seite die unendlichferne Gerade. Die metrische Form hat dann die Gestalt

$$f(u, v) = \sum_1^3 k_i u_i v_i \quad \text{mit} \quad k_1, k_2 \neq 0 \,. \tag{2}$$

Die Reihenfolge der Koordinaten ist dabei so, daß $K(0, 0, 1)$ der zu T gehörende Punkt des Bezugsdreiecks ist. Je nachdem E singulär oder ordinär ist, ist $k_3 = 0$ oder $k_3 \neq 0$.

Durch die Form (2) wird jeder Geraden Ku von E eine Quadratklasse[5]) von K zugeordnet, nämlich die Quadratklasse $\{f(u, u)\}$. Zwei nicht selbstorthogonale Geraden lassen sich dann und nur dann durch eine Bewegung von E ineinander überführen, wenn die zugeordneten Quadratklassen gleich sind (AGS § 9, Lemma 1 sowie § 10,3). Da wegen der Zugehörigkeitsbedingung (Z) alle durch den Nullpunkt gehenden Geraden, d. h. die Geraden $K[u_1, u_2, 0]$ mit $u_1, u_2 \neq 0, 0$, zu T gehören, und wegen der freien Beweglichkeit in T daher auch alle ineinander beweglich sind, liegen alle Elemente

$$k_1 u_1^2 + k_2 u_2^2 \quad \text{mit} \quad u_1, u_2 \neq 0, 0$$

in derselben Quadratklasse. Insbesondere ist $\{k_1\} = \{k_2\}$, d. h. $k_2 = c^2 k_1$ mit $c \neq 0$. Durch eine Transformation $u_1 = c u_1^*$ erreicht man, daß die beiden entsprechenden Koeffizienten im neuen Koordinatensystem gleich sind, und durch Multiplikation der Form mit einem Faktor können sie zu 1 normiert werden. Die metrische Form hat dann die Gestalt (1).

Wendet man den gleichen Schluß auf diese Form noch einmal an, so ergibt sich: Alle Elemente

$$u_1^2 + u_2^2 \quad \text{mit} \quad u_1, u_2 \neq 0, 0$$

liegen in derselben Quadratklasse, und diese ist die Quadratklasse $\{1\}$. Insbesondere sind alle diese Elemente $\neq 0$. Das besagt aber gerade: K ist ein pythagoräischer Körper.

Damit sind die restlichen Behauptungen von Satz 1 bewiesen.

4. Hilbertsche Eigentlichkeitsbereiche. Der Satz 1 gibt eine Einschränkung der projektiv-metrischen Koordinatenebenen, die als Idealebenen von Hilbert-

[5]) Unter der *Quadratklasse* eines Elementes $a \in K$ versteht man die Menge der Elemente $c^2 a$ mit $c \neq 0$, $c \in K$. Die Quadratklasse von a bezeichnen wir durch $\{a\}$.

Ebenen auftreten können. Unsere Aufgabe ist also, in den dort angegebenen projektiv-metrischen Koordinatenebenen die zugehörigen Hilbert-Teilebenen zu bestimmen. Es genügt dabei, jeweils die Menge der Punkte einer solchen Teilebene zu kennen; eine Gerade gehört wegen der Zugehörigkeitsbedingung (Z) dann und nur dann zur Teilebene, wenn sie mit mindestens einem Punkt der Teilebene inzidiert.

Um eine kurze Bezeichnung zur Verfügung zu haben, geben wir die folgende Definition:

In einer projektiv-metrischen Koordinatenebene E von der in Satz 1 genannten Art bezeichnen wir eine Menge B von Punkten als einen *Hilbertschen Eigentlichkeitsbereich* von E, wenn die Menge T der Punkte aus B und der Geraden, die mit wenigstens einem Punkt aus B inzidieren, eine zugehörige Hilbert-Teilebene von E ist.

Wir definieren ferner auf die übliche Weise den Begriff einer konvexen Punktmenge:

In einer projektiven Koordinatenebene E über einem angeordneten Körper bezeichnen wir eine Menge B von Punkten als *konvex*, wenn B nur Punkte von der Form $K(x_1, x_2, 1)$ enthält, und wenn B mit je zwei Punkten A und B auch alle Punkte enthält, die zwischen A und B liegen.

Wegen der letzten Aussage von Satz 1 genügt es, diejenigen Hilbertschen Eigentlichkeitsbereiche zu bestimmen, die den Nullpunkt enthalten. Dabei werden wir im Falle einer ordinären projektiv-metrischen Ebene den folgenden Satz benutzen:

Satz 2. *In einer projektiv-metrischen Koordinatenebene von der in Satz 1 angegebenen Art mit einer metrischen Konstanten $k \neq 0$ sei eine Menge B von Punkten gegeben, die den Nullpunkt enthält. B ist dann und nur dann ein Hilbertscher Eigentlichkeitsbereich, wenn die Menge T der Punkte aus B und der mit mindestens einem dieser Punkte inzidierenden Geraden den folgenden Bedingungen genügt:*

1) *T enthält keine selbst-orthogonalen Geraden.*

2) *T enthält mit zwei zueinander orthogonalen Geraden deren Schnittpunkt.*

3) *T enthält mit drei kollinearen Punkten den vierten Spiegelungspunkt*[*]).

4) *T enthält mindestens zwei Punkte.*

5) *Die Punktmenge B von T ist konvex.*

6) *Ist $K\mathfrak{x}$ ein Punkt aus T, so ist $g(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ Quadrat eines Elementes $\neq 0$ aus K.*

Beweis. Die Bedingungen 1)—4) sind, wie man leicht erkennt, notwendig und hinreichend dafür, daß T eine metrische Teilebene von E ist (vgl. auch AGS § 19, Satz 1).

Ist außer den Bedingungen 1)—4) auch 5) erfüllt, so ist T eine angeordnete metrische Teilebene. Das läßt sich ohne besondere Schwierigkeiten verifizieren und soll ebenfalls nicht ausgeführt werden.

[*]) Unter dem vierten Spiegelungspunkt zu drei kollinearen Punkten A, B, C verstehen wir den Punkt D, für welchen die Spiegelungsgleichung $\sigma_A \sigma_B \sigma_C = \sigma_D$ gilt. (σ_X bezeichnet die Spiegelung der projektiv-metrischen Ebene am Punkte X, d. h. die harmonische Homologie, die den Punkt X und seine Polare als Zentrum und Achse hat.)

Wir zeigen jetzt, daß umgekehrt 5) erfüllt ist, wenn T eine Hilbert-Teilebene ist. Da T nicht elliptisch ist[7]), enthält T keinen der zum Nullpunkt polaren Punkte der Form $K(x_1, x_2, 0)$. Also sind alle Punkte aus T von der Form $K(x_1, x_2, 1)$. Es seien A, B zwei Punkte aus T und C ein Punkt aus E, der zwischen A und B liegt. Um zu beweisen, daß auch C in T liegt, wählen wir einen Punkt F aus T, der nicht auf der Geraden AB liegt und einen Punkt G aus T, der zwischen A und F liegt. Die Gerade CG gehört dann nach der Definition von T zu T. Man rechnet leicht nach, daß der Schnittpunkt der beiden Geraden CG und BF nicht zwischen B und F liegen kann. Nach dem Pasch-Axiom[8]), das für T gelten muß, gibt es dann einen Punkt aus T, der auf der Geraden CG und zwischen A und B liegt. Das kann aber nur der Punkt C sein. C gehört also zu T.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß, wenn die Bedingungen 1)—5) erfüllt sind, die Bedingung 6) notwendig und hinreichend dafür ist, daß T freie Beweglichkeit besitzt. Besitzt T freie Beweglichkeit, so lassen sich insbesondere alle Punkte von T durch eine Bewegung ineinander überführen. Dann liegen alle Elemente $g(x, x)$ mit $Kx \in T$ in derselben Quadratklasse von K (AGS § 10,3). Da T den Nullpunkt enthält, ist dies die Quadratklasse $\{1\}$. Also gilt 6).

Es sei nun umgekehrt außer den Bedingungen 1)—5) auch die Bedingung 6) erfüllt. Wir zeigen zunächst, daß je zwei Punkte aus T sich durch eine Bewegung von T ineinander überführen lassen. Es seien Kx und Ky mit $x = (x_1, x_2, 1)$ und $y = (y_1, y_2, 1)$ zwei Punkte aus T. Wegen der Bedingung 6) sind $g(x, x)$ und $g(y, y)$ Quadrate und $\neq 0$. Es gibt also ein Element $c \in K$, $c > 0$, so daß $g(x, x) = g(cy, cy)$ ist. Nach AGS § 9, Lemma 1 vertauscht die Spiegelung am Punkte $K(x + cy)$ die Punkte Kx und Ky miteinander, vorausgesetzt, daß $g(x + cy, x + cy) \neq 0$ ist. Nun liegt aber der Punkt $K(x + cy)$ zwischen den Punkten Kx und Ky; da T konvex ist, gehört er also zu T. Daher ist $g(x + cy, x + cy) \neq 0$, und Kx und Ky werden durch eine Spiegelung von T miteinander vertauscht.

Man zeigt ganz entsprechend, indem man die Tatsache, daß K pythagoräisch ist, benutzt, daß je zwei Geraden durch den Nullpunkt durch die Spiegelung an einer Geraden, die ebenfalls durch den Nullpunkt geht, miteinander vertauscht werden (vgl. den Beweis von Satz 1).

Es sei jetzt P, g ein inzidentes Paar Punkt und Gerade aus T und g' eine Gerade durch den Nullpunkt O. Nach dem Bewiesenen gibt es eine Bewegung α von T, die P in O überführt. Es sei $g\alpha$ das Bild von g bei der Bewegung α. $g\alpha$ inzidiert mit O. Die Geraden $g\alpha$ und g' werden durch die Spiegelung σ an einer Geraden durch O, die wegen der Zugehörigkeitsbedingung zu T gehört, miteinander vertauscht. Bei dieser Spiegelung bleibt O fest. Durch die Bewegung $\alpha\sigma$ von T wird also P in O und zugleich g in g' übergeführt. Wendet man diesen Schluß noch einmal in umgekehrter Richtung an, so ergibt sich, daß allgemein je zwei inzidente Paare Punkt und Gerade aus T durch eine Bewegung von T ineinander übergeführt werden können. T besitzt also freie Beweglichkeit.

---

[7]) Das folgt etwa aus dem Satz vom Außenwinkel (vgl. HILBERT [5], I. Kapitel, Satz 22). Wegen dieses Satzes kann es in T kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln geben.

[8]) HILBERT [5], Axiom II, 4.

§ 2. Ganzzahlig-einschließbare Elemente

In einem geordneten Körper K bezeichnen wir ein Element a als *ganzzahlig-einschließbar*, wenn es eine natürliche Zahl n mit $|a| < n$ gibt. ($|a|$ sei der zu der Anordnung von K gehörige Absolutbetrag von a, also das nicht negative der beiden Elemente a, $-a$.) Die ganzzahlig-einschließbaren Elemente bilden einen Ring R. Genau dann, wenn die Anordnung von K nichtarchimedisch ist, ist R ein echter Teilring von K. Die nicht in R liegenden Elemente nennt man *unendlich groß*.

R ist ein Bewertungsring von K. Mit S bezeichnen wir die Gruppe der Einheiten von R, mit P das zu R gehörige Bewertungsideal. P besteht aus der Null und den Inversen der unendlich großen Elemente, also aus den Nichteinheiten von R. Es ist dann und nur dann $a \in P$, wenn für alle natürlichen Zahlen n gilt: $|a| < \frac{1}{n}$.

Unter einem R-Modul verstehen wir eine Untergruppe M der additiven Gruppe von K mit der Eigenschaft: Aus $m \in M$ und $r \in R$ folgt $mr \in M$. Ist M ein R-Modul, so gilt

(3) *Ist* $|a| \leqq |b|$ *und ist* $b \in M$, *so ist auch* $a \in M$.

Aus $|a| \leqq |b|$ folgt nämlich $\frac{a}{b} \in R$. Wegen (3) ist die Menge aller R-Moduln von K durch die Relation des Enthaltenseins vollständig geordnet.

In einem anordenbaren Körper K bezeichnen wir ein Element a als *total ganzzahlig-einschließbar*, wenn es eine natürliche Zahl n derart gibt, daß für alle Anordnungen von K gilt: $|a| < n$. (Vgl. zu diesem Begriff auch AGS § 19,3.). Die total ganzzahlig-einschließbaren Elemente bilden einen Ring, der mit R_0 bezeichnet sei. Der Ring R_0 liegt im Durchschnitt aller Ringe von ganzzahlig-einschließbaren Elementen, die zu den verschiedenen Anordnungen von K gehören. Ein R_0-Modul ist entsprechend wie ein R-Modul definiert.

Wir betrachten jetzt mehrere Anordnungen von K. Mit R_ω bezeichnen wir den Ring der bei der Anordnung ω ganzzahlig-einschließbaren Elemente von K.

Für den folgenden Satz wird sich in § 3 eine geometrische Anwendung ergeben:

Satz 3. *Ist der Körper K pythagoräisch, so ist jeder R_0-Modul M_0 gleich dem Durchschnitt aller von M_0 erzeugten R_ω-Moduln, wobei ω alle Anordnungen von K durchläuft.*

Zum Beweis benutzen wir ein Lemma, welches für jeden anordenbaren Körper K gilt.

Wir bezeichnen eine Menge $L \subseteq K$ als *Schrankenmenge* eines Elementes $a \in K$, wenn es zu jeder Anordnung von K ein Element l aus L mit $|a| \leqq |l|$ gibt.

Lemma. *Ist L eine Schrankenmenge der Elementes $a \in K$, so gibt es eine endliche Teilmenge L' von L, die ebenfalls Schrankenmenge von a ist.*

Den *Beweis* führen wir indirekt. Wir nehmen an, daß es zu jeder endlichen Teilmenge L' von L eine Anordnung von K gibt, so daß

$$|l| < |a| \quad \text{für alle} \quad l \in L'$$

ist, und zeigen, daß es dann auch eine Anordnung von K gibt, bei der

(4) $$|l| < |a| \quad \text{für alle} \quad l \in L$$

ist.

Es sei U die Menge derjenigen Elemente von K, die man erhält, wenn man von Null verschiedene Quadrate und Elemente der Form

(5) $$a^2 - l^2 \quad \text{mit} \quad l \in L$$

in endlicher Anzahl durch Addition und Multiplikation miteinander verknüpft. Diese Menge U hat die folgenden Eigenschaften:

a) *U ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation.*

b) *U enthält nicht die Null.*

Ist nämlich $u \in U$, so gibt es nach unserer Annahme eine Anordnung von K, bei der die endlich vielen bei der Bildung von u beteiligten Elemente (5) positiv sind, bei der also auch $u > 0$ ist.

c) *U enthält alle von Null verschiedenen Quadrate von K.*

Da U die Eigenschaften a)—c) besitzt, läßt U sich zu einem Positivbereich von K erweitern[9]). Bei der zugehörigen Anordnung sind alle Elemente (5) positiv, es gilt also (4).

Beweis von Satz 3. M_ω bezeichne den von M_0 erzeugten R_ω-Modul. Das Element m liege im Durchschnitt der sämtlichen M_ω. Es ist zu zeigen, daß $m \in M_0$ ist. Wir zeigen zunächst, daß M_0 eine Schrankenmenge von m ist. Dazu betrachten wir eine feste Anordnung ω von K. Wegen $m \in M_\omega$ besitzt m eine Darstellung

$$m = r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n \quad \text{mit} \quad r_i \in R_\omega, m_i \in M_0 .$$

Ist $r_j m_j$ der absolut größte unter den Summanden der rechten Seite, und ist k eine natürliche Zahl mit $|r_j| < k$, so folgt

$$|m| \leqq |n k m_j| .$$

Darin ist $n k m_j$ ein Element aus M_0. m besitzt also eine Schranke aus M_0.

Da M_0 eine Schrankenmenge von m ist, enthält M_0 nach dem Lemma eine endliche Schrankenmenge $l_1, l_2, \ldots, l_s$ von m. Weil K ein pythagoräischer Körper ist, gibt es in K ein Element l mit

$$l^2 = l_1^2 + \cdots + l_s^2 .$$

Dann ist für jede Anordnung von K

$$|m| \leqq |l|$$

oder

$$\left|\frac{m}{l}\right| \leqq 1 ,$$

also $\frac{m}{l} \in R_0$. Wir schließen nun aus der Identität

$$\sqrt{l_1^2 + l_2^2} = \sqrt{\frac{l_1^2}{l_1^2 + l_2^2}}\, l_1 + \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2 + l_2^2}}\, l_2$$

[9]) Vgl. Bourbaki [3], Chap. VI, § 2,3. Die Null zählen wir hier nicht zum Positivbereich.

und aus der leicht ersichtlichen Tatsache, daß hier die beiden Wurzeln auf der rechten Seite in R_0 liegen, auf $\sqrt{l_1^2 + l_2^2} \in M_0$. Durch Wiederholung dieses Schlusses erhält man $l \in M_0$. Wegen $\frac{m}{l} \in R_0$ ist also auch $m \in M_0$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Als einfache Folgerung aus dem Lemma erhält man ferner:

Satz 4. *Ist K ein anordenbarer Körper und ist das Element $a \in K$ bei jeder Anordnung von K ganzzahlig-einschließbar, so ist a total ganzzahlig-einschließbar.*

§ 3. Die Hilbert-Ebenen mit euklidischer Metrik

Um die Hilbert-Ebenen mit euklidischer Metrik algebraisch zu charakterisieren, müssen wir in den in Satz 1 angegebenen projektiv-metrischen Koordinatenebenen, deren metrische Konstante $k = 0$ ist, die Hilbertschen Eigentlichkeitsbereiche, welche den Nullpunkt enthalten, bestimmen.

Es sei nun E eine solche projektiv-metrische Koordinatenebene mit $k = 0$. Wir verwenden die Bezeichnungen R und R_0 in der in § 2 angegebenen Bedeutung, bezogen auf den Koordinatenkörper K von E.

Fragen wir zunächst allgemeiner nach den metrischen Teilebenen von E, die den Nullpunkt enthalten, so gilt nach AGS § 19, Satz 3, Satz 6 (vgl. auch Satz 7) folgendes:

Ist M ein R_0-Modul $\neq (0)$, so bilden die Punkte

$$K(x_1, x_2, 1) \quad \textit{mit} \quad x_1, x_2 \in M$$

und die mit ihnen inzidierenden Geraden eine zugehörige metrische Teilebene von E, und man erhält alle zugehörigen metrischen Teilebenen, die den Nullpunkt enthalten, auf diese Weise aus den R_0-Moduln von K. Alle diese metrischen Teilebenen besitzen freie Beweglichkeit.

Hiermit erhält man nun leicht die Hilbert-Teilebenen bzw. -Eigentlichkeitsbereiche:

Theorem 1. *Es sei E eine projektiv-metrische Koordinatenebene von der in Satz 1 angegebenen Art mit der metrischen Konstanten $k = 0$. Ist M ein R-Modul $\neq (0)$, so bilden die Punkte*

$$K(x_1, x_2, 1) \quad \textit{mit} \quad x_1, x_2 \in M \tag{6}$$

einen Hilbertschen Eigentlichkeitsbereich von E, und man erhält alle Hilbertschen Eigentlichkeitsbereiche, die den Nullpunkt enthalten, auf diese Weise aus den R-Moduln von K.

Beweis. Wir benutzen die Tatsache, daß eine metrische Teilebene T von E dann und nur dann eine geordnete metrische Teilebene ist, wenn die Punktmenge von T konvex ist [vgl. Satz 2, 5)]. Wegen des vorher angeführten Ergebnisses aus AGS brauchen wir dann nur noch zu zeigen: Für einen R_0-Modul M ist die Menge der Punkte (6) dann und nur dann konvex, wenn M ein R-Modul ist.

Die Menge der Punkte (6) sei konvex. Ist $r \in R$ und $x \in M$, so gibt es eine natürliche Zahl n mit $|r| < n$, also $|r x| < |n x|$. Es ist $n x \in M$. Wegen der

Konvexität folgt $rx \in M$. M ist also ein R-Modul. Ist umgekehrt M ein R-Modul, so gilt [vgl. (3)]:

(7) *Aus* $a \leqq b \leqq c$ *und* $a, c \in M$ *folgt* $b \in M$.

Aus (7) erhält man ohne Mühe die Konvexität der Menge der Punkte (6). Damit ist das Theorem 1 bewiesen.

Der Satz 3 aus § 2 liefert nun offenbar zu dem Theorem 1 das folgende Korollar:

Korollar. *Es sei E eine projektiv-metrische Koordinatenebene von der in Satz 1 angegebenen Art mit der metrischen Konstanten $k = 0$ und T eine zugehörige metrische Teilebene von E. T ist gleich dem Durchschnitt der Hilbert-Teilebenen, die T enthalten.*

§ 4. Die Hilbert-Ebenen mit nichteuklidischer Metrik

Wir wollen jetzt die Hilbert-Ebenen mit nichteuklidischer Metrik bestimmen. Nach Satz 1 müssen wir dazu in den dort angegebenen projektiv-metrischen Koordinatenebenen mit einer metrischen Konstanten $k \neq 0$ die Hilbertschen Eigentlichkeitsbereiche, welche den Nullpunkt enthalten, bestimmen.

Wir denken uns für das Folgende eine solche projektiv-metrische Koordinatenebene E fest gegeben. Die Bezeichnungen R, S, P verwenden wir in der in §2 angegebenen Bedeutung, bezogen auf den Koordinatenkörper K von E.

Als erstes werden wir zwei spezielle Klassen von Hilbertschen Eigentlichkeitsbereichen angeben (Theorem 2 und Theorem 3). Anschließend zeigen wir dann, daß wir damit bereits alle Hilbertschen Eigentlichkeitsbereiche erhalten haben (Theorem 4).

Theorem 2. *Es sei E eine projektiv-metrische Koordinatenebene von der in Satz 1 angegebenen Art mit einer metrischen Konstanten $k \neq 0$. Ist M ein R-Modul $\neq (0)$ mit den Eigenschaften*

(a) *Ist $x \in M$, so ist $kx^2 \in P$,*

(b) *Ist $x \in M$, so ist $1 + kx^2$ Quadrat eines Elementes aus K,*

so bilden die Punkte

(8) $K(x_1, x_2, 1)$ *mit* $x_1, x_2 \in M$

einen Hilbertschen Eigentlichkeitsbereich von E.

Beweis. Es sei — unter den Voraussetzungen von Theorem 2 — T die Menge der Punkte von der Form (8) und der Geraden, die mit mindestens einem dieser Punkte inzidieren. Um Satz 2 anzuwenden, zeigen wir, daß T den dort angegebenen Bedingungen 1)—6) genügt.

Wir bemerken zunächst, daß die Menge der Punkte (8) offenbar identisch ist mit der Menge der Punkte

(9) $K(x_1, x_2, x_3)$ mit $x_1, x_2 \in M, x_3 \in S$.

Um die Geraden von T zu charakterisieren, definieren wir: Ein Tripel $[u_1, u_2, u_3]$ heiße *normiert*, wenn $u_1, u_2 \in R$ ist und mindestens eines der beiden Elemente u_1, u_2 in S liegt. Es gilt dann:

Eine Gerade gehört dann und nur dann zu T, wenn sie durch ein Tripel $[u_1, u_2, u_3]$ mit den Eigenschaften

(10) $$[u_1, u_2, u_3] \text{ ist normiert und } u_3 \in M$$

dargestellt werden kann.

Beweis. Gehört die Gerade $K\,u$ mit $u = [u_1, u_2, u_3]$ zu T, so gibt es einen Punkt von der Form (8), der mit der Geraden $K\,u$ inzidiert. Es ist also

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 = 0\,.$$

Dann kann nicht $u_1 = u_2 = 0$ sein, da sonst auch $u_3 = 0$ wäre, was nicht möglich ist. Es sei etwa $|u_1| \geqq |u_2|$. Dann ist $u_1 \neq 0$. Dividiert man das Tripel u durch u_1, so ergibt sich ein normiertes Tripel $u' = [u_1', u_2', u_3']$, welches auch die Gerade $K\,u$ darstellt, für welches also

$$u_1' x_1 + u_2' x_2 + u_3' = 0$$

gilt. Wegen $x_1, x_2 \in M$ folgt hieraus $u_3' \in M$. u' hat also die Eigenschaften (10).

Hat umgekehrt das Tripel $u = [u_1, u_2, u_3]$ die Eigenschaften (10), und ist demgemäß etwa $u_1 \in S$, so ist $K(-u_3, 0, u_1)$ ein Punkt von der Form (9), der mit der Geraden $K\,u$ inzidiert. Die Gerade $K\,u$ gehört also zu T.

Wir zeigen jetzt, daß T den Bedingungen 1)—6) aus Satz 2 genügt.

Zu 1): Es sei $K\,u$ eine Gerade aus T. Wir dürfen annehmen, daß das Tripel u die Eigenschaften (10) hat. Da M der Bedingung (a) des Theorems 2 genügt, ist $k u_3^2 \in P$, also

$$f(u, u) \equiv u_1^2 + u_2^2 \bmod P\,.$$

Daraus folgt $f(u, u) \in S$. Wäre nämlich $u_1^2 + u_2^2 \in P$, so wäre erst recht $u_1^2, u_2^2 \in P$ und damit auch $u_1, u_2 \in P$, im Widerspruch dazu, daß u normiert ist. Wegen $f(u, u) \in S$ ist $f(u, u) \neq 0$. Die Gerade $K\,u$ ist also nicht selbstorthogonal.

Zu 2): Es seien $K\,u$, $K\,v$ zwei zueinander orthogonale Geraden aus T. Wir können annehmen, daß die Tripel u, v die Eigenschaften (10) haben. Der Schnittpunkt von $K\,u$ und $K\,v$ wird dargestellt durch das Tripel

(11) $$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)$$

Wegen $u_3, v_3 \in M$ und weil u und v normiert sind, folgt $x_1, x_2 \in M$. Zu zeigen bleibt, daß $x_3 \in S$ ist.

Wegen der Bedingung (a) des Theorems 2 ist

$$k u_3^2,\, k v_3^2 \in P\,.$$

Wegen

$$|k u_3 v_3| \leqq \operatorname{Max}(|k u_3^2|, |k v_3^2|)$$

ist also auch $k u_3 v_3 \in P$ und daher

$$f(u, v) \equiv u_1 v_1 + u_2 v_2 \bmod P\,.$$

Da $K\,u$ und $K\,v$ zueinander orthogonal sind, ist $f(u, v) = 0$, also

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 \equiv 0 \bmod P\,.$$

Wäre nun $x_3 \notin S$, also

$$x_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \equiv 0 \bmod P\,,$$

so wären die Paare u_1, u_2 und v_1, v_2 mod P zueinander proportional, etwa $u_1 \equiv c v_1$, $u_2 \equiv c v_2$ mod P mit $c \in R$. Daraus folgte

$$u_1^2 + u_2^2 \equiv c(u_1 v_1 + u_2 v_2) \equiv 0 \bmod P\,.$$

Das widerspricht der Tatsache, daß u normiert ist [vgl. den Beweis von Bedingung 1)].

Kx ist also ein Punkt von der Form (9) und gehört daher zu T.

Zu 3): Es seien Ka, Kb, Kc kollineare Punkte aus T. Wir können annehmen, daß die Tripel a, b, c von der in (8) angegebenen Form sind. Der vierte Spiegelungspunkt wird dargestellt durch das Tripel

$$d = (d_1, d_2, d_3) = g(b, c)a - g(a, c)b + g(a, b)c \tag{12}$$

(AGS § 8, Satz 6). Dabei ist $g(a, b)$ die metrische Form (1'). Die Bedingung (a) des Theorems 2 liefert

$$ka_1b_1,\ ka_2b_2 \in P$$

[vgl. den entsprechenden Schluß unter 2)]. Hieraus folgt

$$g(a, b) \in R, \quad g(a, b) \equiv 1 \bmod P\,.$$

Ferner erhält man die entsprechenden Beziehungen für $g(a, c)$, $g(b, c)$. Damit ergibt sich aus (12):

$$d_1, d_2 \in M\,,$$

sowie $d_3 \in R$, $d_3 \equiv 1$ mod P, also $d_3 \in S$. Der Punkt Kd ist also von der Form (9) und gehört daher zu T.

Zu 4): Nach der Annahme des Theorems 2 enthält M ein Element $x \neq 0$. Dann sind $K(0, 0, 1)$ und $K(x, 0, 1)$ zwei voneinander verschiedene Punkte aus T.

Zu 5): Daß die Menge der Punkte (8) konvex ist, folgt aus der Tatsache, daß M ein R-Modul ist [vgl. § 3, (7)].

Zu 6): Ist Kx mit $x = (x_1, x_2, 1)$ ein Punkt von der Form (8), so ist mit $x_1, x_2 \in M$ auch $|x_1| + |x_2| \in M$. Wegen

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqq |x_1| + |x_2|$$

schließt man mit Hilfe von (3) auf $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \in M$. Die Bedingung (b) des Theorems 2 ergibt dann, daß

$$g(x, x) = k(x_1^2 + x_2^2) + 1$$

ein Quadrat eines Elementes aus K ist. Wegen $k(x_1^2 + x_2^2) \in P$ [Bedingung (a) des Theorems 2] ist $g(x, x) \neq 0$.

Wegen Satz 2 ist hiermit das Theorem 2 bewiesen.

Für die zweite Klasse von Hilbertschen Eigentlichkeitsbereichen, die wir zu betrachten haben, machen wir die Voraussetzung, daß die metrische Konstante $k < 0$ ist. Ist $-k$ Quadrat in K, so gibt es in E selbstpolare Punkte, also Punkte Kx mit $g(x, x) = 0$. Die Menge dieser selbstpolaren Punkte bezeichnet

man dann als den Fundamentalkegelschnitt von E. Die „inneren" Punkte des Fundamentalkegelschnittes sind die Punkte Kx mit $g(x, x) > 0$. Ist dabei $x = (x_1, x_2, 1)$, so kann man sich die Größe $g(x, x)$ als „Abstand" des Punktes Kx von dem Fundamentalkegelschnitt veranschaulichen. Ist $-k$ nicht Quadrat in K, d. h. besitzt E keinen Fundamentalkegelschnitt, so ist diese Veranschaulichung auch noch möglich, wenn man die erweiterte projektiv-metrische Koordinatenebene betrachtet, die entsteht, wenn man $\sqrt{-k}$ zum Körper K adjungiert; in dieser erweiterten projektiv-metrischen Ebene gibt es dann ja wieder einen Fundamentalkegelschnitt, und die Anordnung ist auf die erweiterte projektiv-metrische Ebene fortsetzbar.

Wir betrachten in dem folgenden Theorem 3 nun solche inneren Punkte des Fundamentalkegelschnittes, für die der Abstand vom Fundamentalkegelschnitt eine gewisse Größenordnung nicht unterschreitet, genauer: für die dieser Abstand nicht in einem gewissen Primideal von R liegt. Diese Punkte bilden dann einen Hilbertschen Eigentlichkeitsbereich.

Theorem 3. *Es sei E eine projektiv-metrische Koordinatenebene von der in Satz 1 angegebenen Art mit einer metrischen Konstanten $k < 0$. Ist Q ein Primideal*[10]) *$\neq R$ von R mit der Eigenschaft*

(c) *Ist $1 + kx^2 > 0$ und $1 + kx^2 \notin Q$, so ist $1 + kx^2$ Quadrat eines Elementes aus K,*

so bilden die Punkte

(13) $$Kx \quad \text{mit} \quad x = (x_1, x_2, 1), \quad g(x, x) > 0, \quad g(x, x) \notin Q$$

einen Hilbertschen Eigentlichkeitsbereich von E.

Beweis. Es sei — unter den Voraussetzungen von Theorem 3 — T die Menge der Punkte (13) und der mit mindestens einem dieser Punkte inzidierenden Geraden. Wir geben als erstes die folgende Charakterisierung der Geraden von T:

Eine Gerade gehört dann und nur dann zu T, wenn sie durch ein Tripel $u = [u_1, u_2, u_3]$ mit

(14) $$u_1^2 + u_2^2 = 1$$

und

(15) $$f(u, u) > 0\,, \quad f(u, u) \notin Q$$

dargestellt werden kann.

Beweis. Es sei Ku eine Gerade aus T. Es gibt also einen Punkt von der Form (13), der mit Ku inzidiert, d. h. es ist

(16) $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 = 0\,.$$

Wir dürfen annehmen, daß das Tripel u der Bedingung (14) genügt. Wegen (16) kann nämlich nicht $u_1 = u_2 = 0$ sein, so daß man das Tripel u nötigenfalls durch $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ dividieren kann. Wir benutzen jetzt die Identität

(17) $$(u_1^2 + u_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = (u_1 x_2 - u_2 x_1)^2 + (u_1 x_1 + u_2 x_2)^2\,.$$

[10]) Das Nullideal ist hierbei zugelassen. Ist $k = -1$, so erhält man für $Q = (0)$ ein Kleinsches Modell der hyperbolischen Geometrie.

Wegen (14) und (16) erhält man aus (17):

$$g(x, x) = k(x_1^2 + x_2^2) + 1 = k[(u_1 x_2 - u_2 x_1)^2 + u_3^2] + 1$$
$$= k(u_1 x_2 - u_2 x_1)^2 + f(u, u)\,.$$

Wegen $k < 0$ ist also

$$g(x, x) \leqq f(u, u)\,.$$

Hieraus schließt man wegen $g(x, x) > 0$ auf $f(u, u) > 0$ und wegen $g(x, x) \notin Q$ mit Hilfe von (3) auf $f(u, u) \notin Q$. Das Tripel u genügt also den Bedingungen (15).

Es sei nun umgekehrt u ein Tripel, welches den Bedingungen (14) und (15) genügt. Der Punkt Kx mit

$$x = (-u_3 u_1, -u_3 u_2, 1)$$

inzidiert dann mit der Geraden Ku und es ist

$$g(x, x) = k u_3^2 + 1 = f(u, u)\,.$$

Hieraus schließt man, weil u den Bedingungen (15) genügt, daß der Punkt Kx von der Form (13) ist, also zu T gehört. Daher gehört auch die Gerade Ku zu T.

Wir zeigen jetzt, daß T den Bedingungen 1)—6) aus Satz 2 genügt.

Zu 1): Für eine Gerade Ku aus T ist, wie eben gezeigt wurde, $f(u, u) > 0$.

Zu 2): Es seien Ku, Kv zwei zueinander orthogonale Geraden aus T. Wir können also annehmen, daß die Tripel $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$ den Bedingungen (14) und (15) genügen. Der Schnittpunkt der beiden Geraden wird durch das Tripel (11) dargestellt. Es gilt dann die Lagrangesche Identität

$$g(x, x) = f(u, u)\, f(v, v) - f^2(u, v)\,.$$

Wegen der Orthogonalität von Ku, Kv ist hier $f(u, v) = 0$. Man kann daher auf $g(x, x) > 0$ schließen und daraus, wegen $k < 0$, auf $x_3 \neq 0$. Der Schnittpunkt wird also auch durch das Tripel $x' = x_3^{-1} x$ dargestellt, und es ist

$$x_3^2\, g(x', x') = f(u, u)\, f(v, v)\,. \tag{18}$$

Wir zeigen nun, daß $x_3^2 \in R$ ist. Mit Hilfe der Identität (17) erhält man

$$x_3^2 = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 = (u_1^2 + u_2^2)\,(v_1^2 + v_1^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2\,.$$

Da u und v der Bedingung (14) genügen und da wegen der Orthogonalität von Ku und Kv

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = -k u_3 v_3$$

ist, ergibt sich

$$x_3^2 = 1 - (k u_3 v_3)^2\,. \tag{19}$$

Wegen $f(u, u) = 1 + k u_3^2 > 0$ ist $|k u_3^2| < 1$. Ebenso ist $|k v_3^2| < 1$. Also ist auch $|k u_3 v_3| < 1$, also $k u_3 v_3 \in R$. Aus (19) folgt daher $x_3^2 \in R$.

Wäre nun $g(x', x') \in Q$, so wäre wegen $x_3^2 \in R$ nach (18) auch

$$f(u, u)\, f(v, v) \in Q\,.$$

Da Q ein Primideal ist, müßte dann einer der beiden Faktoren in Q liegen, was nicht der Fall ist. Also ist $g(x', x') \notin Q$. Der Schnittpunkt Kx' ist also ein Punkt von der Form (13) und gehört daher zu T.

Zu 3): Es seien Ka, Kb, Kc drei kollineare Punkte aus T. Wir können also annehmen, daß die Tripel $a = (a_1, a_2, 1)$, $b = (b_1, b_2, 1)$, $c = (c_1, c_2, 1)$ den Bedingungen aus (13) genügen. Der vierte Spiegelungspunkt wird dargestellt durch das Tripel (12); dabei ist

$$g(d, d) = g(a, a)\, g(b, b)\, g(c, c)$$

(AGS § 8, Satz 6). Aus der letzten Beziehung schließt man auf $g(d, d) > 0$ und daraus, wegen $k < 0$, auf $d_3 \neq 0$. Der vierte Spiegelungspunkt wird also auch durch das Tripel $d' = d_3^{-1} d$ dargestellt. Dann ist

$$d_3^2\, g(d', d') = g(a, a)\, g(b, b)\, g(c, c)\,. \tag{20}$$

Wir zeigen nun, daß $d_3 \in R$ ist: Wegen $g(a, a) = k(a_1^2 + a_2^2) + 1 > 0$ ist $|ka_1^2| < 1$, und ebenso $|kb_1^2| < 1$. Daher ist $|ka_1 b_1| < 1$, und ebenso $|ka_2 b_2| < 1$. Daraus folgt $g(a, b) \in R$, und entsprechend: $g(b, c), g(a, c) \in R$. Aus (12) folgt also: $d_3 \in R$.

Wäre nun $g(d', d') \in Q$, so wäre wegen $d_3 \in R$ nach (20) auch

$$g(a, a)\, g(b, b)\, g(c, c) \in Q\,.$$

Da Q ein Primideal ist, müßte dann einer der drei Faktoren in Q liegen, was nicht der Fall ist. Also ist $g(d', d') \notin Q$. Der vierte Spiegelungspunkt Kd' ist also von der Form (13) und gehört daher zu T.

Zu 4): Es sei $x \neq 0$ ein Element aus K mit $x^2 < \frac{1}{2|k|}$. Dann ist $1 + kx^2 > \frac{1}{2}$, also $1 + kx^2 \notin P$. Wegen $Q \neq R$ ist $Q \subsetneqq P$, also $1 + kx^2 \notin Q$. Der Punkt $K(x, 0, 1)$ gehört also zu T. Außerdem gehört der Nullpunkt $K(0, 0, 1)$ zu T.

Zu 5): Es seien Ka, Kb zwei Punkte aus T, und Kc ein Punkt, der zwischen Ka und Kb liegt. Es sei

$$a = (a_1, a_2, 1)\,, \quad b = (b_1, b_2, 1)\,, \quad c = (c_1, c_2, 1)\,.$$

Dann ist also

$$c = \alpha a + \beta b \quad \text{mit} \quad \alpha + \beta = 1,\ \ \alpha, \beta > 0\,.$$

Daraus folgt

$$g(c, c) = \alpha^2 g(a, a) + \beta^2 g(b, b) + 2\alpha\beta\, g(a, b)\,. \tag{21}$$

Nun ist aber

$$2g(a, b) = g(a, a) + g(b, b) - g(a - b, a - b)\,.$$

Darin ist

$$g(a - b, a - b) = k[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2] \leqq 0\,.$$

Es folgt also, wenn wir etwa $g(a, a) \leqq g(b, b)$ annehmen,

$$g(a, b) \geqq g(a, a)\,.$$

Daher erhalten wir aus (21):

$$g(c, c) \geqq (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta)\, g(a, a) = g(a, a)\,.$$

Hieraus folgt $g(c, c) > 0$ und $g(c, c) \notin Q$, da das Entsprechende für $g(a, a)$ gilt. Der Punkt Kc gehört also zu T.

Zu 6): Die Behauptung ergibt sich direkt aus der Bedingung (c) des Theorems 3.

Damit ist Theorem 3 bewiesen.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß umgekehrt auch jeder Hilbertsche Eigentlichkeitsbereich, der den Nullpunkt enthält, von der in Theorem 2 oder von der in Theorem 3 angegebenen Form ist. Es gilt:

Theorem 4. *Es sei E eine projektiv-metrische Koordinatenebene von der in Satz 1 angegebenen Art mit einer metrischen Konstanten $k \neq 0$ und B ein Hilbertscher Eigentlichkeitsbereich von E, der den Nullpunkt enthält. Dann gibt es einen R-Modul $M \neq (0)$ mit den Eigenschaften* (a), (b), *so daß B aus den Punkten* (8) *besteht, oder es gibt ein Primideal $Q \neq R$ von R mit der Eigenschaft* (c), *so daß B aus den Punkten* (13) *besteht. Ist $k > 0$ oder ist k nicht von der Form sa^2 mit $s \in S$, so ist B immer auf die erstgenannte Art darstellbar.*

Zum *Beweis* nehmen wir an, daß es in E einen Hilbertschen Eigentlichkeitsbereich B gibt, der den Nullpunkt enthält. Aus dieser Annahme beweisen wir die folgenden Aussagen (i)—(vi). Wir benutzen dabei die Spiegelungsformel (AGS § 8,3):

$$x' = -x + 2\,\frac{g(x, y)}{g(y, y)}\,y\,. \tag{22}$$

Darin bedeuten x, x', y Tripel von Punktkoordinaten, und zwar ist Kx' der Bildpunkt des Punktes Kx bei der Spiegelung am Punkte Ky (vgl. Fußnote 6).

Nach Satz 2, 5) sind alle Punkte aus B von der Form $K(x_1, x_2, 1)$. Mit M bezeichnen wir die Menge der Elemente $x \in K$, für die $K(x, 0, 1)$ in B liegt. Es gilt nun:

(i) *Ist $|x| \leqq |y|$, so liegt mit y auch x in M.*

Beweis. Da die Spiegelung am Nullpunkt die Punkte $K(x, 0, 1)$ und $K(-x, 0, 1)$ miteinander vertauscht, ist dann und nur dann $x \in M$, wenn $|x| \in M$ ist. Entsprechendes gilt für y. Die Behauptung folgt jetzt aus der Tatsache, daß B konvex ist.

(ii) *Ist $x \in M$, so ist $|kx^2| < 1$.*

Beweis. Wäre $|kx^2| \geqq 1$, so wäre $\frac{1}{|kx|} \leqq |x|$. Mit (i) folgte daraus: $-\frac{1}{kx} \in M$. Der Punkt

$$K\left(-\frac{1}{kx}, 0, 1\right)$$

läge also in B. Dieser Punkt ist aber polar zum Punkte $K(x, 0, 1)$, welcher ebenfalls in B liegt. Da die durch B definierte Teilebene nicht elliptisch ist (vgl. Fußnote 7), kann B aber nicht zwei zueinander polare Punkte enthalten. Das ist ein Widerspruch. Also gilt (ii).

(iii) *Aus $x \in M$ folgt $\frac{2x}{1 - kx^2} \in M$.*

Die Spiegelung am Punkte $K(x, 0, 1)$ führt nämlich den Nullpunkt in den Punkt

$$K\left(\frac{2x}{1 - kx^2}, 0, 1\right)$$

über. (Wegen (ii) ist $1 - kx^2 \neq 0$.)

(iv) *Der Punkt $K(x_1, x_2, 1)$ gehört dann und nur dann zu B, wenn $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \in M$ ist.*

Beweis. Die Drehungen der projektiv-metrischen Ebene E um den Nullpunkt[11]) werden dargestellt durch solche orthogonalen Transformationen des durch die Form (1′) metrisierten Vektorraumes der Tripel $x = (x_1, x_2, x_3)$, die das Tripel (0, 0, 1) und den zu diesem Tripel orthogonalen Teilraum der Tripel $(x_1, x_2, 0)$ fest lassen. Jedes Tripel der Form $x = (x_1, x_2, 1)$ geht bei einer solchen Transformation daher über in ein Tripel $x' = (x_1', x_2', 1)$. Wegen der freien Beweglichkeit in der durch den Eigentlichkeitsbereich B gegebenen Teilebene kann jede Gerade durch den Nullpunkt durch eine Drehung um den Nullpunkt in die Gerade $K[0, 1, 0]$ übergeführt werden. Daher kann auch jeder Punkt von E durch eine solche Drehung in einen Punkt der Geraden $K[0, 1, 0]$ übergeführt werden. Man kann also die Drehung so wählen, daß das Tripel $x = (x_1, x_2, 1)$ durch die zugehörige orthogonale Transformation in ein Tripel der Form $x' = (x_1', 0, 1)$ übergeführt wird. Da $g(x, x) = g(x', x')$ ist, folgt

$$|x_1'| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,.$$

Nun liegt Kx dann und nur dann in B, wenn Kx' in B liegt, d. h. wenn $x_1' \in M$ ist. Wegen (i) ist das gleichwertig mit $|x_1'| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \in M$. Damit ist (iv) bewiesen.

(v) *Ist $kx^2 \in P$ für alle $x \in M$, so ist M ein R-Modul $\neq (0)$ mit den Eigenschaften* (a), (b) *und B besteht aus den Punkten von der Form* (8).

Beweis. Es sei $kx^2 \in P$ für alle $x \in M$. Dann ist für alle natürlichen Zahlen n

$$|kx^2| < \frac{1}{n} \quad \text{für alle} \quad x \in M\,.$$

Setzt man hier $n = 3$, so folgt aus der entstehenden Ungleichung die Beziehung

$$\frac{3}{2}|x| \leqq \left|\frac{2x}{1 - kx^2}\right| \quad \text{für alle} \quad x \in M\,.$$

Daraus schließt man mit Hilfe von (i) und (iii), daß mit x stets auch $\frac{3}{2}x$ in M liegt. Durch Wiederholung des Schlusses ergibt sich, daß mit x stets auch $\left(\frac{3}{2}\right)^n x$ in M liegt, und zwar für jede natürliche Zahl n. Daraus folgt mit (i) weiter, daß mit x auch nx in M liegt, für jede natürliche Zahl n. Wegen

$$|x - y| \leqq 2\,\mathrm{Max}(|x|, |y|)$$

ergibt sich mit (i) weiter, daß mit x, y auch $x - y$ in M liegt. Ist schließlich $r \in R$ und $x \in M$, so gibt es eine natürliche Zahl n mit $|r| < n$, also $|rx| \leqq |nx|$. Daraus folgt $rx \in M$. M ist also ein R-Modul. Da B nicht nur aus einem Punkt besteht, ist $M \neq (0)$. M genügt der Bedingung (a), und (b) folgt aus Satz 2, 6). Die letzte Behauptung von (v) ergibt sich aus (iv). Wegen

$$|x_1|, |x_2| \leqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqq |x_1| + |x_2|$$

ist nämlich dann und nur dann $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \in M$, wenn $x_1, x_2 \in M$ ist.

---

[11]) Das heißt, die Produkte von zwei Spiegelungen an Geraden, die durch den Nullpunkt gehen. Zu den folgenden Betrachtungen vgl. AGS § 8.

Wir können jetzt die letzte Behauptung des Theorems 4 beweisen. Ist $k > 0$, so ist wegen (ii) für alle $x \in M$:

$$0 < 1 - kx^2 \leqq 1 .$$

Daraus folgt

$$|2x| \leqq \left|\frac{2x}{1 - kx^2}\right|.$$

Hieraus schließt man mit (i) und (iii) auf $2x \in M$, und weiter auf $2^n x \in M$ für jede natürliche Zahl n. Wegen (ii) ist dann $|k 2^{2n} x^2| < 1$ oder

$$|kx^2| < \frac{1}{2^{2n}}$$

für jede natürliche Zahl n. Das bedeutet: $kx^2 \in P$. Die Voraussetzung von (v) ist also erfüllt; B kann daher durch einen R-Modul auf die dort genannte Art dargestellt werden.

Ist andererseits k nicht von der Form sa^2 mit $s \in S$, so liegt kx^2 nicht in S. Ist $x \in M$, so ist aber wegen (ii): $kx^2 \in R$. Also ist $kx^2 \in P$. Die Voraussetzung von (v) ist also auch in diesem Fall erfüllt und erlaubt den gleichen Schluß wie eben. Damit ist die letzte Behauptung des Theorems 4 bewiesen.

Wegen (v) haben wir nun nur noch für den Fall, daß es ein Element $x \in M$ mit $kx^2 \notin P$ gibt, etwas zu beweisen. In diesem Fall muß, wie wir eben sahen, $k < 0$ sein. Wir wollen zeigen, daß B unter diesen Voraussetzungen auf die in Theorem 3 angegebene Art darstellbar ist.

Die Menge derjenigen Elemente $a \in K$, für die

$$|a| < 1 + kx^2 \quad \text{für alle} \quad x \in M$$

gilt, sei mit Q bezeichnet. Dann ist offenbar für $x \in M$

$$(23) \qquad 1 + kx^2 > 0 \quad \text{und} \quad 1 + kx^2 \notin Q$$

und es gilt auch die Umkehrung hiervon; genügt das Element x den Bedingungen (23), so gibt es nämlich ein Element $y \in M$ mit

$$1 + ky^2 \leqq 1 + kx^2.$$

Wegen $k < 0$ schließt man mit (i) hieraus auf $x \in M$.

Mit Hilfe von (iv) erhält man jetzt:

Der Punkt $K(x_1, x_2, 1)$ *gehört dann und nur dann zu* B, *wenn* $k(x_1^2 + x_2^2) + 1 > 0$ *und* $k(x_1^2 + x_2^2) + 1 \notin Q$ *ist.*

Das Theorem 4 wird also bewiesen sein, wenn wir gezeigt haben, daß Q ein Primideal $\neq R$ von R ist. [Die Bedingung (c) ergibt sich aus Satz 2, 6).]

Zu diesem Zweck zeigen wir als erstes:

(vi) *Ist* $k < 0$, *so gilt: Aus* $a, b \notin Q$ *folgt* $ab \notin Q$.

Beweis. Es sei etwa $|a| = \mathrm{Min}(|a|, |b|)$. Wegen $a \notin Q$ gibt es ein Element $x \in M$, für welches $1 + kx^2 \leqq |a|$ und folglich

$$(1 + kx^2)^2 \leqq a^2$$

ist. Wir benutzen jetzt die wegen $k < 0$ geltende Abschätzung

$$1 + k\left(\frac{2x}{1 - kx^2}\right)^2 = \left(\frac{1 + kx^2}{1 - kx^2}\right)^2 \leqq (1 + kx^2)^2 .$$

Die beiden letzten Ungleichungen ergeben zusammen, wenn wir zur Abkürzung

$$x' = \frac{2x}{1 - kx^2}$$

setzen,

$$1 + kx'^2 \leqq a^2 \leqq |ab| .$$

Wegen (iii) ist $x' \in M$. Also folgt $ab \notin Q$.

Wir zeigen jetzt, daß $Q \subseteq P$ ist. Nach unserer Voraussetzung am Anfang gibt es ein Element $x \in M$ mit $kx^2 \notin P$. Dann ist $a = 1 + kx^2 \not\equiv 1 \bmod P$. Ferner ist, wegen (ii) und $k < 0$, $0 < a < 1$. Daraus folgt:

$$1 < \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a} \not\equiv 1 \bmod P .$$

Es gibt daher eine natürliche Zahl m mit

$$1 + \frac{1}{m} < \frac{1}{a} .$$

Daraus folgt, für jede natürliche Zahl n,

$$1 + \frac{n}{m} < \frac{1}{a^n}$$

oder

$$a^n < \frac{m}{m+n} . \tag{24}$$

Nach der Definition von Q ist $a \notin Q$, und daher wegen (vi): $a^n \notin Q$ für jede natürliche Zahl n. Ist nun $b \in Q$, so muß also $|b| < a^n$ sein. Dann folgt wegen (24):

$$|b| < \frac{m}{m+n} \quad \text{für jede natürliche Zahl } n .$$

Das bedeutet aber: $b \in P$. Also ist $Q \subseteq P$.

Wir können nun schließen, daß, für jede natürliche Zahl n, mit a stets auch na in Q liegt. Es sei $a \in Q$ und n eine natürliche Zahl. Dann ist, wie wir sahen, $a \in P$. Also ist

$$|a| < \frac{1}{n^2} .$$

Daraus folgt $(na)^2 < |a|$. Wegen $a \in Q$ ist also $(na)^2 \in Q$, und daher wegen (vi) $na \in Q$.

Von hier aus erkennt man nun leicht, daß Q ein R-Modul ist [vgl. den Beweis von (v)]. Wegen $Q \subseteq P$ und (vi) ist Q also ein Primideal $\neq R$ von R. Damit ist das Theorem 4 bewiesen.

§ 5. Über die Winkelsumme im Dreieck

In einer Hilbert-Ebene ist die Winkeladdition erklärt (HILBERT [5]); damit hat auch der Begriff der Summe der Innenwinkel eines Dreiecks einen Sinn. In den Hilbert-Ebenen mit euklidischer Metrik, und nur in diesen, ist die Winkelsumme gleich zwei Rechten. Es ist üblich, die Hilbert-Ebenen mit nichteuklidischer Metrik mit Hilfe der Winkelsumme in zwei Klassen einzuteilen: man unterscheidet zwischen Hilbert-Ebenen, in denen die Winkelsumme kleiner als zwei Rechte ist, und solchen, in denen sie größer ist. Diese Einteilung ist möglich, weil der folgende von DEHN bewiesene Satz gilt (DEHN [4]):

Ist in einer Hilbert-Ebene in irgendeinem Dreieck die Winkelsumme größer bzw. gleich bzw. kleiner als zwei Rechte, so ist sie es in jedem Dreieck dieser Ebene.

Dieser Satz folgt auch aus der Tatsache, daß die Winkelsumme größer bzw. kleiner als zwei Rechte ist, je nachdem die metrische Konstante $k > 0$ oder $k < 0$ ist (SCHUR [6]). Den letzteren Satz werden wir im folgenden durch eine einfache Rechnung beweisen.

Die Einteilung der metrisch-nichteuklidischen Hilbert-Ebenen mit Hilfe der Winkelsumme beruht wesentlich auf der Anordnung und der freien Beweglichkeit. Ein Einteilungsprinzip, welches nicht von derartigen Forderungen abhängt, und z. B. auch allgemein bei metrischen Ebenen (im Sinne des Axiomensystems von BACHMANN) anwendbar ist, gewinnt man, wenn man die Idealebenen betrachtet. Die Idealebene einer metrisch-nichteuklidischen Ebene ist entweder eine elliptische oder eine hyperbolische projektiv-metrische Ebene. Hiernach kann man unterscheiden zwischen metrischen Ebenen mit elliptischer und solchen mit hyperbolischer Idealebene.

In diesem Paragraphen soll nun an Beispielen gezeigt werden, daß die Einteilung der Hilbert-Ebenen nach der Winkelsumme von diesem allgemeineren Gesichtspunkt aus nicht sinnvoll erscheint: Für die Hilbert-Ebenen fallen nämlich die beiden Einteilungsprinzipien, Winkelsumme bzw. Metrik der Idealebene, nicht zusammen.

Hilbert-Ebenen, in denen die Winkelsumme größer als zwei Rechte ist[12]), besitzen stets eine elliptische Idealebene; ist die metrische Konstante k nämlich positiv, so ist die metrische Form offenbar nullteilig, d. h. $f(u, u) = 0$ gilt nur für $u = [0, 0, 0]$. Die bekanntesten Hilbert-Ebenen mit einer Winkelsumme von weniger als zwei Rechten, die hyperbolischen Ebenen, haben eine hyperbolische Idealebene. Es gibt aber, wie die im folgenden betrachteten Beispiele lehren, auch Hilbert-Ebenen mit einer Winkelsumme von weniger als zwei Rechten, deren Idealebene elliptisch ist; man kann sogar metrische Ebenen mit freier Beweglichkeit konstruieren, in denen es zwei Anordnungen gibt, derart daß die Winkelsumme im einen Fall kleiner und im anderen Fall größer als zwei Rechte ist (s. das unten angegebene Beispiel 2).

Zunächst beweisen wir den oben erwähnten Satz über die metrische Konstante.

Satz 5. *Es sei H eine Hilbert-Ebene, die nach Satz 1 algebraisiert sei. In jedem Dreieck aus H ist die Summe der Innenwinkel kleiner, gleich oder größer als zwei Rechte, je nachdem, ob die metrische Konstante k kleiner, gleich oder größer als 0 ist.*

Beweis. Ist $k = 0$, so ist H Teilebene einer euklidischen Ebene und daher die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten. Wir brauchen also nur noch den Fall $k \neq 0$ zu betrachten.

Es genügt nun, den Satz für solche Dreiecke zu beweisen, deren einer Eckpunkt der Nullpunkt ist. Jedes Dreieck kann nämlich durch eine Bewegung in diese Lage gebracht werden, und die Eigenschaft der Winkelsumme, kleiner bzw. größer als zwei Rechte zu sein, bleibt bei Bewegungen erhalten.

[12]) Das erste Beispiel einer solchen gab DEHN mit seiner nichtlegendreschen Geometrie (DEHN [4]).

Wir betrachten jetzt ein Dreieck OAB. O sei der Nullpunkt. In jedem Dreieck sind mindestens zwei Winkel kleiner als ein Rechter (s. Fußnote 7). Wir dürfen annehmen, daß in unserem Fall die bei A bzw. B liegenden Winkel α, β kleiner als ein Rechter sind.

Zwei Geraden seien als parallel bezeichnet, wenn ihr Schnittpunkt (in der Idealebene) auf der Polaren $K[0, 0, 1]$ des Nullpunktes liegt. $A'B'$ sei eine zu AB parallele Gerade durch O, und zwar liege A' mit A auf derselben Seite der Geraden OB und B' mit B auf derselben Seite der Geraden OA.

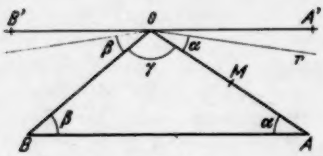

Fig. 1

Wir zeigen nun, daß $\alpha < \sphericalangle AOA'$ oder $\alpha > \sphericalangle AOA'$ ist, je nachdem $k < 0$ oder $k > 0$ ist. Der gleiche Schluß liefert dann auch die entsprechende Aussage für β. Damit wird Satz 5 bewiesen sein.

Es sei r ein von O ausgehender Halbstrahl, der auf derselben Seite der Geraden OA liegt wie A', und der mit OA den Winkel α bildet. Für die folgende Rechnung nehmen wir an, daß OA die x_1-Achse, d. h. die Gerade $K[0, 1, 0]$ ist, daß dabei A auf der positiven x_1-Achse liegt, und daß ferner die Seite von OA, auf der A' liegt, die Seite positiver x_2-Werte ist. Da α kleiner als ein rechter Winkel ist, hat die Trägergerade von r die Darstellung

$$K[s, -1, 0] \quad \text{mit} \quad s > 0\,. \tag{25}$$

Wir berechnen nun die Darstellung der Geraden AB, indem wir die Tatsache benutzen, daß man AB als Bildgerade erhält, wenn man auf die Trägergerade von r die Spiegelung am Mittelpunkt M der Strecke OA anwendet. Wir benutzen dazu die Spiegelungsformel [vgl. (22)]

$$\mathfrak{u}' = -\mathfrak{u} + 2\,\frac{f(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})}{f(\mathfrak{v}, \mathfrak{v})}\,\mathfrak{v}\,.$$

Hierbei ist $K\mathfrak{v}$ die Polare des Punktes, an dem gespiegelt wird, und $K\mathfrak{u}'$ die Bildgerade von $K\mathfrak{u}$. Hat M die Darstellung $K(a, 0, 1)$, so ist also $\mathfrak{v} = [ka, 0, 1]$ zu setzen. Man erhält als Bild von (25), also als Darstellung der Geraden AB, wenn man das Bildtripel noch mit -1 multipliziert:

$$K\left[\frac{1 - ka^2}{1 + ka^2}\,s, -1, \frac{-2\,as}{1 + ka^2}\right].$$

Da OA' parallel zu AB ist, hat OA' die Darstellung

$$K\left[\frac{1 - ka^2}{1 + ka^2}\,s, -1, 0\right].$$

Beim Übergang von der Trägergeraden von r zu der Geraden OA' wird die Steigung s also mit dem Faktor

$$\frac{1 - ka^2}{1 + ka^2}$$

multipliziert. Dabei ist $|ka^2| < 1$ [Aussage (ii) im Beweis von Theorem 4]. Die Steigung wird also größer oder kleiner, je nachdem $k < 0$ oder $k > 0$ ist. Daraus

folgt unsere Behauptung über die Winkel α und $\sphericalangle\, AOA'$. Damit ist, wie gesagt, Satz 5 bewiesen.

Wir geben jetzt die Beispiele von Hilbert-Ebenen, in denen die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte (d. h. $k < 0$) ist und deren Idealebene eine elliptische projektiv-metrische Ebene ist.

Da der Körper K als pythagoräisch vorausgesetzt werden muß, ist die Forderung, daß die Idealebene elliptisch sein soll, d. h. daß es kein Tripel $u \neq [0, 0, 0]$ mit $f(u, u) = 0$ geben soll, offenbar gleichwertig damit, daß $-k$ nicht Quadrat eines Elementes aus K ist. Um ein Beispiel der obengenannten Art anzugeben, müssen wir also einen geordneten pythagoräischen Körper K konstruieren, in dem es ein positives Element $a = -k$ gibt, welches kein Quadrat ist, in dem aber andererseits $1 + kx^2$ für gewisse x ein Quadrat ist [vgl. die Bedingungen (b) in Theorem 2 und (c) in Theorem 3].

Wir geben zunächst eine Klasse von Beispielen, unter denen sich auch solche mit archimedischer Anordnung befinden.

Beispiel 1. Es sei K_0 ein Körper, welcher zwei verschiedene Anordnungen besitzt. Wir bezeichnen diese Anordnungen mit $<$ bzw. $>$ und $<'$ bzw. $>'$. A sei die algebraisch abgeschlossene Hülle von K_0, und L bzw. L' sei ein in A liegender reell abgeschlossener algebraischer Erweiterungskörper von K_0, dessen Anordnung die durch $<$ bzw. durch $<'$ bezeichnete Anordnung von K_0 fortsetzt[13]). Als Koordinatenkörper für unser Beispiel nehmen wir den Durchschnitt $K = L \cap L'$ mit der Anordnung $<$, die durch die Anordnung von L in K induziert wird. K besitzt außerdem die durch die Anordnung von L' induzierte Anordnung $<'$. Ist $c \in K$ und $c > 0$, $c >' 0$, so ist c in K ein Quadrat, denn die Quadratwurzeln aus c liegen dann sowohl in L als auch in L', also in K. Hiermit können wir schließen, daß K ein pythagoräischer Körper ist. Für $c \in K$ ist nämlich $1 + c^2 > 0$ und $1 + c^2 >' 0$.

Es gibt in K ein Element k mit $k < 0$ und $k >' 0$, und man erkennt wie eben: Ist $1 + kx^2 > 0$, so ist $1 + kx^2$ Quadrat eines Elementes aus K; es ist nämlich auch $1 + kx^2 >' 0$.

Wir betrachten nun die projektiv-metrische Koordinatenebene über dem Körper K mit der durch $<$ bezeichneten Anordnung. Die metrische Form sei die Form (1) mit der eben angegebenen Konstanten k. Da K auch eine Anordnung besitzt, für die k positiv wird, ist die metrische Form nullteilig, die projektiv-metrische Ebene also elliptisch. Wir können mit Hilfe von Theorem 3 schließen, daß die Punkte Kx mit $g(x, x) > 0$ einen Hilbertschen Eigentlichkeitsbereich bilden; die oben gemachte Bemerkung bezüglich der Elemente $1 + kx^2$ besagt nämlich, daß die Bedingung (c) des Theorems 3 erfüllt ist. Die Winkelsumme ist wegen $k < 0$ kleiner als zwei Rechte.

Die Tatsache, daß die Menge der Punkte Kx mit $g(x, x) > 0$ eine metrische Teilebene definiert, erkennt man übrigens einfacher mit Hilfe des Theorems 7 aus AGS § 10 als durch die hier im Beweis von Theorem 3 benutzten Schlüsse.

Ist die Anordnung $<$ von K_0 archimedisch, so ist ihre Fortsetzung auf den algebraischen Erweiterungskörper K ebenfalls archimedisch.

---

[13]) Vgl. v. d. Waerden [7], § 72.

Im folgenden Beispiel konstruieren wir metrische Ebenen mit freier Beweglichkeit, in denen zwei verschiedene Anordnungen definiert werden können, derart. daß jeweils bei beiden Anordnungen eine Hilbert-Ebene entsteht und daß die Winkelsumme im Dreieck bei der ersten Anordnung kleiner als zwei Rechte und bei der zweiten Anordnung größer als zwei Rechte ist.

Beispiel 2. Es sei K ein Körper, der so konstruiert ist, wie der Körper K im ersten Beispiel. Wir betrachten nun den Körper $K((t))$ der Potenzreihen[14])

$$a = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i \quad \text{mit} \quad a_i \in K . \tag{26}$$

Dabei bedeutet n eine ganze Zahl. Ist in der Darstellung (26) $n = 0$, $a_0 \neq 0$ und a_0 in K ein Quadrat, so ist a in $K((t))$ ein Quadrat, wie man auf die übliche Art durch Ansatz mit unbekannten Koeffizienten und Koeffizientenvergleich erkennt.

$K((t))$ ist ein pythagoräischer Körper. Zum Beweis betrachten wir ein Element $1 + a^2$, wobei wir zunächst annehmen, daß in der Darstellung (26) des Elementes a $n \geqq 0$ ist. Dann ist

$$1 + a^2 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i \quad \text{mit} \quad b_i \in K ,$$

und hierin ist $b_0 = 1 + a_0^2$. b_0 ist also in K ein Quadrat und daher nach der zuvor gemachten Bemerkung $1 + a^2$ in $K((t))$ ein Quadrat. Den Fall, daß in der Darstellung (26) des Elementes a $n < 0$ ist, führt man mit Hilfe der Identität

$$1 + a^2 = a^2 \left(1 + \frac{1}{a^2}\right)$$

auf den eben behandelten Fall zurück.

Jede Anordnung von K kann durch folgende Vorschrift auf $K((t))$ fortgesetzt werden: Ist

$$a = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i \quad \text{mit} \quad a_i \in K, a_n \neq 0 ,$$

so sei genau dann $a > 0$, wenn $a_n > 0$ ist. Jede derartige Anordnung von $K((t))$ ist nichtarchimedisch. Nehmen wir etwa an, daß die beiden Anordnungen $<$ und $<'$ des Koeffizientenkörpers K archimedisch sind (vgl. die letzte Bemerkung zu Beispiel 1), und denken wir uns beide Anordnungen in der angegebenen Weise auf $K((t))$ fortgesetzt. Dann besteht der Ring R der ganzzahlig-einschließbaren Elemente von $K((t))$ bei beiden Anordnungen aus den Elementen (26) mit $n \geqq 0$ und das Ideal P besteht beidemal aus den Elementen (26) mit $n > 0$.

Wir betrachten nun die projektiv-metrische Koordinatenebene E über dem Körper $K((t))$ mit der metrischen Form (1). Die metrische Konstante sei ein Element $k \in K$ mit $k < 0$ und $k >' 0$. Wegen $k >' 0$ ist E wieder eine elliptische projektiv-metrische Ebene. Wir wollen Theorem 2 anwenden. Die Bedingung (a) ist für jeden R-Modul $M \subseteq P$ erfüllt. Man erkennt ferner entsprechend wie

[14]) Vgl. etwa Bourbaki [3], Chap. IV.

beim Beweis der Tatsache, daß $K((t))$ ein pythagoräischer Körper ist, daß auch die Bedingung (b) für alle R-Moduln $M \subsetneq P$ erfüllt ist. Man kann also z. B. $M = P$ setzen.

In der projektiv-metrischen Ebene E erhalten wir also Punktbereiche, die bezüglich der beiden angegebenen Anordnungen Hilbertsche Eigentlichkeitsbereiche sind. Bei der einen Anordnung ist die Winkelsumme kleiner als zwei Rechte, bei der anderen ist sie größer als zwei Rechte.

Literatur

[1] Bachmann, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959.
[2] Bachmann, F., u. W. Pejas: Metrische Teilebenen hyperbolischer projektiv-metrischer Ebenen. Math. Ann. 140, 1—8 (1960).
[3] Bourbaki, N.: Eléments de Mathématique, Livre II Algèbre. Paris seit 1952.
[4] Dehn, M.: Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Math. Ann. 53, 404—439 (1900).
[5] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. 8. Aufl., Stuttgart 1956.
[6] Schur, F.: Grundlagen der Geometrie. Berlin-Leipzig 1909.
[7] Waerden, B. L. van der: Algebra, Bd. 1, 4. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

(Eingegangen am 16. September 1960)

TAIT, W. W.
Math. Annalen 143, 236—250 (1961)

Nested Recursion

By

W. W. TAIT in Stanford

Let $\prec$ be an (irreflexive) well-ordering of the set N of natural numbers, and for convenience, suppose that 0 is the least element with respect to $\prec$. In what follows, "well-ordering" will always mean a well-ordering of this sort, and "function" will always refer to functions from $N \times \cdots \times N$ into N.

Nested (eingeschachtelte) recursion on $\prec$ occurs when the value $\varphi(\hat{x}, 0)$ of a function φ is defined as a given function of the variables $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, and $\varphi(\hat{x}, y + 1)$ is defined explicitly in terms of given functions and certain values $\varphi(\hat{\mathfrak{t}}_j, \mathfrak{l}_j)$ $(j = 1, \ldots, p)$ of φ, where $\mathfrak{t}_{j1}, \ldots, \mathfrak{t}_{jm}$ and $\mathfrak{l}_j$ are numerical terms built up out of "φ", the variables $x_1, \ldots, x_m$, y and given function constants, and where (writing $y' = y + 1$)

$$(1) \qquad (\hat{x})\,(y)\,[\mathfrak{l}_j \prec y'] \qquad (j = 1, \ldots, p)$$

holds. Included in the definition of nested recursion is the special case

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(\hat{x}, 0) = \psi(\hat{x}) \\ \varphi(\hat{x}, y') = \chi[\hat{x}, y', \varphi(\hat{x}, \theta(\hat{x}, y'))]\,, \end{cases}$$

of (unnested) *ordinal recursion* on $\prec$, or *$\prec$-recursion*, where the function θ is subject to the condition

$$(1') \qquad (\hat{x})\,(y)\,[\theta(\hat{x}, y') \prec y' \wedge \theta(\hat{x}, 0) = 0]\,.$$

A function which can be obtained by means of a sequence of explicit definitions and nested recursions on $\prec$, starting with the primitive recursive functions, will be called a *nested $\prec$-recursive function*. Providing that all the recursions in the sequence are ordinal recursions, we shall call the function simply a *$\prec$-recursive function*. The notions "φ is (nested) $\prec$-recursive *uniformly* in the functions Ψ" and "φ is (nested) $\prec$-recursive *uniformly* in Ψ for Ψ restricted by the condition $P(\Psi)$" are carried over by analogy from [4], §§ 47 and 55. E.g., if φ is defined by (2), then φ is $\prec$-recursive uniformly in ψ, χ and θ for θ satisfying (1'). We shall say that $\prec$-recursion is *reducible* to nested $\prec'$-recursion, for example, to mean that, for any φ, Ψ and P, if φ is $\prec$-recursive uniformly in Ψ restricted by $P(\Psi)$, then φ is nested $\prec'$-recursive uniformly in Ψ restricted by $P(\Psi)$.

Lower case German letters will be used throughout this exposition to denote numerical terms. If $\mathfrak{t}$ is a constant numerical term, $\bar{\mathfrak{t}}$ will denote its numerical value. The expression $0^{(x)}$ $(x \geq 0)$ will denote the symbol 0 followed by x successor symbols $'$.

From the set-theoretic or intuitionistic standpoint, the distinction between ordinal recursion and the more general nested recursion is of small importance, at least as far as proving the existence of functions is concerned. For, within both of these frameworks (though with a difference in meaning), it can be proved that nested recursion on any well-ordering has a unique solution φ (which is computable in the given functions). The situation is otherwise, however, from the point of view of the finitist conception of function; in this case, a function may be introduced by a definition only after we see *directly*, i.e., without the aid of abstract objects, that a value can be computed from the definition for each argument[1]). The difference here between ordinal recursion and nested recursion is evident: justification for the definition (2) consists simply in proving directly that, for a certain (finitist) function $\mu(\hat{x}, y)$, the sequence

$$(3) \qquad y', \theta(\hat{x}, y'), \theta(\hat{x}, \theta(\hat{x}, y')), \ldots$$

terminates with 0 in at most $\mu(\hat{x}, y)$ steps. The case of the nested recursion, e.g., $\varphi(0) = 0$, $\varphi(y') = \mathfrak{t}(y')$, differs in two respects from this. In the first place, the elimination of the φ-term $\varphi(\mathfrak{l})$ from the computation of $\varphi(y')$ by means of the equation $\varphi(\bar{\mathfrak{l}}) = \mathfrak{t}(\bar{\mathfrak{l}})$ in general involves the introduction of several new φ-terms (in contrast to the single φ-term $\varphi(\theta(\mathfrak{l}))$ in the case (2) of ordinal recursion), so that the computation has the form of a fan

$$\begin{array}{ccc} & \varphi(\bar{\mathfrak{l}}) & \\ \diagup & | & \diagdown \\ \varphi(\mathfrak{l}_1) \ldots & \varphi(\mathfrak{l}_i) & \ldots \varphi(\mathfrak{l}_\nu) \end{array} \qquad (\mathfrak{l}_i \prec \bar{\mathfrak{l}})$$

Here we must find a function $\mu(y)$ for which we can prove that *each* branch of the fan terminates with 0 in at most $\mu(y)$ steps. A more important difference is, however, that in the case of ordinal recursion the step from the term $\varphi(\mathfrak{l})$ to $\varphi(\bar{\mathfrak{l}})$ can be made immediately (on the basis of the given functions), whereas in the general case $\mathfrak{l}$ itself may contain φ-terms which have to be evaluated before $\bar{\mathfrak{l}}$ can be computed. That part of the computation fan following from $\varphi(\mathfrak{l})$ then has the form

$$\varphi(\mathfrak{l}) - \varphi(\mathfrak{l}^1) - \cdots - \varphi(\mathfrak{l}^r) \text{ —— } \varphi(\bar{\mathfrak{l}}) \begin{array}{l} \diagup\ \varphi(\mathfrak{l}_1) \\ \text{—}\ \varphi(\mathfrak{l}_i) \\ \diagdown\ \varphi(\mathfrak{l}_\nu) \end{array}$$

where each step up until the last one is obtained by replacing some φ-term $\varphi(\mathfrak{k})$, where $\mathfrak{k}$ does not contain φ-terms, by 0 or by $\mathfrak{t}(\mathfrak{k})$ in the previous step (so that $\bar{\mathfrak{l}}^1 = \cdots \bar{\mathfrak{l}}^r = \bar{\mathfrak{l}}$). Now, it is not at all evident that we could not have a well-ordering $\prec$ such that (a) for every finitist function θ such that (1′) holds, there is a (finitist) bound $\mu(\hat{x}, y)$ for the descending sequences (3), but that (b)

[1]) We wish here to express our thanks to Professor G. KREISEL for the many interesting conversations we have had on topics connected with the present work and for his numerous and helpful criticisms and suggestions concerning this paper.

no such bound exists for the computation fan corresponding to some nested recursion on $\prec$.

On the other hand, the analysis suggests a connection between nested recursion on the well-ordering $\prec$ of type α and ordinal recursion on the ordering $\prec^*$ of type ω^α which is obtained in the natural way from $\prec$. (A precise definition of $\prec^*$ and of the ordinal product $\prec \otimes \prec'$ of two well-orderings is given in § 1.) We can conceive of the computation of $\varphi(y')$ from a nested recursion as a sequence $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ of finite sets $\sigma_i = \{\varphi(\mathfrak{l}_{i1}), \ldots, \varphi(\mathfrak{l}_{ir_i})\}$ of φ-terms, where $\sigma_0 = \{\varphi(y')\}$ and where σ_{i+1} is related to σ_i as follows: We can assume that $\mathfrak{l}_{ir_i}$ contains no φ-terms. Let $\mathfrak{k}_i$ be 0 if $\bar{\mathfrak{l}}_{ir_i} = 0$, otherwise it is $\mathfrak{t}(\bar{\mathfrak{l}}_{ir_i})$. For $j = 1, \ldots, r_i - 1$, $\mathfrak{l}_{i+1\,j}$ is the result of replacing $\varphi(\mathfrak{l}_{ir_i})$ in $\mathfrak{l}_{ij}$ by $\mathfrak{k}_i$, and for $j \geqq r_i$, the terms $\varphi(\mathfrak{l}_{i+1\,j})$ are all the φ-terms (if any) occurring in $\mathfrak{k}_i$. Suppose now that for each $i \geqq 0$ and $j = 1, \ldots, r_i$, we denote by γ_i^j the ordinal $< \alpha$ represented by $\bar{\mathfrak{l}}_{ij}$ in the ordering $\prec$. Then set $\mathrm{num}(\sigma_i)$ equal to the number which represents $\sum_{j=1}^{r_i} \omega^{\gamma_i^{h_i}}$ in the ordering $\prec^*$, where $\gamma_i^{h_1} \geqq \gamma_i^{h_2} \geqq \cdots \geqq \gamma_i^{h_{r_i}}$. Since $\gamma_{i+1}^j = \gamma_i^j$ for $j = 1, \ldots, r_i - 1$, and $\gamma_{i+1}^j < \gamma_i^{r_i}$ for $j \geqq r_i$, it is clear that $\mathrm{num}(\sigma_{i+1}) \prec^* \mathrm{num}(\sigma_i)$. In this way, making use of the definition of φ (to evaluate the $\mathfrak{l}_{ij}$), we see that the computation of $\varphi(y')$ can be put in the form of a descending sequence with respect to $\prec^*$. However, if our aim is to justify nested recursion on $\prec$ by means of induction on $\prec^*$, $\mathrm{num}(\sigma_i)$ must be defined independently of the definition of φ. We accomplish this in § 2 by means of a further analysis of the computation of $\varphi(y')$, and we use this idea to prove there that (Theorem 2) nested recursion on "standard" well-orderings $\prec$ is reducible to ordinal recursion on $\prec^*$. (The conditions imposed on a standard well-ordering are given in § 1.)

Theorem 2 is an improvement of the known results concerning the usual orderings $<_n$ of type ω_{n+2} (where $\omega_0 = 0$ and $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$). E.g., in [5] it is proved that if φ is defined by nested recursion on $<_n$ from $<_n$-recursive functions, then φ is $<_r$-recursive for some r. The proof proceeds by noting, first, that if e is the Gödel number of the nested recursive definition of φ and Ψ is the set of given ($<_n$-recursive) functions, then for suitable primitive recursive δ and ε and suitable terms $\hat{\mathfrak{t}}_j$, $\mathfrak{l}_j$, the formulas

$$T_{m+1}^{\Psi}(e, \hat{x}, 0, \delta(\hat{x}))$$

and

$$T_{m+1}^{\Psi}(e, \hat{\mathfrak{t}}_1, \mathfrak{l}_1, z_1) \wedge \cdots \wedge T_{m+1}^{\Psi}(e, \hat{\mathfrak{t}}_p, \mathfrak{l}_p, z_p) \to T_{m+1}^{\Psi}(e, \hat{x}, y', \varepsilon(\hat{z}))$$

are provable in the system Z_μ of [3]. Furthermore, it is always possible to choose the $\mathfrak{l}_j$ so that the formulas (1) are theorems of Z_μ (see 1.3). Since the induction axiom for $<_n$ is also provable in this system [2], it follows that

$$Z_\mu(\hat{x})\,(y)\,(Ez)\,T_{m+1}^{\Psi}(e, \hat{x}, y, z)\,.$$

Consequently, by Ackermann's analysis [1], φ is $<_r$-recursive for some r. It is clear that this argument can be extended to prove that if φ is nested recursive on $<_n$ uniformly in Ψ, then it is $<_r$-recursive uniformly in Ψ for some r.

Indeed, simply carry out the same argument for the system obtained by adding to Z_μ new function constants for the functions in Ψ. The *Gesamtersetzungen* of [1] are now defined uniformly primitive recursive in Ψ, and the remainder of the argument carries through without change. Whether the argument can be extended to other standard well-orderings $\prec$ by adding the corresponding induction axioms to Z_μ remains an open question. Also, by a close look at Ackermann's analysis, it might be possible to obtain $r = n + 1$, thus capturing the full content of Theorem 3. However, this method is less direct than the one employed here. For, although both arguments are metamathematical, one involves the analysis of proofs in Z_μ and the other involves only the analysis of the simpler notion of a computation.

In §§ 3 and 4, the method of § 2 is applied to special kinds of nested recursion on standard well-orderings. In § 3, we give a new proof that nested $\prec$-recursion is reducible to primitive recursion [8], and in § 4, we show that if, roughly speaking, no term of the form $\varphi(\mathfrak{l})$ occurs in the computation of $\varphi(y')$ for any y, where $\mathfrak{l}$ contains φ-terms, then the nested $\prec$-recursion is reducible to $\prec$-recursion.

Just as the classical proof that nested recursion on $\prec$ has a unique solution fails to provide, in particular cases, a finitist bound on the length of the computation fans, the analogous situation holds regarding ordinal recursion on $\prec^*$. I.e., from the fact that $\prec$-recursion is justified on finitist principles it does not follow by the classical argument that the same holds for $\prec^*$. In § 5 we show that, indeed, the two situations are essentially the same; namely that for standard well-orderings, $\prec^*$-recursion is reducible to nested recursion on $\prec \otimes \prec$, and consequently, if $\prec$ is of type $\alpha = \omega \cdot \alpha$, it is reducible to nested recursion on $\prec$.

Remark. We note here the well-known fact that every computable function φ can be obtained by explicit definition and $\prec_\varphi$-recursion from primitive recursive functions, where $\prec_\varphi$ is a primitive recursive well-ordering of type ω, constructed from the computations of φ [7; 10]. This is indeed a "stumbling-block" in the way of a classification of computable functions according to the ordinal on which they can be defined by recursion, unless some restriction is placed on the class of (primitive recursive) well-orderings involved. In looking for a characterization of finitist functions, there is of course such a restriction, namely, if θ is a finitist function, satisfying (1′), we must be able to prove finitistically that the sequences (3) terminate. And, we cannot expect that this restriction will in general hold for the ordering $\prec_\varphi$, since the proof that this is a well-ordering depends upon the (possibly non-constructive) proof that φ is computable[2]).

[2]) It is not *prima facie* clear that the class C of finitist functions can be characterized at all by means of a class of well-orderings (i.e., on which the functions in C can be obtained by ordinal recursion). For example, finitist justification of $\prec$ recursion demands not that every descending sequence terminates, but only those of the form (3), where $\theta \in C$. However, see [6].

1. The aim of this section is to discuss the class of well-orderings to which the results in the subsequent sections apply.

1.1. Let $\varkappa(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + x$. Then the inverse $\varkappa^{-1}$ is the enumeration (0,0), (0,1), (1,0), (0,2), ... of N^2, and the components $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$ of $\varkappa^{-1}$, determined by $\varkappa[\varkappa_1(x), \varkappa_2(x)] = x$, are primitive recursive.

The product $\prec = \prec' \otimes \prec''$ of two well-orderings is defined by

$$x \prec y \cdot \equiv \cdot \varkappa_2(x) \prec'' \varkappa_2(y) \cdot V \cdot \varkappa_2(x) = \varkappa_2(y) \wedge \varkappa_1(x) \prec' \varkappa_1(y) .$$

Since $\varkappa_1(0) = \varkappa_2(0) = 0$, the least element with respect to $\prec$ is 0. $\prec$ is primitive recursive uniformly in $\prec'$ and $\prec''$, and if the latter well-orderings are of types α and β, respectively, then $\prec$ is of type $\alpha \cdot \beta$.

Let $p_0, p_1, p_2, \ldots$ be the (primitive recursive) enumeration of the prime numbers in increasing order, and let

$$z + 1 = \prod_{i=0}^{r_z} p_{\nu(z,i)}^{z_i} \tag{4}$$

be the prime decomposition of $z + 1$, where

$$z_i > 0 \qquad (i = 0, \ldots, r_z) \tag{5}$$

and

$$\nu(z, 0) \succ \nu(z, 1) \succ \cdots \succ \nu(z, r_z) , \tag{6}$$

for a given well-ordering $\prec$. Then the well-ordering $\prec^*$ is defined by

$$0 \prec^* y'$$

and

$$x' \prec^* y' \cdot \equiv \cdot (Ej)_{j \leq r_y} (i)_{i<j} [p_{\nu(x,i)}^{x_i} = p_{\nu(y,i)}^{y_i} \cdot \wedge \cdot r_x = j \dot{-} 1 \ V \{\nu(x, j) \prec \nu(y, j) \cdot V \ \nu(x, j) = \nu(y, j) \wedge x_j < y_j\}].$$

Thus, 0 represents the ordinal 0 in the well-ordering $\prec^*$, and if $\nu(z, 0)$, $\nu(z, 1), \ldots, \nu(z, r_z)$ represent the ordinals $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{r_z}$ in the ordering $\prec$, then $z + 1$ represents $\omega^{\gamma_0} \cdot z_0 + \omega^{\gamma_1} \cdot z_1 + \cdots + \omega^{\gamma_{r_z}} \cdot z_{r_z}$ in the ordering $\prec^*$. If $\prec$ is of type α, then $\prec^*$ is of type ω^α. It is evident that $\prec^*$ is primitive recursive uniformly in $\prec$.

1.2. We do not attempt here to explicate completely what is to be meant by a *standard well-ordering*; rather, we simply list certain minimal conditions which are needed in one or another of our proofs. Namely, we assume that if $\prec$ is standard, then (i) $\prec$ (i.e., the characteristic function of $\prec$) is $\prec$-recursive, (ii) primitive recursion is reducible to $\prec$-recursion, (iii) $\prec$-recursion is reducible to $\prec^*$-recursion, and (iv) if $\prec$ and $\prec \otimes \prec$ are similar, then nested recursion on $\prec \otimes \prec$ is reducible to nested recursion on $\prec$. In any case, the orderings $\prec_n$ satisfy these four conditions. To establish this, we first prove a lemma. Suppose that $\prec$ is of ordinal less than that of $\prec'$ and that π is a similarity mapping of $\prec$ into $\prec'$, i.e.,

$$x \prec y \rightarrow \pi(x) \prec' \pi(y) .$$

Then we define $\hat{\pi}$ by

$$\hat{\pi}(x) = \begin{cases} y, & \text{if} \quad \pi(y) = x \\ 0, & \text{if} \quad (y)\,[\pi(y) \neq x]\,. \end{cases}$$

We shall sometimes call $\hat{\pi}$ the *inverse* of π.

Lemma 1. *If the similarity mapping π of $<$ into $<'$, together with $\hat{\pi}$, is nested recursive on $<'$ ($<$-recursive), then nested recursion on $<$ ($<$-recursion) is reducible to nested recursion on $<'$ ($<'$-recursion).*

Without any loss of generality, we can suppose that $\pi(0) = 0$. Suppose now, for example, that π and $\hat{\pi}$ are $<'$-recursive, and define for each φ the function

$$\breve{\varphi}(x) = \pi[\varphi(\hat{\pi}(x_1), \ldots, \hat{\pi}(x_m))]\,.$$

Then it suffices to show that if φ is $<$-recursive uniformly in Ψ, then $\breve{\varphi}$ is recursive uniformly in $\breve{\Psi}$, since $\varphi(\hat{x}) = \hat{\pi}[\breve{\varphi}(\pi(\hat{x}))]$. Suppose, e.g., that φ is defined by the ordinal recursion (2), where (1′) holds and where $\breve{\psi}$, $\breve{\chi}$ and $\breve{\theta}$ are $<'$-recursive. Then

$$(\hat{x})\,(y)\,[\breve{\theta}(\hat{x}, y') <' y']\,,$$

since π is order-preserving, and

$$\breve{\varphi}(\hat{x}, 0) = \breve{\psi}(\hat{x})\,,$$

$$\varphi(\hat{x}, y') = \pi\{\chi[\hat{\pi}(\hat{x}), \hat{\pi}(y'), \varphi\big(\hat{\pi}(x'),$$

$$\theta(\hat{\pi}(\hat{x}), \hat{\pi}(y'))\big)]\} = \breve{\chi}\big(\hat{x}, y', \breve{\varphi}(\hat{x}, y', \theta(\hat{x}, y'))\big)\,,$$

which is an instance of $<'$-recursion. Similarly, we can transform explicit definitions of φ into explicit definitions of $\breve{\varphi}$. The argument is the same for the part of the lemma concerning nested recursion.

For each well-ordering $<$, we define $<_0 = <$, $<_{n+1} = <_n^*$. Then $<_n$ under this definition coincides with the usual orderings $<_n$ of type ω_{n+2} as defined in [3], p. 361.

Theorem 1. *If $<$ is a standard well-ordering, and moreover, there is a similarity mapping π of $<$ into $<^*$ such that π and $\hat{\pi}$ are primitive recursive, then $<_n$ is standard for each $n \geq 0$, and there is a primitive recursive similarity mapping π_n, with $<_{n+1}$-recursive inverse $\hat{\pi}_n$, of $<_n$ into $<_{n+1}$. In particular, the orderings $<_n$ are standard, and the similarity mapping of $<_n$ onto the initial ω_{n+2}-segment of $<_{n+1}$, and its inverse, are primitive recursive.*

For $m = 0$, we are given that $<_m$ is standard and that there is a similarity mapping π_m of $<_m$ into $<_{m+1}$ such that π_m and $\hat{\pi}_m$ are primitive recursive. Assume that this is also true for $m = n$. By (ii) and (iii) for $<_n$, (ii) holds for $<_{n+1}$. Also, since $<_{n+1} = <_n^*$ is primitive recursive in $<_n$, (i) holds for $<_{n+1}$. Define

$$\pi_{n+1}(0) = 0\,,$$

$$\pi_{n+1}(z') = \prod_{i=0}^{r_z} p_{\nu_1(z,i)}^{e_i}\,,$$

where

$$\nu_1(z, i) = \pi_n(\nu(z, i))$$

and z' has the form (4) with (5) and (6) holding for $\prec = \prec_n$. Then

$$\pi_{n+1}(0) \prec_{n+2} \pi_{n+1}(y') .$$

Suppose that $x' \prec_{n+1} y'$. I.e., for some $j \leq r_y$,

$$i < j \rightarrow p^{x_i}_{\nu(x,i)} = p^{y_i}_{\nu(y,i)} , \tag{7}$$

and either $r_x = j - 1$ or $r_x \geq j$ and either

$$\nu(x, j) \prec_n \nu(y, j) \tag{8}$$

or

$$\nu(x, j) = \nu(y, j) \wedge x_j < y_j . \tag{9}$$

From (6), since π_n is order-preserving, it follows that, for all z,

$$\nu_1(z, r_z) \prec_{n+1} \cdots \prec_{n+1} \nu_1(z, 1) \prec_{n+1} \nu_1(z, 0) ;$$

from (7) it follows that

$$i < j \rightarrow p^{x_i}_{\nu_1(x,i)} = p^{y_i}_{\nu_1(y,i)} ,$$

and from (8) and (9) follow, respectively,

$$\nu_1(x, j) \prec_{n+1} \nu_1(y, j)$$

and

$$\nu_1(x, j) = \nu_1(y, j) \wedge x_j < y_j .$$

This proves that $\pi_{n+1}(x') \prec_{n+2} \pi_{n+1}(y')$. Therefore, π_{n+1} is a similarity mapping of $\prec_{n+1}$ into $\prec_{n+2}$, and since π_n and $\hat{\pi}_n$ are primitive recursive, it is clear that π_{n+1} and $\hat{\pi}_{n+1}$ are, also. Hence, by Lemma 1, (iii) holds for $\prec_{n+1}$. If $n > 0$, then $\prec_n$ is of the same type as $< \otimes \prec_n$ (since $\prec_n$ is of type ω^α for some $\alpha \geq \omega$, and $\omega \cdot \omega^\alpha = \omega^{1+\alpha} = \omega^\alpha$). If we set

$$\pi(0) = 0, \pi(z') = \varkappa\left(z_0, \prod_{i=1}^{r_z} p^{z_i}_{\nu(z,i)}\right),$$

then π is the similarity mapping of $\prec_n$ onto $< \otimes \prec_n$, and it is evident that π and $\hat{\pi}$ are primitive recursive. Therefore, by Lemma 1, (iv) holds for $\prec_n$.

Regarding the orderings $\prec_n$, it is clear that $<$ is standard and that

$$\pi(x) = 2^x$$

defines the similarity mapping of $<$ onto the initial ω-segment of $\prec^*$. Since π and $\hat{\pi}$ are primitive recursive, the theorem applies. By the construction of π_{n+1} out of π_n, it is evident that each π_n is a mapping onto the initial ω_{n+2}-segment of $\prec_{n+1}$.

1.3. Note that if $\prec$ satisfies condition (i), then the *bounding function* $[x]_y$ for $\prec$, defined by

$$[x]_y = \begin{cases} x, & \text{if } \ x \prec y \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

is $\prec$-recursive. Consequently, in the definition of the nested $\prec$-recursive function, we can restrict definition by nested recursion to the case where $\mathfrak{t}_j$ in (1) is of the form $[\mathfrak{t}_j]_{y'}$. In this case, the formulas (1) hold independently of the

interpretation of the function constants in $\mathfrak{t}_j$. Similarly, assuming condition (i), we can dispense with the non-effective condition (1′) in the ordinal recursion schema by using instead of (2) the schema

$$\text{(2')}\qquad \begin{aligned} \varphi(\hat{x}, 0) &= \psi(\hat{x}) \\ \varphi(\hat{x}, y') &= \chi\big(\hat{x}, y', \varphi(\hat{x}, [\theta(\hat{x}, y')]_{y'})\big)\,, \end{aligned}$$

which defines a function φ for all ψ, χ and θ ([5], p. 43).

2. Theorem 2. *If $\prec$ satisfies conditions* (i), (ii) *and* (iii) *of* 1.2, *then nested recursion on $\prec$ is reducible to $\prec^*$-recursion.*

It will suffice to show that if φ is defined by nested recursion uniformly in $\Psi = \{\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$, then φ is $\prec^*$-recursive uniformly in Ψ. I.e., let "$\mathfrak{t}(\hat{a}, b)$" stand for a numerical term built up out of the variables $a_1, \ldots, a_m, b$, the constants $0, {}', h$, and the function letters $f_1, \ldots, f_r$ and f, where $h(x, y) = [y]_x$ is the bounding function for $\prec$, and f occurs in $\mathfrak{t}(\hat{a}, b)$ only in contexts of the form

$$\text{(10)}\qquad f(\hat{\mathfrak{t}}, h(b', \mathfrak{l}))\,.$$

Then we must show that the equations

$$\text{(11)}\qquad \begin{cases} f(\hat{a}, 0) = g(\hat{a}) \\ f(\hat{a}, b') = \mathfrak{t}(\hat{a}, b) \end{cases}$$

determine a function φ (as the value of f) uniformly $\prec^*$-recursive in $\Psi = \{\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ (as the values of $g, f_1, \ldots, f_r$, respectively).

2.1. By one of the usual methods, a Gödel number $gn(\mathfrak{b})$ is assigned to each constant numerical term $\mathfrak{b}$ built up out of $0, {}', f_1, \ldots, f_r, g, h$ and f. If such a term $\mathfrak{b}$ contains f only in contexts of the form

$$\text{(12)}\qquad f(\hat{\mathfrak{t}}, h(0^{(n)}, \mathfrak{l}))$$

(where $0^{(n)}$, $n \geqq 0$, denotes 0 followed by n successor symbols ′), we call $\mathfrak{b}$ a *normal term (n.t.)*. A n.t. of the form (12), itself, will be called an *f-term*, and a n.t. which contains no occurrences of f will be called a *proper term*.

Relative to the interpretation Ψ of the function letters $g, f_1, \ldots, f_r$, each proper term $\mathfrak{b}$ denotes a unique number $\bar{\mathfrak{b}}$. We set $\theta(gn(\mathfrak{b})) = \bar{\mathfrak{b}}$, and $\theta(x) = 0$ whenever x is not the Gödel number of a proper term. It is clear that θ is primitive recursive uniformly in Ψ and $[x]_y$, and therefore, since $\prec$ is standard, $\prec$-recursive uniformly in Ψ.

2.2. Let $\mathfrak{b}$ be a n.t. containing at least one f-term

$$\text{(13)}\qquad f(\hat{\mathfrak{t}}, \mathfrak{l})\,,$$

where $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_m$ and $\mathfrak{l}$ are proper terms. Then $\mathfrak{b}$ is said to be *reducible*, and $\mathfrak{b}^+$ is called a *reduction* of $\mathfrak{b}$ if it is the term with least Gödel number which results from replacing exactly one occurrence of an f-term of the form (13) in $\mathfrak{b}$ (with $\hat{\mathfrak{t}}$ and $\mathfrak{l}$ proper) by

$$\text{(I)}\qquad g(\hat{\mathfrak{t}})\,, \quad \text{if} \quad \theta(gn(\mathfrak{l})) = 0$$

$$\text{(II)}\qquad \mathfrak{t}(\hat{\mathfrak{t}}, 0^{(n)})\,, \quad \text{if} \quad \theta(gn(\mathfrak{l})) = n + 1\,.$$

Thus, relative to the equations (11) and the interpretation Ψ, the equation $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^+$ holds. Each reducible n.t. $\mathfrak{h}$ has a unique reduction $\mathfrak{h}^+$ which is also a n.t. (This is evident if it is recalled that $\mathfrak{t}(\hat{\mathfrak{t}}, 0^{(n)})$ can contain f only in contexts $f(\hat{\mathfrak{t}}_1, h(0^{(n')}, \mathfrak{l}_1))$.) The property

$$R(x) \cdot\equiv\cdot\ x \text{ is the Gödel number of a reducible n.t.},$$

and the function η defined by

$$\eta(x) = \begin{cases} gn(\mathfrak{h}^+), & \text{if} \quad x = gn(\mathfrak{h}) \text{ and } \mathfrak{h}^+ \text{ is the reduction of } \mathfrak{h}\,, \\ 0, & \text{if} \quad \sim R(x) \end{cases}$$

are clearly $\prec$-recursive uniformly in Ψ. If $\mathfrak{h}$ is a n.t., then $\sim R(gn(\mathfrak{h}))$ just in case $\mathfrak{h}$ is proper.

2.3. Let $\prec$ be of type α, and let $\nu(x)$ be the ordinal $< \alpha$ represented by x in the ordering $\prec$. To each f-term (12), we assign the ordinal number $\gamma < \omega^\alpha$ where, if p is the number of occurrences of f in $\mathfrak{t}(\hat{a}, b)$,

$$\gamma = \begin{cases} \omega^\nu[\theta(gn(h(0^{(n)}, \mathfrak{l})))] \cdot p, & \text{if} \quad \mathfrak{l} \text{ is proper} \\ \omega^{\nu(n)}, & \text{if} \quad \mathfrak{l} \text{ is improper}\,. \end{cases}$$

Let $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_s$ $(s \geqq 0)$ be all the distinct occurrences of f-terms in the n.t. $\mathfrak{h}$. (Note that the $\mathfrak{f}_j$ need not be distinct terms.) Let $\gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \cdots \leqq \gamma_s$ be the ordinals associated with these f-terms, respectively. We define $\xi(gn(\mathfrak{h}))$ to be the number which represents the ordinal $\gamma_s + \cdots + \gamma_2 + \gamma_1 < \omega^\alpha$ in the ordering $\prec^*$, and we set $\xi(x) = 0$ if x is not the Gödel number of a n.t. Note that if $\mathfrak{h}$ contains no f-terms, $\xi(gn(\mathfrak{h})) = 0$. It is evident that ξ is $\prec$-recursive uniformly in Ψ.

Lemma 2. *If* $\xi(x) = 0$, *then* $\xi(\eta(x)) = 0$; *if* $\xi(x) > 0$, *then* $\xi(\eta(x)) \prec^* \xi(x)$.

Indeed, if $\sim R(x)$, then $\xi(\eta(x)) = \xi(x) = 0$. This proves the first part of the lemma, since if $\xi(x) = 0$, then $\sim R(x)$. It suffices then to show that if $\mathfrak{h}^+$ is the reduction of the n.t. $\mathfrak{h}$, then $\xi(gn(\mathfrak{h}^+)) \prec^* \xi(gn(\mathfrak{h}))$.

Let $\mathfrak{h}^+$ be obtained from $\mathfrak{h}$ by replacing a single occurrence $\mathfrak{s}$ of (13) in $\mathfrak{h}$ by the term $\mathfrak{u}$ (determined by conditions (I) and (II)). Let $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_s$ be all the occurrences of f-terms in $\mathfrak{h}$, with corresponding ordinals $\gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \cdots \leqq \gamma_s < \alpha$. Then the occurrences of f-terms in $\mathfrak{h}^+$ can be listed in the form $\mathfrak{f}_{11}, \ldots, \mathfrak{f}_{1t_1}, \mathfrak{f}_{21}, \ldots, \mathfrak{f}_{2t_2}, \ldots, \mathfrak{f}_{s1}, \ldots, \mathfrak{f}_{st_s}$, with ordinals $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{st_s}$, respectively, where

(a) If $\mathfrak{f}_j$ does not contain $\mathfrak{s}$, then $t_j = 1$, $\mathfrak{f}_{j1}$ is $\mathfrak{f}_j$, and consequently, $\gamma_{j1} = \gamma_j$;

(b) If $\mathfrak{f}_j$ contains $\mathfrak{s}$ but is not identical with it, then $t_j = 1$ and $\mathfrak{f}_{j1}$ is the result of replacing $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{f}_j$ by $\mathfrak{u}$. If $\mathfrak{f}_j$ is $f(\hat{\mathfrak{t}}_1, h(0^{(k)}, \mathfrak{l}_1))$ for some k. Then $\mathfrak{f}_{j1}$ is of the form $f(\hat{\mathfrak{t}}_2, h(0^{(k)}, \mathfrak{l}_2))$, and, either $\mathfrak{l}_1$ is proper in which case $\mathfrak{l}_2$ is $\mathfrak{l}_1$ and $\gamma_{j1} = \gamma_j$, or $\mathfrak{l}_1$ is improper and $\gamma_1 = \omega^{\nu(k)} \geqq \gamma_{j1}$.

(c) If $\mathfrak{f}_j$ is $\mathfrak{s}$, then either $\theta(gn(\mathfrak{l})) = 0$ and $t_j = 0$, or $\theta(gn(\mathfrak{l})) = n + 1$, $t_j = p$ and the $\mathfrak{f}_{ji}$ are the p occurrences of f-terms in $\mathfrak{t}(\hat{\mathfrak{t}}, 0^{(n)})$. Let $\mathfrak{f}_{ji}$ be $f(\hat{\mathfrak{t}}_i, h(0^{(n')}, \mathfrak{l}_i))$. If $\mathfrak{l}_i$ is proper, then $\gamma_{ji} = \omega^\nu[\theta(gn(h(0^{(n')}, \mathfrak{l}_i)))] \cdot p < \omega^{\nu(n')} = \gamma_j$. If $\mathfrak{l}_i$ is improper, then $\gamma_{ji} = \omega^{\nu(n')}$, but (if $p > 0$) at most $p - 1$ of the $\mathfrak{l}_i$ are improper (since if $\mathfrak{l}_i$ is improper, there is an $\mathfrak{f}_{jk}$ in it where $\mathfrak{l}_k$ is proper). Thus, if we list the $\mathfrak{f}_{ji}$ so that $\gamma_{j1} \leqq \gamma_{j2} \leqq \cdots \gamma_{jt_j}$, then $\gamma_{jt_j} + \cdots + \gamma_{j2} + \gamma_{j1} < \gamma_j$.

From this it follows that $\xi(gn(\mathfrak{h}^+))$, i.e., the sum of the $t_1 + t_2 + \cdots + t_s$ ordinals γ_{ji} in decreasing order is strictly less than $\gamma_s + \cdots + \gamma_2 + \gamma_1 = \xi(gn(\mathfrak{h}))$.

2.4. We define the iteration function for η by

$$\eta(0, y) = y, \eta(x', y) = \eta(x, \eta(y)).$$

Thus, if x is the Gödel number of a n.t. $\mathfrak{h}_0$, and for $j = 1, \ldots, n-1$, $\mathfrak{h}_{j+1}$ is the reduction of $\mathfrak{h}_j$, then $\eta(n, x)$ is the Gödel number of $\mathfrak{h}_n$. We now need a function τ which, applied to the Gödel number of $\mathfrak{h}_0$, will yield the (unique) n such that $\mathfrak{h}_n$ is proper. First, define

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{if } \sim R(y) \\ 1 + \varrho([\xi(\eta(y))]^*_x, \eta(y)), & \text{if } R(y), \end{cases} \tag{14}$$

where $[u]^*_v$ is the bounding function for $\prec^*$, and then set

$$\tau(y) = \varrho(\xi(y), y).$$

Now, τ is $\prec^*$-recursive uniformly in Ψ if ϱ is R, ξ, η and $[u]^*_v$ are all $\prec^*$-recursive uniformly in Ψ (indeed, are $\prec$-recursive uniformly in Ψ), but (14) is not quite the form of a $\prec^*$-recursion, since "$\eta(y)$" is substituted for "y" on the right-hand side. However, write

$$\varrho_1(x) = \varrho(\varkappa_1(x), \varkappa_2(x)),$$

and

$$\delta(x) = \varkappa([\xi(\eta(\varkappa_2(x)))]^*_{\varkappa_1(x)}, \eta(\varkappa_2(x))),$$

then δ is $\prec^*$-recursive uniformly in Ψ, and

$$\delta(x') \prec \otimes \prec^* x'.$$

Then, since

$$\varrho_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } \sim R(\varkappa_2(x)), \\ 1 + \varrho_1(\delta(x)), & \text{if } R(\varkappa_2(x)), \end{cases}$$

ϱ_1 is $\prec \otimes \prec^*$-recursive and therefore $\prec^*$-recursive uniformly in Ψ (by Lemma 1). Then, since $\varrho(x, y) = \varrho_1(\varkappa(x, y))$, ϱ is $\prec^*$-recursive uniformly in Ψ.

Lemma 3. *If $\mathfrak{h}$ is a n.t., then $\eta[\tau(gn(\mathfrak{h})), gn(\mathfrak{h})]$ is the Gödel number of a proper n.t. obtained from $\mathfrak{h}$ by a finite (null if $\mathfrak{h}$ is proper) sequence of reductions.*

We prove the lemma by induction on $\xi(\mathfrak{h})$. If $\mathfrak{h}$ is proper, then $\sim R(gn(\mathfrak{h}))$, and therefore, $\tau(gn(\mathfrak{h})) = \varrho[\xi(gn(\mathfrak{h})), gn(\mathfrak{h})] = 0$ and $\eta(\tau(gn(\mathfrak{h})), gn(\mathfrak{h})) = \eta(0, gn(\mathfrak{h})) = gn(\mathfrak{h})$. If $\mathfrak{h}$ is not proper, then it has a reduction $\mathfrak{h}^+$. Let $k = gn(\mathfrak{h})$, $k^+ = gn(\mathfrak{h}^+)$. By Lemma 2, $\xi(k^+) \prec^* \xi(k)$, and therefore, by the induction hypothesis, $\eta(\tau(k^+), k^+)$ is the Gödel number of a proper term $\mathfrak{h}^{++}$ obtained from $\mathfrak{h}^+$ by a sequence of reductions. Hence, $\mathfrak{h}^{++}$ is obtained from $\mathfrak{h}$ by a sequence of reductions, and

$$\begin{aligned} \tau(k) = \tau(\xi(k), k) &= 1 + \tau([\xi(k^+)]^*_{\xi(k)}, k^+) \\ &= 1 + \tau(\xi(k^+), k^+) = 1 + \tau(k^+) \end{aligned}$$

Therefore,

$$\eta(\tau(k), k) = \eta(\tau(k^+) + 1, k) = \eta(\tau(k^+), k^+) = gn(\mathfrak{h}^{++}).$$

This completes the proof of Lemma 3.

The required expression now for φ in terms of the Ψ is evident. Let $\gamma(\hat{x}, y)$ be the Gödel number of the n.t. $f(0^{(x_1)}, \ldots, 0^{(x_m)}, h(0^{(y)}, 0^{(y)}))$ (rather than of $f(0^{(x_1)}, \ldots, 0^{(x_m)}, 0^{(y)})$, which is not a n.t.). Then γ is primitive recursive, and

$$\varphi(\hat{x}, y) = \theta[\eta(\tau(\gamma(\hat{x}, y)), \gamma(\hat{x}, y))].$$

This completes the proof of Theorem 2.

3. A slight modification of the argument in § 2 yields a new proof of

Theorem 3. *Nested recursion on $<$ is reducible to primitive recursion* [8].

Again, let φ (as the value of f) be defined by the nested recursion (10) on $<$ uniformly in Ψ (as the values of $g, f_1, \ldots, f_r$). The construction of an ordinal recursive definition for φ in Ψ remains essentially the same, except that instead of the function ξ satisfying Lemma 2, we define a function ξ_1 satisfying

Lemma 4. *If $\xi_1(x) = 0$, then $\xi_1(\eta(x)) = 0$; if $\xi_1(x) > 0$, then $\xi_1(x) > \xi_1(\eta(x))$.*

Let

$$\beta(0) = 0,\ \beta(y') = p^2 \cdot \beta(y) + 1 .$$

To each f-term (11), we assign the number $p \cdot \beta[\theta(gn(\mathfrak{l}))]$ if $\mathfrak{l}$ is proper, and otherwise the number $\beta(n)$. Let $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_s$ $(s \geqq 0)$ be all the distinct occurrences of f-terms in the n.t. $\mathfrak{h}$, and let $m_1, \ldots, m_s$ be the numbers associated with these terms, respectively. Then

$$\xi_1(gn(\mathfrak{h})) = m_1 + \cdots + m_s;$$

and if x is not the Gödel number of a n.t., $\xi_1(x) = 0$.

As in the case of Lemma 2, to prove Lemma 4, we need to show that if $\mathfrak{h}^+$ is a reduction of $\mathfrak{h}$, then $\xi_1(gn(\mathfrak{h}^+)) < \xi_1(gn(\mathfrak{h}))$. Again, if $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_s$ are the occurrences of f-terms in $\mathfrak{h}$ with associated numbers $m_1, \ldots, m_s$, respectively, then the occurrences of f-terms in $\mathfrak{h}^+$ can be listed in the form $\mathfrak{f}_{11}, \ldots, \mathfrak{f}_{1t_1}, \mathfrak{f}_{21}, \ldots, \mathfrak{f}_{st_s}$ with the associated numbers $m_{11}, \ldots, m_{1t_1}, m_{21}, \ldots, m_{st_s}$, respectively, where (supposing that $\mathfrak{h}^+$ is obtained by replacing an occurrence $\mathfrak{s}$ of (13) in $\mathfrak{h}$ according to (I) and (II))

(a′) If $\mathfrak{f}_j$ does not contain $\mathfrak{s}$, then $t_j = 1$, $\mathfrak{f}_{j1}$ is $\mathfrak{f}_j$, and $m_{j1} = m_j$.

(b′) If $\mathfrak{f}_j$ contains $\mathfrak{s}$ but does not coincide with it, then $t_j = 1$ and $\mathfrak{f}_{j1}$ results from replacing $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{f}_j$ by a certain term $\mathfrak{u}$. Just as in (b), we can conclude that $m_{j1} \leqq m_j$.

(c′) If $\mathfrak{f}_j$ is $\mathfrak{s}$, then either $\theta(gn(\mathfrak{l})) = 0$ and $t_j = 0$, or $\theta(gn(\mathfrak{l})) = n + 1$, $t_j = p$ and the $\mathfrak{f}_{ji}$ are the p occurrences of f-terms in $\mathfrak{t}(\mathfrak{k}, 0^{(n)})$. Let $\mathfrak{f}_{ji}$ be $f(\mathfrak{k}_{i,k}(0^{(n')}, \mathfrak{l}_i))$. If $\mathfrak{l}_i$ is proper, then $m_{ji} = p.\ \beta[\theta(gn(h(0^{(n')}, \mathfrak{l}_i)))] \leqq p \cdot \beta(n)$. If $\mathfrak{l}_i$ is improper, then $m_{ji} = \beta(n')$. Since there are at most $p - 1$ improper $\mathfrak{l}_i$ and at most p proper $\mathfrak{l}_i$, we have in this case $m_{j1} + \cdots + m_{jt_j} \leqq (p-1) \cdot \beta(n') + p^2 \cdot \beta(n) < < p \cdot \beta(n')$.

Therefore $\xi_1(gn(\mathfrak{h}^+)) = m_{11} + \cdots + m_{st_s} < m_1 + \cdots + m_s = \xi_1(gn(\mathfrak{h}))$.

The remainder of the proof of Theorem 3 is exactly like that of Theorem 2.

4. Consider again the nested recursion (11). A n.t. $\mathfrak{h}$ will be called a *regular term (r.t.)* if it contains no f-terms $f(\hat{\mathfrak{k}}, \mathfrak{l})$ where $\mathfrak{l}$ is improper. A term $\mathfrak{h}^+$ is called an *immediate derivative* of a n.t. $\mathfrak{h}$ if it results from replacing a part $f(\hat{\mathfrak{k}}, \mathfrak{l})$ of $\mathfrak{h}$, where $\mathfrak{l}$ is proper, by a term $\mathfrak{u}$ where $\mathfrak{u}$ is determined by the con-

ditions (I) and (II) of 2.2. If $\mathfrak{h}_{j+1}$ is an immediate derivative of $\mathfrak{h}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, then we say that $\mathfrak{h}_{n+1}$ is a *derivative* of $\mathfrak{h}_1$. The recursion (11) is called *essentially unnested* if each derivative of $f(0^{(\hat{x})}, 0^{(y)})$, for each $\hat{x}$ and y, is a r.t. By another modification of the idea of § 2, we can prove

Theorem 4. *If* (11) *is essentially unnested and* $\prec$ *satisfies* (i), (ii) *and* (iii), *then* φ *is* $\prec$*-recursive uniformly in* Ψ.

The notion of a *complete reduction* of a r.t. $\mathfrak{h}$ is defined as follows: Let $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r$ be all of the f-terms occurring in $\mathfrak{h}$, listed, say, in order of non-increasing Gödel number. We can assume (by appropriate choice of the Gödel numbering) that this means that $\mathfrak{f}_i$ never occurs in $\mathfrak{f}_{i+1}$. Let $\mathfrak{g}_0$ be $\mathfrak{h}$, and let $\mathfrak{g}_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, r-1)$ be the result of replacing each occurrence of $\mathfrak{f}_{i+1}$ in $\mathfrak{g}_i$ by a term $\mathfrak{u}_i$, according to conditions (I) and (II) in 2.2. Then $\mathfrak{g}_r$ is called the complete reduction of $\mathfrak{h}$. Note that if $\mathfrak{h}$ is a derivative of $f(0^{(\hat{x})}, 0^{(y)})$, then so is $\mathfrak{g}_r$, and so in this case $\mathfrak{g}_r$ is a r.t.

In place of the function ξ, we define ξ_2 as follows: If $\mathfrak{h}$ is a r.t., then $\xi_2(gn(\mathfrak{h}))$ is the maximum with respect to $\prec$ of the numbers $\theta(\mathfrak{l})$, where $f(\hat{\mathfrak{t}}, \mathfrak{l})$ occurs in $\mathfrak{h}$. If x is not the Gödel number of a r.t., then $\xi_2(x) = 0$. Then, if $\mathfrak{h}^+$ is a complete reduction of $\mathfrak{h}$, it is clear that $\xi_2(gn(\mathfrak{h}^+)) \prec \xi_2(gn(\mathfrak{h}))$. Now the argument is completely analogous to that of 2.5.

Note that the conditions of Theorem 4 are satisfied providing there are no f-terms $f(\hat{\mathfrak{t}}, \mathfrak{l})$ in $\mathfrak{t}(\hat{a}, b)$ where f occurs in any of the terms $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_m, \mathfrak{l}$. For $\prec \, = \, <$, this includes as special cases, e.g., the results of § 3 and § 5 of [9].

5. The converse of Theorem 2, namely that $\prec^*$-recursion is reducible to nested $\prec$-recursion, is not in general true, even for standard well-orderings. For example, nested $<$-recursion is reducible to primitive recursion, but $<^*$-recursion is not [9]. However, we can prove

Theorem 5. *If* $< \otimes \prec$ *satisfies conditions* (i) *and* (ii) *of* 1.2, *then* $\prec^*$*-recursion is reducible to nested recursion on* $< \otimes \prec$.

For each function θ, set (writing $\theta(u, \hat{x}, y) = \theta^u(\hat{x}, y)$)

$$\theta^0(\hat{x}, y) = y, \; \theta^{u'}(\hat{x}, y) = \theta^u(\hat{x}, \theta(\hat{x}, y)) \,.$$

Lemma 5. *For any two well-orderings* $\prec$ *and* $\prec'$ *such that* $\prec'$ *satisfies condition* (ii), $\prec$*-recursion is reducible to (nested)* $\prec'$*-recursion just in case for each* θ *satisfying* (1′) *there is a function* μ *which is (nested)* $\prec$*-recursive uniformly in* θ *such that for all* $\hat{x}$ *and* y,

$$\theta(\mu(\hat{x}, y), \hat{x}, y) = 0 \,. \tag{15}$$

Suppose that $\prec$-recursion is reducible to (nested) $\prec'$-recursion. The equations

$$\begin{cases} \mu(\hat{x}, 0) = 0 \\ \mu(\hat{x}, y') = 1 + \mu(\hat{x}, \theta(\hat{x}, y')) \end{cases}$$

define μ by $\prec$-recursion uniformly in θ, where θ satisfies (1′), and clearly (15) holds. Consequently, μ must be (nested) $\prec'$-recursive uniformly in θ (satisfying (1′)).

Conversely, suppose that μ satisfying (15) is (nested) $\prec'$-recursive in θ satisfying (1'). Let φ be defined by the ordinal recursion (2) with (1') holding. Define the successive approximations φ_n to φ by

$$\varphi_0(x, y) = \psi(x)$$

$$\varphi_{u'}(\hat{x}, y) = \begin{cases} \psi(x), & \text{if } \; y = 0 \\ \chi[\hat{x}, y', \varphi_u(\hat{x}, \theta(\hat{x}, y'))], & \text{if } \; y > 0 \,. \end{cases}$$

Then $\lambda uxy \cdot \varphi_u(\hat{x}, y)$ is primitive recursive, and therefore $\prec'$-recursive, uniformly in ψ, χ and θ. Moreover, by induction on y (with respect to $\prec$) it is easy to prove that

$$\varphi(\hat{x}, y) = \varphi_{\mu(\hat{x}, y)}(\hat{x}, y) \,.$$

To prove Theorem 5, suppose that

$$(16) \qquad (\hat{x})\,(y)\,[\theta(\hat{x}, 0) = 0 \wedge \theta(\hat{x}, y') \prec^* y] \,.$$

Let z' be represented by (4) with (5) and (6) holding, and set

$$\lambda_i(0) = 0, \, \lambda_i(z') = \prod_{j=0}^{\min(r_z, i)-1} p_{\nu(z,j)}^{z_j} \,.$$

Thus,

$$0 = \lambda_0(z') \prec^* \cdots \prec^* \lambda_{r_z+1}(z') = z' = \lambda_{r_z+z'}(z') \,.$$

Also, define

$$\varrho_i(0) = 0$$

$$\varrho_i(z') = \begin{cases} \varkappa(z_i, \nu(z, i)), & \text{if } \; i \leqq r_z \\ 0, & \text{otherwise} \,. \end{cases}$$

Then, writing $\prec^0 = < \otimes \prec$,

$$i \leqq r_z \rightarrow \varrho_{i+1}(z') \prec^0 \varrho_i(z')$$

and

$$\lambda_{i+1}(v) \prec^* \lambda_{i+1}(y) \cdot \equiv : \lambda_i(v) \prec^* \lambda_i(y) \times$$
$$\times \, V \cdot \lambda_i(v) = \lambda_i(y) \wedge \varrho_{i+1}(v) \prec^0 \varrho_i(y) \,.$$

We shall define a function $\mu_i(\hat{x}, y)$ which is nested $\prec^0$-recursive uniformly in θ (satisfying (16)), such that, writing $\bar{\mu}_i = \mu_i(\hat{x}, y)$,

$$\theta^{\bar{\mu}_i}(\hat{x}, y) = 0 \; V \; \lambda_i(\theta^{\bar{\mu}_i}(\hat{x}, y)) \prec^* \lambda_i(y) \,.$$

Then Theorem 5 is proved by setting

$$\mu(\hat{x}, y) = \mu_0(\hat{x}, y) \,;$$

and applying Lemma 5, since $\lambda_0(\theta^{\bar{\mu}_0}(\hat{x}, y)) = 0 \not\prec^* 0 = \lambda_0(y)$, and therefore, $\theta^{\bar{\mu}_0}(\hat{x}, y) = 0$.

It suffices to take

$$\mu_i(\hat{x}, y) = 1$$

if $\varrho_{i+1}(y) = 0$. Suppose that $\varrho_{i+1}(y) > 0$ and that $\mu_j(\hat{x}, v)$ is defined for all j and v such that $\varrho_{i+1}(v) \prec^0 \varrho_{i+1}(y)$. In particular then $\bar{\mu}_{i+1} = \mu_{i+1}(\hat{x}, y)$ is

defined and

$$\theta^{\bar{\mu}_{i+1}}(\hat{x}, y) = 0 \tag{17}$$

or else

$$\lambda_{i+1}(\theta^{\bar{\mu}_{i+1}}(\hat{x}, y)) <^{*} \lambda_{i+1}(y)\,. \tag{18}$$

If (17) holds, we can set

$$\mu_i(\hat{x}, y) = \bar{\mu}_{i+1} + K$$

for any constant K; if (18) holds, then either

$$\lambda_i[\theta^{\bar{\mu}_{i+1}}(\hat{x}, y)] <^{*} \lambda_i(y) \tag{19}$$

or else

$$\varrho_{i+1}(\theta^{\bar{\mu}_{i+1}}(\hat{x}, y)) <^{0} \varrho_{i+1}(y)\,. \tag{20}$$

If (19) holds, then again we can define $\mu_i(\hat{x}, y) = \bar{\mu}_{i+1} + K$. If (20) holds, then $\mu_i(\hat{x}, \theta^{\bar{\mu}_{i+1}}(\hat{x}, y)) = \bar{\mu}_i$ is defined and

$$\theta^{\bar{\mu}_i + \bar{\mu}_{i+1}}(\hat{x}, y) = \theta^{\bar{\mu}_i}(\hat{x}, \theta^{\bar{\mu}_{i+1}}(\hat{x}, y)) = 0$$

or

$$\lambda_i[\theta^{\bar{\mu}_i + \bar{\mu}_{i+1}}(\hat{x}, y)] <^{*} \lambda_i[\theta^{\bar{\mu}_{i+1}}(\hat{x}, y)] <^{*} \lambda_i(y)\,.$$

Thus, in case of (20), we can set

$$\mu_i(\hat{x}, y) = \bar{\mu}_i + \bar{\mu}_{i+1}. \tag{21}$$

To put this definition in the form of a nested $<^0$-recursion, we write $[x]^0_y$ for the bounding function of $<^0$. By assumption this is $<^0$-recursive. Define

$$\nu_i(0, \hat{x}, y) = 1$$

$$\nu_i(u', \hat{x}, y) = \bar{\nu}_{i+1} + \nu_i\{[\varrho_{i+1}(\theta^{\bar{\nu}_{i+1}}(\hat{x}, y))]^0_{u'}, \hat{x}, \theta^{\bar{\nu}_{i+1}}(\hat{x}, y)\}\,,$$

where

$$\bar{\nu}_{i+1} = \nu_{i+1}([\varrho_{i+2}(y)]^0_{u'}, \hat{x}, y)\,.$$

Then $\nu(i, u, \hat{x}, y) = \nu_i(u, \hat{x}, y)$ is nested $<^0$-recursive, and

$$\mu_i(\hat{x}, y) = \nu_i(\varrho_{i+1}(y), \hat{x}, y)\,.$$

Corollary. *If $\prec$ is a standard well-ordering of type $\alpha = \omega \cdot \alpha$, e.g., if $\prec$ is of the form $\prec'_{n+1}$, where $\prec'$ is standard, then $\prec^{*}$-recursion is reducible to nested $\prec$-recursion*[3]).

Note that if the hypothesis of the Corollary holds, then there is a normal form for nested recursion on $\prec$. Indeed, nested $\prec$-recursion is reducible to $\prec^{*}$-recursion (Theorem 2), and this in turn reduces to nested recursion on $\prec$ where the recursion equations are just those needed to translate (22) into nested recursion on $\prec$. In particular, if there is a similarity mapping π of $\prec$

---

[3]) This yields another derivation of the induction principle for the orderings $<_n$ in Z_μ. From the premiss $(y)\,[y <_{n+1} x \to A(y)] \to A(x)$ we can obtain a function θ for which (1′) and the formula $A(\theta(x)) \to A(x)$ are derivable. Set $\nu(0) = 0$, $\nu(x') = 1 + \nu(\theta(x))$. This is a $<_{n+1}$-recursion, and therefore a nested $<_n$-recursion, so that the equations for ν can be proved in Z_μ (see the discussion of this in the introduction). Now, it is easy to prove by induction on y (with respect to $<$) that $A(\theta^{\nu(x)-\nu(y)}(x))$, and since $x = \theta^{\nu(x)-\nu(x)}$, we obtain $A(x)$.

onto $\prec^0$ such that π and $\bar{\pi}$ are $\prec$-recursive (e.g., when $\prec$ is of the form $\prec'_{n+1}$, where $\prec'$ is standard), then the normal form is (22) with "$[x]_y^0$" replaced by "$[x]_y$".

We have no general results concerning the possibility of reducing $\prec^*$-recursion or nested $\prec$-recursion to $\prec$-recursion. E.g., for $\prec = <$, the former is not possible [9], but the latter is. If we define

$$x <_\omega y \cdot\equiv\cdot \varkappa_1(x) < \varkappa_1(y) \cdot V \cdot \varkappa_1(x) = \varkappa_1(y) \wedge \varkappa_2(x) <_{\varkappa_1(x)} \varkappa_2(y)\,,$$

then $<_\omega$ is of type ε_0, and so is $<^*_\omega$. Moreover, the similarity mapping of $<_\omega$ onto $<^*_\omega$ and its inverse are primitive recursive. Now, nested $<_\omega$-recursion is reducible to $<^*_\omega$-recursion, which by Lemma 1 is equivalent to $<_\omega$-recursion.

Using the method of [9], § 11, we can construct, for standard $\prec$, a function φ which is nested recursive in $\prec \otimes \prec$ such that $\lambda x \cdot \varphi(n, x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ enumerates all $\prec$-recursive functions, but it is not clear under what conditions φ is $\prec^*$-recursive.

References

[1] ACKERMANN, W.: Zur Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math. Ann. **117**, 162—194 (1940).

[2] GENTZEN, G.: Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. Math. Ann. **119**, 140—161 (1943/1944).

[3] HILBERT, D., and P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik, vol. II. Berlin 1939.

[4] KLEENE, S. C.: Introduction to Metamathematics. New York 1952.

[5] KREISEL, G.: On the interpretation of non-finitist proofs II. J. Symbolic Logic **17**, 43—58 (1952).

[6] KREISEL, G.: Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof. Proc. Intern. Congress of Mathematicians (1958).

[7] MYHILL, J.: A Stumblingblock in Constructive Mathematics (Abstract), J. Symbolic Logic **18**, 190 (1953).

[8] PÉTER, R.: Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion. Math. Ann. **110**, 612—632 (1934).

[9] PÉTER, R.: Rekursive Funktionen (2nd edition). Budapest 1957.

[10] ROUTLEDGE, N. A.: Ordinal recursion. Proc. Cambridge Philos. Soc., **49**, 175—182 (1953).

(Received September 12, 1960)

NEUBAUER, G.
Math. Annalen 143, 251—263 (1961)

Zur Spektraltheorie in lokalkonvexen Algebren II

Von

GERHARD NEUBAUER in Heidelberg

Einleitung

In [3] wurde ein Funktionalkalkül für Elemente lokalkonvexer Algebren angegeben. Dabei wurden Funktionen zum Kalkül zugelassen, die wesentliche Singularitäten in allen den Punkten des Spektrums $\sigma(a)$ haben durften, in denen die Resolvente existierte und in jede überall konvergente Potenzreihe substituiert werden konnte. Wo die Resolvente die letzte Bedingung nicht erfüllte, wurden nur Pole, also endliche Laurententwicklungen zugelassen.

Nun ist es möglich, daß in einem solchen Punkte zwar nicht alle, aber doch gewisse nicht abbrechende Laurentreihen konvergieren, wenn man die Resolvente einsetzt. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Algebra der zum Kalkül zugelassenen Funktionen um eine möglichst große Klasse solcher Funktionen zu erweitern, so daß wieder eine Algebra mit stetiger Multiplikation entsteht, auf der der Operator U (s. [3], Def. 5.1) stetig ist. Dies geschieht in § 9 und § 10 und man erhält wieder einen Homomorphiesatz (11.3). Für die durch den erweiterten Kalkül definierten Spektralmengen ergibt sich, wenn auch nicht für alle Funktionen, ein Spektralabbildungssatz (11.4) und unter den gleichen Einschränkungen gilt auch ein Schachtelsatz (11.5).

Definitionen und Ergebnisse aus [3] werden durchweg vorausgesetzt. Um die Rückverweise zu erleichtern, schließt sich die Numerierung der Paragraphen an die von [3] an.

9. Die Algebren $\hat{\Phi}(\hat{\Sigma}, \mathscr{A}; \Sigma)$

Σ sei eine kompakte (nicht notwendig echte) Teilmenge der komplexen Vollebene Ω, $\hat{\Sigma}$ eine beliebige Teilmenge von Σ.

9.1. Definition. *$\mathscr{A}(\lambda)$ sei eine Menge von Folgen positiver Zahlen ϱ_n mit folgenden Eigenschaften:*

1. $1 \leqq \varrho_n \leqq \varrho_{n+1}$; 2. *Mit zwei Folgen $\{\varrho_n\}$ und $\{\varrho'_n\}$ gehört auch eine dritte Folge $\{\varrho''_n\}$ zu $\mathscr{A}(\lambda)$, für die $\varrho''_n \geqq \varrho_n$ und $\varrho''_n \geqq \varrho'_n$ gilt für jedes n.*

9.2. Definition. *$\Psi(\mathscr{A}(\lambda))$ besteht aus allen Folgen komplexer Zahlen $\{\alpha_n\}$, für die $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n|^{\frac{1}{\nu n}} \varrho_{\nu n} = 0$ gilt für $\{\varrho_n\} \in \mathscr{A}(\lambda)$ und $\nu = 1, 2, \ldots$.*

Aus 9.1.1 folgt für diese $\{\alpha_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n|^{\frac{1}{n}} = 0$, da $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \leqq |\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \varrho_n$.

9.3. Definition. $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\hat{\Sigma}) = \{\mathscr{A}(\lambda) \mid \lambda \in \hat{\Sigma}\}$.

9.4. Definition.

$$\hat{\Psi}(\lambda, \mathscr{A}(\lambda)) = \left\{ f(\zeta) \,\middle|\, f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\lambda - \zeta)^{-n}, \{\alpha_n\} \in \Psi(\mathscr{A}(\lambda)) \right\} \quad \text{für} \quad \lambda \neq \infty,$$

$$\hat{\Psi}(\infty, \mathscr{A}(\infty)) = \left\{ f(\zeta) \,\middle|\, f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^n, \{\alpha_n\} \in \Psi(\mathscr{A}(\infty)) \right\}.$$

Die Topologie in $\hat{\Psi}(\lambda, \mathscr{A}(\lambda))$ werde durch die Halbnormen $p = p(\{\varrho_n\}; \nu; R)$ definiert, wo $\{\varrho_n\} \in \mathscr{A}(\lambda)$, $\nu = 1, 2, \ldots, R > 0$ und $p(f) = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \varrho_{\nu n}^n R^n$.

9.5. *$\hat{\Psi}(\lambda, \mathscr{A}(\lambda))$ ist ein vollständiger separierter lokalkonvexer Vektorraum.*

Beweis: Offenbar gehört $\{\alpha_n\}$ genau dann zu $\Psi(\mathscr{A}(\lambda))$, wenn alle Reihen $p(f)$ konvergieren. $p(\alpha f + \beta g)$ konvergiert aber, wenn $p(f)$ und $p(g)$ dies tun und es ist $p(f + g) \leqq p(f) + p(g)$, $p(\alpha f) = |\alpha| p(f)$. Also ist $\hat{\Psi}(\lambda, \mathscr{A}(\lambda))$ ein lokalkonvexer Vektorraum. Wegen 9.1.1 ist $p(f) \neq 0$, wenn $\{\alpha_n\}$ nicht identisch verschwindet, $\hat{\Psi}(\lambda, \mathscr{A}(\lambda))$ also separiert. Die Vollständigkeit folgt nun in analoger Weise wie beim Banachraum der absolut konvergenten Reihen,

9.6. Definition. *Die topologische Summe*

$$\Phi(\theta; \theta; \Sigma) + \sum_{\lambda \in \hat{\Sigma}} \hat{\Psi}(\lambda, \mathscr{A}(\lambda))$$

werde mit $\hat{\Phi}(\hat{\Sigma}, \mathscr{A}; \Sigma)$ bezeichnet.

Zur Bezeichnungsweise s. Def. 3.6. Jedes Element in $\hat{\Phi}(\hat{\Sigma}, \mathscr{A}; \Sigma)$ ist also die Summe aus einer in einer Umgebung von Σ lokalholomorphen Funktion und endlich vielen Hauptteilen, die jeweils in den $\hat{\Psi}(\lambda, \mathscr{A}(\lambda))$ liegen (vgl. 8.1). Setzt man

$$\hat{\Psi}(N, \mathscr{A}(N); \Delta) = \Psi_0(\theta; \theta; \Delta) + \sum_{\lambda \in N} \hat{\Psi}(\lambda, \mathscr{A}(\lambda))$$

(s. Def. 3.1 und 3.6), so folgt hieraus und aus der Definition von $\Phi(\theta; \theta; \Sigma)$, daß $\hat{\Phi}(\hat{\Sigma}, \mathscr{A}; \Sigma)$ der induktive Limes der $\hat{\Psi}(N, \mathscr{A}(N); \Delta)$ ist, wo N alle endlichen Teilmengen von $\hat{\Sigma}$ und Δ eine Schar von Umgebungen von Σ durchläuft ($\mathscr{A}(N) = \{\mathscr{A}(\lambda) \mid \lambda \in N\}$). Nun sei in $\hat{\Phi}(\hat{\Sigma}, \mathscr{A}; \Sigma)$ die Multiplikation zweier Funktionen in der üblichen Weise eingeführt. Dann gilt:

9.7. Satz. *$\hat{\Phi}(\hat{\Sigma}, \mathscr{A}; \Sigma)$ ist eine vollständige lokalkonvexe Algebra mit stetiger Multiplikation.*

(S. § 1). Zum Beweise zwei Hilfssätze:

9.8. *$\hat{\Psi}(N, \mathscr{A}(N); \Delta)$ ist eine topologische Algebra.*

Beweis: $\hat{\Psi}(N, \mathscr{A}(N); \Delta)$ ist das topologische Produkt der Algebren A_j ($j = 1, 2, \ldots, l$), wobei $A_0 = \Psi_0(\theta, \theta; \Delta)$ und $A_j = \hat{\Psi}(\lambda_j, \mathscr{A}(\lambda_j))$ für $j \neq 0$. Sei Φ_λ die Algebra aller Hauptteile in λ (s. § 8). Dann ist $\hat{\Psi}(\lambda, \mathscr{A}(\lambda))$ (algebraisch) in Φ_λ enthalten. Sei $B_0 = A_0$, $B_j = \Phi_{\lambda_j}$ für $j \neq 0$. Es folgt $\Pi A_j \subset \Pi B_j$ (algebraisch). Das Produkt zweier Funktionen aus $\hat{\Psi}(N, \mathscr{A}(N); \Delta)$ liegt nun mit Sicherheit in ΠB_j, da keine neuen Singularitäten hinzukommen können. Zu zeigen ist, daß es schon in ΠA_j liegt und dort stetig ist. Sei E_j die Projek-

tion auf B_j. Dann genügt es zu zeigen: $E_i(fg)$ ist eine stetige bilineare Abbildung auf $A_j \times A_k$ mit Werten in A_i für alle vorkommenden Kombinationen i, j, k (wobei man die Kommutativität der Multiplikation berücksichtigen kann).

1) $i \neq 0,\ j \neq i,\ k \neq i$. Es folgt $E_i(fg) = 0$ und damit sind beide Behauptungen richtig.

2) $i \neq 0,\ k \neq j = i$. Es ist $f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\lambda_i - \zeta)^{-n}$. In einem abgeschlossenen kleinen Kreis K_ϱ mit (nur von Δ und N abhängendem) Radius ϱ um λ_i konvergiert $g(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m(\lambda_i - \zeta)^m$ gleichmäßig. Sei $M(g) = \max_{\zeta \in K_\varrho} |g(\zeta)|$. Dann ist $|\beta_m| \leq M(g)\varrho^{-m}$. Sei $\{\varrho_n\} \in \mathscr{A}(\lambda_i)$, $R > 0$, ν eine natürliche Zahl,

$p = p(\{\varrho_n\}; \nu; R)$, $(E_i(fg))(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\lambda_i - \zeta)^{-n}$. Es ist $\gamma_n = \sum_{\sigma=n}^{\infty} \alpha_\sigma \beta_{\sigma-n}$.

Ist $k = 0$, so sei $q'(g) = p_K(g)$ mit $K \in \mathscr{K}(\Theta; \Theta; \Delta)$, $K \supset K_\varrho$ (s. 3.4). Dann ist $M(g) \leq p_K(g) = q'(g)$.

Ist $k \neq 0$, δ der Abstand von λ_k zu K_ϱ, so sei $q' = p(\{\varrho'_n\}; 1; R_1)$, wobei $\{\varrho'_n\}$ beliebig aus $\mathscr{A}(\lambda_k)$ und $R_1 \geq (\varrho'_1\delta)^{-1}$ gewählt sei. Dann ist für $\zeta \in K_\varrho$ $|g(\zeta)| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m(\lambda_k - \zeta)^{-m}\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |\delta_m|\delta^{-m} \leq \sum_{m=1}^{\infty} |\delta_m| \varrho'^{m}_{m} R_1^m = q'(g)$. Es gilt also auch hier $M(g) \leq q'(g)$.

Sei $q = p(\{\varrho_n\}; \nu; R_2)$, wo $R_2 = \max(R, 2\varrho^{-1})$. Es folgt

$$\sum_{n=1}^{n_0} |\gamma_n| \varrho_{\nu n}^{\nu n} R^n \leq \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{\sigma=n}^{\infty} |\alpha_\sigma|\,|\beta_{\sigma-n}| \varrho_{\nu n}^{\nu n} R_2^n \leq$$

$$\leq \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\sigma} |\alpha_\sigma|\,|\beta_{\sigma-n}| \varrho_{\nu\sigma}^{\nu\sigma} R_2^\sigma R_2^{n-\sigma} \leq$$

$$\leq \sum_{\sigma=1}^{\infty} |\alpha_\sigma| \varrho_{\nu\sigma}^{\nu\sigma} R_2^\sigma \sum_{m=0}^{\infty} |\beta_m| R_2^{-m} \leq q(f) \sum_{m=0}^{\infty} M(g)\varrho^{-m} R_2^{-m} \leq$$

$$\leq q(f) \sum_{m=0}^{\infty} M(g) 2^{-m} \leq 2q(f)\,q'(g)\,.$$

Es folgt, daß $\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| \varrho_{\nu n}^{\nu n} R^n$ konvergiert. Also liegt $\{\gamma_n\}$ in $\Psi(\mathscr{A}(\lambda_i))$ und $E_i(fg)$ in A_i. Schließlich ergibt die Ungleichung noch $p(E_i(fg)) \leq 2q(f)\,q'(g)$ und damit die Stetigkeit.

3) $i = j = k \neq 0$.

$$f(\zeta) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \alpha_\sigma(\lambda_i - \zeta)^{-\sigma},\quad g(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m(\lambda_i - \zeta)^{-m},$$

$$(E_i(fg))(\zeta) = (fg)(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\lambda_i - \zeta)^{-n},\quad \gamma_n = \sum_{\sigma=1}^{n-1} \alpha_\sigma \beta_{n-\sigma}.$$

Sei $\{\varrho_n\} \in \mathscr{A}(\lambda_i)$, ν eine natürliche Zahl, $R > 0$, $R_1 = \max(R, 1)$. $p = p(\{\varrho_n\}; \nu; R)$,

$q = p(\{\varrho_n\}; 2\nu; R_1^2)$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{n_0} |\gamma_n| \varrho_{\nu n}^{\nu n} R^n \leq \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{\sigma=1}^{n-1} |\alpha_\sigma| \, |\beta_{n-\sigma}| \, \varrho_{\nu n}^{\nu n} R_1^n \leq$$
$$\leq \sum_{m=1}^{n_0} |\beta_m| \sum_{\sigma=1}^{n_0} |\alpha_\sigma| \, \varrho_{\nu(m+\sigma)}^{\nu(m+\sigma)} R_1^{m+\sigma} .$$

Es gilt

$$\sum |\alpha_\sigma| \leq \sum |\alpha_\sigma| \, \varrho_{2\nu\sigma}^{2\nu\sigma} R_1^{2\sigma}$$

und entsprechendes für $|\beta_m|$. Damit folgt

$$\sum_{n=1}^{n_0} |\gamma_n| \varrho_{\nu n}^{\nu n} R_1^n \leq$$
$$\leq \sum_{m=1}^{n_0} |\beta_m| \sum_{\sigma=m+1}^{n_0} |\alpha_\sigma| \, \varrho_{\nu(m+\sigma)}^{\nu(m+\sigma)} R_1^{m+\sigma} + \sum_{\sigma=1}^{n_0} |\alpha_\sigma| \sum_{m=\sigma}^{n_0} |\beta_m| \, \varrho_{\nu(m+\sigma)}^{\nu(m+\sigma)} R_1^{m+\sigma} \leq$$
$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} |\beta_m| \sum_{\sigma=m+1}^{\infty} |\alpha_\sigma| \, \varrho_{2\nu\sigma}^{2\nu\sigma} R_1^{2\sigma} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} |\alpha_\sigma| \sum_{m=\sigma}^{\infty} |\beta_m| \, \varrho_{2\nu m}^{2\nu m} R_1^{2m} \leq$$
$$\leq 2q(f)\, q(g) .$$

Also konvergiert $\sum |\gamma_n| \varrho_{\nu n}^{\nu n} R^n$, d. h. $fg \in A_i$ und $p(fg) \leq 2q(f)\, q(g)$, die Multiplikation ist in A_i stetig.

4) $i = 0$. Da $B_0 = A_0$, bleibt nur die Stetigkeit zu zeigen. Sei $p = p_K$ eine Halbnorm in $A_0(K \in \mathscr{K}(\theta; \theta; \Delta))$. $M(f) = \max\limits_{\zeta \in \Gamma(K)} |f(\zeta)|$. Es lassen sich wie in 2) Halbnormen q_1 bzw. q_1' in A_j bzw. A_k angeben, so daß $M(f) \leq q_1(f)$, $M(g) \leq q_1'(g)$, da der Abstand von $\Gamma(K)$ zu allen λ_j positiv ist. fg hat außer in A_0 höchstens noch Komponenten in A_j und A_k. Nach 2) und 3) gibt es Halbnormen q_2 bzw. q_2' in A_j bzw. A_k, so daß $q_1(E_j(fg)) \leq 2q_2(f)\, q_2'(g)$ bzw. $q_1'(E_k(fg)) \leq 2q_2(f)\, q_2'(g)$ falls $j \neq 0$, bzw. $k \neq 0$. Nun ist $E_0(fg) = fg - \sum\limits_m E_m(fg)$, wo m höchstens zwei Indizes durchläuft. Also ist

$$p(E_0(fg)) = p_K(E_0(fg)) = M(E_0(fg)) \leq$$
$$\leq M(fg) + \sum_m M(E_m(fg)) \leq q_1(f)\, q_1'(g) + 4q_2(f)\, q_2'(g) .$$

Damit ist der Satz insgesamt bewiesen. Der Fall $\lambda_j = \infty$ wurde nirgends gesondert behandelt, da der Beweis völlig analog verläuft.

9.9. *Sei A der induktive Limes einer Familie A_α von Algebren mit stetiger Multiplikation. Die Multiplikation in A_α ($\alpha \prec \beta$) stimme dort mit der durch A_β definierten überein. Dann ist A eine Algebra mit stetiger Multiplikation.*

Beweis: Die Übereinstimmung der Multiplikationsdefinition in A_α und A_β sichert eine eindeutige Definition der Multiplikation in A. Sei nun die Abbildung $x \to ax$ (bzw. $x \to xa$) von A in A betrachtet (für festes a). Es genügt die Stetigkeit der Abbildung auf jedem A_α zu zeigen[1]). Nun liegt a in einem A_β, also ax in einem $A_\gamma (\alpha \prec \gamma, \beta \prec \gamma)$. Die Topologie in A_γ ist feiner als die von A induzierte, also genügt es, die Stetigkeit der Abbildung von A_α in A_γ zu beweisen. Da andererseits nach Voraussetzung diese Abbildung ein stetiger

---

[1]) BOURBAKI [2], p. 62.

Endomorphismus von A_γ ist, folgt damit die Behauptung, da die von A_γ in A_α induzierte Topologie gröber ist als die von A_α.

Beweis zu 9.7*:* Aus 9.8 und 9.9 folgt alles bis auf die Vollständigkeit. Diese ergibt sich aber aus 9.6, 9.5 und der Vollständigkeit von $\Phi(\theta; \vartheta; \Sigma)$ (s. § 8).

Zum Schluß dieses Abschnittes seien noch zwei Aussagen über $\Psi(\mathscr{A}(\lambda))$ angeführt:

9.10. *Sei* $0 < t < \infty$, $\{\alpha_n\} \in \Psi(\mathscr{A}(\lambda))$. *Dann gilt auch*

$$\{|\alpha_n|^t\} \in \Psi(\mathscr{A}(\lambda)) .$$

Beweis: Es gibt ein m, so daß $\frac{1}{m} < t$. Für hinreichend großes n ist $|\alpha_n| < 1$, also $|\alpha_n|^t < |\alpha_n|^{\frac{1}{m}}$. Es genügt also, die Behauptung für $t = \frac{1}{m}$ zu zeigen. Hier gilt aber

$$\left(|\alpha_n|^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{\nu n}} \varrho_{\nu n} \leq |\alpha_n|^{\frac{1}{(\nu m) n}} \varrho_{(\nu m) n} \to 0 .$$

9.11. *Sei* $\{\alpha_n\}$ *eine Folge mit* $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \to 0$, $\tilde{\alpha}_n = \left(\max_{m \geq n} |\alpha_m|^{\frac{1}{m}}\right)^n$. *Dann gilt:* $\{\alpha_n\}$ *gehört genau dann zu* $\Psi(\mathscr{A}(\lambda))$, *wenn dies für* $\{\tilde{\alpha}_n\}$ *der Fall ist, genauer:*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, \tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{\nu n}} \varrho_{\nu n} = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, |\alpha_n|^{\frac{1}{\nu n}} \varrho_{\nu n} .$$

Beweis: 1) $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \leq \tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{n}}$, also auch $|\alpha_n|^{\frac{1}{\nu n}} \leq \tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{\nu n}}$ und damit

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, |\alpha_n|^{\frac{1}{\nu n}} \varrho_{\nu n} \leq \overline{\lim_{n \to \infty}}\, \tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{\nu n}} \varrho_{\nu n}.$$

2) Da $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \to 0$, ist $\tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{n}} = |\alpha_m|^{\frac{1}{m}}$ mit $m = m(n) \geq n$ und $m(n) \to \infty$ für $n \to \infty$. Also ist $\tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{\nu n}} \varrho_{\nu n} = |\alpha_m|^{\frac{1}{\nu m}} \varrho_{\nu n} \leq |\alpha_m|^{\frac{1}{\nu m}} \varrho_{\nu m}$ und $\overline{\lim}_{n \to \infty} \tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{\nu n}} \varrho_{\nu n} \leq$

$$\leq \overline{\lim_{n \to \infty}}\, |\alpha_{m(n)}|^{\frac{1}{\nu m(n)}} \varrho_{\nu m(n)} \leq \overline{\lim_{n \to \infty}}\, |\alpha_n|^{\frac{1}{\nu n}} \varrho_{\nu n}.$$

10. Die Algebra $\hat{\Phi}$ (a)

Sei a ein beliebiges Element von A, A wieder eine Algebra mit stetiger Multiplikation. Voraussetzungen über die Vollständigkeit von A werden wieder von Fall zu Fall gemacht. Sei $\mathscr{P}$ ein Fundamentalsystem von Halbnormen in A, $p \in \mathscr{P}$, n eine natürliche Zahl.

10.1. Definition.

1. $|a|_{p,n} = \max\left(\max_{1 \leq m \leq n} p(a^m)^{\frac{1}{m}}, 1\right)$.
2. $\mathscr{A}(\infty, a) = \{\{|a|_{p,n}\} \mid p \in \mathscr{P}\}$.
3. $\Psi(\infty, a) = \Psi(\mathscr{A}(\infty, a))$.

Man sieht sofort, daß die Bedingungen 1. und 2. von Definition 9.1 für $\mathscr{A}(\infty, a)$ erfüllt sind.

10.2. *Sei* $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \to 0$, *$\nu$ eine natürliche Zahl,* $m' = \left[\frac{m+\nu-1}{\nu}\right]$, *$\tilde{\alpha}_n$ wie in* **9.11.** *Dann liegt* $\{\alpha_n\}$ *genau dann in* $\Psi(\infty, a)$, *wenn*

$$\text{(10.2.1)} \qquad \lim_{m\to\infty} \tilde{\alpha}_{m'}^{\frac{1}{\nu m'}}\, p(a^m)^{\frac{1}{m}} = 0$$

gilt für alle p und ν.

Beweis: $\{\alpha_n\}$ liegt genau dann in $\Psi(\infty, a)$, wenn $\{\tilde{\alpha}_n\}$ darin liegt (9.11).

1. Sei $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, a)$. Mit m geht auch m' gegen ∞ und es gilt $m'\nu \geqq m$. Es folgt:

$$\tilde{\alpha}_{m'}^{\frac{1}{\nu m'}}\, p(a^m)^{\frac{1}{m}} \leqq \tilde{\alpha}_{m'}^{\frac{1}{\nu m'}}\, |a|_{p,m} \leqq \tilde{\alpha}_{m'}^{\frac{1}{\nu m'}}\, |a|_{p,\nu m'}\,.$$

Der letzte Ausdruck geht aber gegen 0 für $m' \to \infty$.

2. Es gelte (10.2.1). Ist $\left\{p(a^m)^{\frac{1}{m}}\right\}$ beschränkt, so auch $\{|a|_{p,\nu m}\}$ und es bleibt nichts mehr zu beweisen. Sei nun $\left\{p(a^m)^{\frac{1}{m}}\right\}$ nicht beschränkt. Dann gibt es (für hinreichend großes m) ein $s = s(m) \leqq m$ mit $s(m) \to \infty$ für $m \to \infty$, so daß $p(a^s)^{\frac{1}{s}} = |a|_{p,m}$. Aus $n \geqq s(\nu n)\nu^{-1}$ folgt außerdem $n \geqq s(\nu n)'$. Daraus ergibt sich:

$$\tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{\nu n}}\, |a|_{p,\nu n} = \tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{\nu n}}\, p(a^{s(\nu n)})^{\frac{1}{s(\nu n)}} \leqq \tilde{\alpha}_{s(\nu n)'}^{\frac{1}{\nu s(\nu n)'}}\, p(a^{s(\nu n)})^{\frac{1}{s(\nu n)}}\,,$$

da $\tilde{\alpha}_m^{\frac{1}{m}}$ monoton fällt. Es folgt

$$\varlimsup_{n\to\infty} \tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{\nu n}}\, |a|_{p,\nu n} \leqq \varlimsup_{n\to\infty} \alpha_{s(\nu n)'}^{\frac{1}{\nu s(\nu n)'}}\, p(a^{s(\nu n)})^{\frac{1}{s(\nu n)}} \leqq \lim_{m\to\infty} \alpha_{m'}^{\frac{1}{\nu m'}}\, p(a^m)^{\frac{1}{m}} = 0\,.$$

10.3. *Sei in A das Produkt beschränkter Mengen beschränkt (s. § 1). Sei ferner $a, b \in A$, $ab = ba$. Dann ist*

1. $\Psi(\infty, \lambda a) \supset \Psi(\infty, a)$.
2. $\Psi(\infty, a + b) \supset \Psi(\infty, a) \cap \Psi(\infty, b)$.
3. $\Psi(\infty, ab) \supset \Psi(\infty, a) \cap \Psi(\infty, b)$.

Beweis: 1. Offenbar ist $|\lambda a|_{p,n} \leqq (1 + |\lambda|)\, |a|_{p,n}$. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung. Für $\lambda \neq 0$ folgt sogar die Gleichheit.

2. Sei $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, a) \cap \Psi(\infty, b)$. $\beta_n = |\alpha_n|^{\frac{1}{3}}$, also $\tilde{\beta}_n = \tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{3}}$, $\{\beta_n\} \in \Psi(\infty, a) \cap \Psi(\infty, b)$ nach 9.10. Sei $p \in \mathscr{P}$, ν eine natürliche Zahl, $m' = \left[\frac{m+\nu-1}{\nu}\right]$. Nach 10.2 gilt $\tilde{\beta}_{m'}^{\frac{1}{\nu m'}}\, p(a^m)^{\frac{1}{m}} \to 0$, also auch $(\tilde{\beta}_{m'}^{m})^{\frac{1}{\nu m'}}\, p(a^m) \to 0$ für jedes p, d. h. $(\tilde{\beta}_{m'}^{m})^{\frac{1}{\nu m'}}\, a^m \to 0$, ebenso für b. Es folgt wegen der Voraussetzung $p\left((\tilde{\beta}_{m'}^{2m})^{\frac{1}{\nu m'}}\, a^m b^m\right) \leqq M_p$.

$$(\tilde{\alpha}_{m'}^{m})^{\frac{1}{\nu m'}}\, p((ab)^m) = (\tilde{\beta}_{m'}^{m})^{\frac{1}{\nu m'}}\, p\left((\tilde{\beta}_{m'}^{2m})^{\frac{1}{\nu m'}}\, a^m b^m\right) \leqq (\tilde{\beta}_{m'}^{m})^{\frac{1}{\nu m'}}\, M_p\,,$$

also

$$(\tilde{\alpha}_{m'})^{\frac{1}{\nu m'}}\, p((ab)^m)^{\frac{1}{m}} \leqq \tilde{\beta}_{m'}^{\frac{1}{\nu m'}}\, M_p^{\frac{1}{m}}\,.$$

Dies geht aber gegen 0, folglich liegt nach 10.2 $\{\alpha_n\}$ in $\Psi(\infty, ab)$.

3. $\gamma_n = \max\limits_{m \geq n} (\tilde{\beta}^m_{m'})^{\frac{1}{\nu m'}}$. $\tilde{\beta}_{m'}^{\frac{1}{\nu m'}} < 1$ von einem hinreichend großen m ab. Also ist $\gamma_n = (\beta^m_{n'})^{\frac{1}{\nu n'}}$ für genügend großes n. Es folgt $\gamma_n a^n \to 0$, $\gamma_n b^n \to 0$. γ_n ist monoton fallend und $p(\gamma_\sigma \gamma_{m-\sigma} a^\sigma b^{m-\sigma}) \leq M'_p$ für alle σ und m.

$$(\tilde{\alpha}^m_{m'})^{\frac{1}{\nu m'}} p((a+b)^m) = \tilde{\beta}_{m'}^{\frac{m}{\nu m'}} \tilde{\beta}_{m'}^{\frac{2m}{\nu m'}} p\left(\sum_{\sigma=0}^{m} \binom{m}{\sigma} a^\sigma b^{m-\sigma}\right) \leq$$

$$\leq \tilde{\beta}_{m'}^{\frac{m}{\nu m'}} \gamma_m^2 \sum_{\sigma=0}^{m} \binom{m}{\sigma} p(a^\sigma b^{m-\sigma}) \leq$$

$$\leq \tilde{\beta}_{m'}^{\frac{m}{\nu m'}} \sum_{\sigma=0}^{m} \binom{m}{\sigma} \gamma_{m-\sigma} \gamma_\sigma p(a^\sigma b^{m-\sigma}) \leq \tilde{\beta}_{m'}^{\frac{m}{\nu m'}} 2^m M'_p ,$$

also

$$\tilde{\alpha}_{m'}^{\frac{1}{\nu m'}} p((a+b)^m)^{\frac{1}{m}} \leq \tilde{\beta}_{m'}^{\frac{1}{\nu m'}} 2 M_p'^{\frac{1}{m}} \to 0$$

und damit $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, a+b)$ nach 10.2.

Aus 10.3 folgt unmittelbar:

10.4. *Sei A kommutativ, ferner in A das Produkt beschränkter Mengen beschränkt (etwa A folgenvollständig), $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \to 0$. Dann bildet die Menge der Elemente a mit $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, a)$ eine Teilalgebra mit Einselement.*

Diese Teilalgebra braucht nicht abgeschlossen zu sein (vgl. 12.2).

Sei $\lambda \in \varrho'(a)$ (s. 2.6), $\lambda \neq \infty$.

10.5. Definition.

1. $\mathscr{A}(\lambda, a) = \mathscr{A}(\infty, (\lambda e - a)^{-1})$.
2. $\Psi(\lambda, a) = \Psi(\mathscr{A}(\lambda, a)) = \Psi(\infty, (\lambda e - a)^{-1})$.

Um die Algebra der zum Kalkül zugelassenen Funktionen zu erhalten, sei nun in 9.6 $\Sigma = \sigma(a)$, $\hat{\Sigma} = \sigma(a) \cap \varrho'(a)$ und $\mathscr{A}(\lambda) = \mathscr{A}(\lambda, a)$ gesetzt, also $\Psi(\mathscr{A}(\lambda)) = \Psi(\lambda, a)$.

10.6. Definition.

$$\hat{\Phi}(a) = \hat{\Phi}(\sigma(a) \cap \varrho'(a), \{\mathscr{A}(\lambda, a)\}; \sigma(a)) = \Phi_0(a) + \sum_{\lambda \in \sigma(a) \cap \varrho'(a)} \Psi(\lambda; \mathscr{A}(\lambda, a)) .$$

Vgl. 8.1 und Def. 9.6 und 4.1.

11. Funktionalkalkül und Spektralabbildungssatz

Der Funktionalkalkül soll wieder mit Hilfe des Operators U (s. 5.1) definiert werden: $U = I + \sum U_{\zeta'} (\zeta' \in \sigma(a) \cap \varrho'(a))$. I verschwindet auf den $\hat{\Psi}(\lambda; \mathscr{A}(\lambda, a))$; denn es verschwindet auf jeder endlichen Summe aus $\hat{\Psi}$ (s. 4.6 und 4.7) und die unendlichen konvergieren auf dem Integrationsweg $\Gamma(K)$ (s. 4.2), der positiven Abstand von jedem ζ' hat, gleichmäßig. Auf $\Phi_0(a)$ ist I stetig, also ist I ein stetiger Operator auf $\hat{\Phi}(a)$. $U_{\zeta'}$ verschwindet auf $\Phi_0(a)$ und jedem $\hat{\Psi}(\lambda; \mathscr{A}(\lambda, a))$ mit $\lambda \neq \zeta'$. Es bleibt also nur zu zeigen, daß $U_{\zeta'}$ auf $\hat{\Psi}(\zeta'; \mathscr{A}(\zeta', a))$ definiert und stetig ist. Sei p eine Halbnorm in A,

$f \in \hat{\Psi}(\zeta'; \mathscr{A}(\zeta', a))$, $q = p(\{\varrho_n\}; 1; 1)$, wo $\varrho_n = |(\zeta' e - a)^{-1}|_{p,n}$. Es gilt dann

$$p\left(\sum_{n=k}^{m} \varphi_{n,\zeta'}(f)\,(\zeta' e - a)^{-n}\right) \leq \sum_{n=k}^{m} |\varphi_{n,\zeta'}(f)|\, p((\zeta' e - a)^{-n}) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{n,\zeta'}(f)|\, |(\zeta' e - a)^{-1}|_{p,n}^{n} = q(f) \quad \text{(analog für } \zeta' = \infty\text{)}\,.$$

Daraus folgt, daß $U_{\zeta'}(f)$ konvergiert und daß $p(U_{\zeta'}(f)) \leq q(f)$, also ist $U_{\zeta'}$ definiert und stetig. $U_{\zeta'}(f)$ braucht allerdings ebensowenig wie $I(f)$ in A zu liegen, wenn dies nicht folgenvollständig ist.

Sei A' wieder die folgenvollständige Hülle von A. Dann folgt aus dem Vorangehenden:

11.1. *U ist eine stetige lineare Abbildung von $\hat{\Phi}(a)$ in A'.*

11.2. Definition. $\hat{\Phi}_A(a) = \{f \mid f \in \hat{\Phi}(a),\ U(f) \in A\}$.

Sei $U(f) = f(a)$ gesetzt.

11.3. Satz. 1. *$\hat{\Phi}_A(a)$ ist eine Algebra mit stetiger Multiplikation.* 2. *U ist ein stetiger Homomorphismus von $\hat{\Phi}_A(a)$ in A.* 3. *$\hat{\Phi}_A(a)$ enthält $C(z) \cap \hat{\Phi}(a)$ (s. § 3), insbesondere alle Polynome, und es gilt $U(\zeta) = a$, $U(1) = e$.* 4. *Ist A folgenvollständig, so ist $\hat{\Phi}_A(a) = \hat{\Phi}(a)$.*

Beweis: Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von 5.8. Man kann wieder den Operator U' einführen, der $C(z) \cap \hat{\Phi}(a)$ homomorph in A abbildet und dort mit U übereinstimmt. Offensichtlich ist (algebraisch)

$$C(z) \cap \hat{\Phi}(a) = C(z) \cap \Phi(a) = \Phi_0(a) \cap C(z) + \sum \hat{\Psi}(\lambda; \mathscr{A}(\lambda, a)) \cap C(z)\,.$$

Damit ist 3. bewiesen. In jedem der Summanden liegt sein Durchschnitt mit $C(z)$ dicht. Für $\Phi_0(a)$ wurde dies in § 3 bewiesen, für die $\hat{\Psi}$ folgt es unmittelbar. Also liegt $C(z) \cap \hat{\Phi}(a)$ dicht in $\hat{\Phi}(a)$ und der Beweis von 5.8 läßt sich mit Hilfe von 11.1 wörtlich übertragen. Damit sind 1. und 2. gezeigt und 4. folgt nun unmittelbar aus der Definition von $\hat{\Phi}_A(a)$.

Sei nun $f \in \Phi'(a)$ (s. 4.1), A folgenvollständig. Dann ist $f(\sigma'(a)) = \sigma'(f(a))$ und $f(\sigma(a)) = \sigma(f(a))$ (6.9). Liegt μ in $\sigma(f(a)) \cap \varrho'(f(a))$, so liegt daher $f^{-1}(\mu) \cap \sigma(a)$ in $\varrho'(a)$ und enthält nur endlich viele Punkte. Es gilt nun:

11.4. Satz. *Sei A folgenvollständig, $f \in \Phi'(a)$. Dann ist $\Psi(\mu, f(a)) = \bigcap \Psi(\lambda, a)$, wobei λ alle Punkte von $f^{-1}(\mu) \cap \sigma(a)$ durchläuft.*

Beweis: Sei $h(\zeta) = (\mu - f(\zeta))^{-1}$ für $\mu \neq \infty$, $h(\zeta) = f(\zeta)$ für $\mu = \infty$. h liegt dann ebenfalls in $\Phi'(a)$.

1. Sei $\{\alpha_n\} \in \Psi(\lambda, a)$ für jedes λ, d. h. $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, (\lambda e - a)^{-1})$ für $\lambda \neq \infty$. $I(h) = U(h_0)$, $h_0 \in \Phi_0(a)$ ist spektralbeschränkt (6.11), also ist auch $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, I(h))$. Ferner folgt aus 10.3 $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, (\lambda e - a)^{-m})$ bzw. $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, a^m)$ (für $\lambda = \infty$) für alle m und damit $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, U_\lambda(h))$, da h in λ nur Pole hat, also alle Summen in $U_\lambda(h)$ endlich sind. Da h sonst keine Pole hat, folgt damit wieder aus 10.3

$$\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, I(h) + \sum U_\lambda(h)) = \Psi(\infty, h(a)) = \Psi(\mu, f(a))\,.$$

2. Nun sei $\{\alpha_n\} \in \Psi(\mu, f(a))$, $g(\zeta)$ wie im Beweis zu 6.6. Ist h nicht rational, dann ist $\sigma(a) \neq \Omega$, man kann wieder ein h_1 bestimmen (s. Beweis zu 6.6), das

in diesem Falle wegen $f \in \Phi'(a)$ sogar in $\Phi_0(a)$ liegt. Mit Hilfe von 10.3 folgt dann hier in gleicher Weise wie in 6.6, daß $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, k(a))$ und $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, k_1(a))$ und damit schließlich $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, g(a)) = \Psi(\lambda, a)$.

Ist h rational, so lassen sich wie in 6.6 rationale Funktionen $q_n(\zeta)$ und $p_m(\zeta)$ bestimmen, es gelten die dort ausgeführten Identitäten und Abschätzungen und damit schließlich

$$p(g(a)^s) \leq M^s \sum_{t=0}^{s} \sum_{m=0}^{\nu-1} M_1 q(h(a)^t) \leq M^s M_1 M_2 \nu |h(a)|_{q,s}^s \leq$$

$$\leq M_4^s |h(a)|_{q,s}^s, \quad \text{also} \quad |g(a)|_{p,s} \leq M_4 |h(a)|_{q,s},$$

wobei p eine beliebige Halbnorm in A ist und ν, M, M_1, M_2, M_4 und q nicht von s abhängen (s. 6.6). Nun geht für jede natürliche Zahl v $|\alpha_n|^{\frac{1}{vn}} |h(a)|_{q,vn}$ gegen 0 für $n \to \infty$, also auch $|\alpha_n|^{\frac{1}{vn}} |g(a)|_{p,vn}$ und damit ist $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, g(a))$. Damit ist die Behauptung auch in diesem Fall bewiesen.

Man kann auch für $f \in \Phi(a)$ Verallgemeinerungen von 6.3 und 6.6 erhalten, mit den gleichen Abschwächungen wie dort auch. Der Beweis des Analogons zu 6.6 kann wie oben verlaufen, da es genügt $h_1(\zeta)$ wie in 6.6 aus $\Phi''(a)$ zu nehmen. $h_1(a)$ ist dann wieder quasi-spektralbeschränkt und damit $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, k(a))$. Eine direkte Übertragung auf den Fall $f \in \hat{\Phi}(a)$ scheitert daran, daß kein 5.9 entsprechender Satz gilt (s. 12.4).

11.5. Satz. *Sei A folgenvollständig, $g(\zeta) \in \Phi'(a)$, $f(\zeta) \in \hat{\Phi}(g(a))$. Dann ist $h(\zeta) = f(g(\zeta)) \in \hat{\Phi}(a)$ und $h(a) = f(g(a))$.*

Beweis: Es gibt eine Folge f_s von rationalen Funktionen in $\hat{\Phi}(g(a))$ mit $f_s \to f$ in $\hat{\Phi}(g(a))$. Die Hauptteile von f_s in den Punkten von $\sigma(g(a)) \cap \varrho'(g(a))$ sollen dabei die s-ten Teilsummen der Hauptteile von f sein. Die f_s liegen alle in $\Phi'(g(a))$. Sei $f_s(g(\zeta)) = h_s(\zeta)$. Nach 6.14 liegt $h_s(\zeta)$ in $\Phi(a)$ und es gilt $f_s(g(a)) = h_s(a)$. Nach 11.3.2 gilt $f_s(g(a)) \to f(g(a))$. Sei $k_s(\zeta) = h(\zeta) - h_s(\zeta) = (f - f_s)(g(\zeta))$. Dann bleibt nur zu zeigen: $k_s(\zeta) \in \hat{\Phi}(a)$ für hinreichend großes s (da dann auch $h(\zeta) = k_s(\zeta) + h_s(\zeta) \in \hat{\Phi}(a)$) und $k_s(a) \to 0$.

$U_\lambda(k_s)$ verschwindet (unabhängig von s) für alle bis auf endlich viele λ. Sei $k_{\lambda,s}$ der Hauptteil von k_s in λ. Es genügt dann zu zeigen, daß $k_{\lambda,s} \in \hat{\Psi}(\lambda, \mathscr{A}(\lambda, a))$ für alle λ und hinreichend großes s, sowie daß $U_\lambda(k_s) \to 0$ für alle λ und $I(k_s) \to 0$.

Sei g in $\Delta - \sigma(a)$ lokalholomorph (s. 3.1), $K \in \mathscr{K}(\theta; \theta; \Delta)$ (3.4) so gewählt, daß $\Gamma(K)$ von g in $\Delta' - \sigma(g(a))$ abgebildet wird, wo $f - f_s$ lokalholomorph sein soll. Das Bild von $\Gamma(K)$ liegt dann in einem $K' \in \mathscr{K}(\theta; \theta; \Delta')$ und hat endlichen Abstand von allen Singularitäten von $f_s - f$. Die Folge f_s kann so gewählt werden, daß die Komponente von f_s in $\Phi(\theta; \theta; \sigma(g(a)))$ gleichmäßig in K' gegen die entsprechende Komponente von f konvergiert. (Es waren bisher nur die übrigen Komponenten von f_s festgelegt worden.) Damit folgt, daß $(f_s - f)(g(\zeta))$ auf $\Gamma(K)$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert und damit $I(k_s) \to 0$.

Nun sei $g(\lambda) = \mu$, μ eine Singularität von f, m die Vielfachheit von λ als μ-Stelle.

$$k_{\lambda,s}(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,\lambda}^{(s)} (\lambda - \zeta)^{-n},$$

$$\varphi_{n,\lambda}^{(s)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{\sigma=s+1}^{\infty} \varphi_{\sigma,\mu}(f) (\mu - g(\zeta))^{-\sigma} (\lambda - \zeta)^{n-1} d\zeta$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{\sigma=\sigma_0}^{\infty} \varphi_{\sigma,\mu}(f) (\mu - g(\zeta))^{-\sigma} (\lambda - \zeta)^{n-1} d\zeta ,$$

wo $\sigma_0 = \max\left(s+1, \left[\frac{n}{m}\right]\right)$ und $\Gamma = \{\zeta \mid |\lambda - \zeta| = \delta\}$. Sei $M = \left(\min\limits_{\zeta\in\Gamma} |\mu - g(\zeta)|\right)^{-1}$. Mit $\{\varphi_{\sigma,\mu}\}$ liegen auch $\{\bar\varphi_{\sigma,\mu}\}$ und $\left\{(\bar\varphi_{\sigma,\mu})^{\frac{1}{2}}\right\}$ in $\Psi(\mu, g(a)) \subset \Psi(\lambda, a)$ (9.10, 9.11 und 11.4). Sei $n' = \left[\frac{n}{m}\right]$, dann ist $3mn' > 2n$. $\sum\limits_{\sigma} (\bar\varphi_{\sigma,\mu})^{\frac{1}{2}} M^{\sigma}$ konvergiert, also geht $M(s) = \sum\limits_{\sigma=s+1}^{\infty} (\bar\varphi_{\sigma,\mu})^{\frac{1}{2}} M^{\sigma}$ gegen 0 für $s \to \infty$. $\bar\varphi_{\sigma,\mu}(f) \to 0$ für $\sigma \to \infty$; sei nun s so groß gewählt, daß $\bar\varphi_{\sigma,\mu}(f) < 1$ für $\sigma > s$. Dann ist

$$|\varphi_{n,\lambda}^{(s)}| \leqq \sum_{\sigma=\sigma_0}^{\infty} \bar\varphi_{\sigma,\mu}(f) M^{\sigma} \delta^n = \sum_{\sigma=\sigma_0}^{\infty} (\bar\varphi_{\sigma,\mu})^{\frac{1}{2}} \delta^n (\bar\varphi_{\sigma,\mu})^{\frac{1}{2}} M^{\sigma} \leqq$$

$$\leqq (\bar\varphi_{\sigma_0,\mu})^{\frac{1}{2}} \delta^n \sum_{\sigma=\sigma_0}^{\infty} (\bar\varphi_{\sigma,\mu})^{\frac{1}{2}} M^{\sigma} \leqq (\bar\varphi_{n',\mu})^{\frac{1}{2}} \delta^n \sum_{\sigma=s+1}^{\infty} (\bar\varphi_{\sigma,\mu})^{\frac{1}{2}} M^{\sigma}$$

$$= (\bar\varphi_{n',\mu})^{\frac{1}{2}} \delta^n M(s) .$$

Für hinreichend großes n ist $\bar\varphi_{n',\mu} < 1$ und damit

$$|\varphi_{n,\lambda}^{(s)}|^{\frac{1}{\nu n}} |(\lambda e - a)^{-1}|_{p,\nu n} \leqq (\bar\varphi_{n',\mu})^{\frac{1}{\nu n}} (\delta^n M(s))^{\frac{1}{\nu n}} |(\lambda e - a)^{-1}|_{p,\nu n} \leqq$$

$$\leqq (\bar\varphi_{n',\mu})^{\frac{1}{(3\nu m)n'}} |(\lambda e - a)^{-1}|_{p,(3\nu m)n'} (\delta^n M(s))^{\frac{1}{\nu n}} \to 0 ,$$

da $(\delta^n M(s))^{\frac{1}{\nu n}}$ beschränkt bleibt. Es folgt $\{\varphi_{n,\lambda}^{(s)}\} \in \Psi(\lambda, a)$, also $k_{\lambda,s} \in \Psi(\lambda; \mathscr{A}(\lambda))$. Außerdem ist für

$$q = p(\{\varrho_n\}; \nu; R),\ \varrho_n = |(\lambda e - a)^{-1}|_{p,n}$$

$$q(k_{\lambda,s}) = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{n,\lambda}^{(s)}| \, |(\lambda e - a)^{-1}|_{p,\nu n}^{\nu n} R^n \leqq$$

$$\leqq M(s) \sum_{n=1}^{\infty} (\bar\varphi_{n',\mu})^{\frac{1}{2}} |(\lambda e - a)^{-1}|_{p,\nu n}^{\nu n} (R\delta)^n \to 0 ,$$

da die Reihe unabhängig von s konvergiert und $M(s) \to 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

12. Beispiele

12.1. *Seien Σ, $\hat{\Sigma}$ und $\mathscr{A}$ wie in § 9, $\infty \notin \Sigma - \hat{\Sigma}$. Dann liegt $a = a(\zeta) = \zeta$ in $\Phi(\hat{\Sigma}, \mathscr{A}; \Sigma)$ und es ist $\sigma(a) = \Sigma$, $\sigma'(a) = \Sigma - \hat{\Sigma}$ und $\Psi(\lambda; a) = \Psi(\mathscr{A}(\lambda))$.*

Beweis: $a(\zeta) \in \Phi$ folgt aus $\infty \notin \Sigma - \hat{\Sigma}$. $(\lambda - \zeta)^{-1}$ liegt genau dann in Φ, wenn $\lambda \notin \Sigma - \hat{\Sigma}$, also ist $\Sigma - \hat{\Sigma} = \sigma'(a)$. Ist $\lambda_0 \in \Sigma$, so liegen für $\lambda \neq \lambda_0$ alle $(\lambda - \zeta)^{-1}$ nicht in $\Psi(\lambda_0, \mathscr{A}(\lambda_0))$, können deshalb auch nicht gegen $(\lambda_0 - \zeta)^{-1}$ gehen. Umgekehrt liegen für $\lambda_0 \notin \Sigma$ auch für eine ganze Umgebung von λ_0 die $(\lambda - \zeta)^{-1}$ in $\Phi(\theta; \theta; \Sigma)$. Dort ist aber die Resolvente stetig. Entsprechendes gilt für $\lambda_0 = \infty$. Also ist $\Sigma = \sigma(a)$. Nun sei $\{\varrho_n\} \in \mathscr{A}(\lambda)$. $p = p(\{\varrho_n\}; \nu; R)$ in $\Psi(\lambda, \mathscr{A}(\lambda))$. Dann ist $p((\lambda - \zeta)^{-n}) = \varrho_{\nu n}^{\nu n} R^n$, also $|(\lambda - \zeta)^{-1}|_{p,n} = \varrho_{\nu n}^{\nu} R$ (es genügt, $R \geqq 1$ zu betrachten). Für $\nu = 1$, $R = 1$ ergibt dies, wenn p alle Halbnormen durchläuft, alle $\{\varrho_n\}$. Also ist $\mathscr{A}(\lambda, a) \supset \mathscr{A}(\lambda)$ und daher $\Psi(\lambda, a) \subset \subset \Psi(\mathscr{A}(\lambda))$. Sei andererseits $\{\alpha_n\} \in \Psi(\mathscr{A}(\lambda))$. Dann ist

$$|\alpha_n|^{\frac{1}{\mu n}} \, |(\lambda - \zeta)^{-1}|_{p,\mu n} = |\alpha_n|^{\frac{1}{\mu n}} \varrho_{\nu \mu n}^{\nu} R = \left(|\alpha_n|^{\frac{1}{(\nu\mu) n}} \varrho_{(\nu\mu) n}\right)^{\nu} R \, .$$

Der Ausdruck in der Klammer konvergiert gegen 0, und damit auch das Ganze, d. h. $\{\alpha_n\} \in \Psi(\lambda, a)$.

Ein weiteres Beispiel liefert die Algebra L^{ω} aus [1]. Diese ist sogar eine metrische vollständige topologische Algebra (vgl. § 1), in der alle spektralbeschränkten Elemente dicht liegen (nämlich die Elemente aus L^{∞}). Es ist ja (s. 5.15 und 5.12) für $a = a(t) \in L^{\omega}$:

$$|a|_{\infty} = \sup_{p} \varlimsup_{n \to \infty} \|a(t)^n\|_p^{\frac{1}{n}} = \sup_{p} \varlimsup_{n \to \infty} \|a(t)\|_{pn} = \sup_{p} \|a(t)\|_{\infty} = \|a(t)\|_{\infty} \, .$$

12.2. *Zu jeder nicht abbrechenden Folge $\{\alpha_n\}$ mit $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \to 0$ gibt es ein $a = a(t)$ in L^{ω}, so daß $\{\alpha_n\} \notin \mathscr{A}(\infty, a)$.*

Beweis: $\{\alpha_n\}$ liegt genau dann in $\mathscr{A}(\infty, a)$, wenn dies für $\{\tilde{\alpha}_n\}$ gilt. Es folgt aus der Definition von $\tilde{\alpha}_n$, daß alle $\tilde{\alpha}_n \neq 0$. Sei $p(a) = \|a(t)\|_1$. Dann ist $p(a^n)^{\frac{1}{n}} = \|a(t)\|_n$ und es genügt $\tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{n}} \|a(t)\|_n \geqq 1$ zu zeigen, da daraus $\tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{n}} |a|_{p,n} \geqq 1$ und damit $\{\tilde{\alpha}_n\} \notin \mathscr{A}(\infty, a)$ folgt.

Sei $M_n = 2^n \tilde{\alpha}_n^{-1}$, $\varepsilon_n = \varepsilon \cdot \tilde{\alpha}_n^{n-1} 2^{-n^2}$. $\sum \varepsilon_n$ konvergiert offenbar und ε kann so gewählt werden, daß $\sum \varepsilon_n < 1$ wird. Man kann also in $[0, 1]$ abzählbar viele sich nicht überlappende abgeschlossene Intervalle I_n der Länge ε_n unterbringen. Sei $a(t) = M_n$ in I_n und verschwinde sonst. Es ist zu zeigen, daß $\int_0^1 |a(t)|^n \, dt$ endlich ist für jedes n. Sei $m > n$ so gewählt, daß $M_\nu > 1$ für $\nu > m$.

Dann ist

$$\int_0^1 |a(t)|^n \, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu M_\nu^n = \sum_{\nu=1}^{m} \varepsilon_\nu M_\nu^n + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \varepsilon_\nu M_\nu^n \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{m} \varepsilon_\nu M_\nu^n + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \varepsilon_\nu M_\nu^{\nu-1}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} \varepsilon_\nu M_\nu^n + \varepsilon \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \tilde{\alpha}_\nu^{\nu-1} 2^{-\nu^2} \tilde{\alpha}_\nu^{1-\nu} 2^{(\nu-1)\nu}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} \varepsilon_\nu M_\nu^n + \varepsilon \sum_{\nu=m+1}^{\infty} 2^{-\nu} < \infty .$$

Also liegt a in L^ω. Andererseits folgt

$$\int_0^1 |a(t)|^n \, dt \geqq \varepsilon_n M_n^n = \tilde{\alpha}_n^{n-1} 2^{-n^2} \tilde{\alpha}_n^{-n} 2^{n^2} = \tilde{\alpha}_n^{-1},$$

d. h. $\|a(t)\|_n \geqq \tilde{\alpha}_n^{-\frac{1}{n}}$ und damit $\tilde{\alpha}_n^{\frac{1}{n}} \|a(t)\|_n \geqq 1$.

Andererseits gilt:

12.3. *Ist A metrisierbar, so liegt in jedem $\Psi(\infty, a)$ wenigstens eine nichtabbrechende Folge, d. h. jedes $\Psi(\lambda, \mathscr{A}(\lambda))$, enthält wenigstens eine nichtrationale Funktion.*

Beweis: $\{\alpha_n\}$ liegt in $\Psi(\infty, a)$, wenn $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}} |a|_{p,\nu n}^{\nu} \to 0$ für jedes p und ν. p und ν durchlaufen jeweils eine abzählbare Menge. Folglich ist die Menge der Folgen $\{|a|_{p,\nu n}^{\nu}\}$ abzählbar. Sei $\{\varrho_n^{(\mu)}\}$, $\mu = 1, 2, \ldots$ eine solche Abzählung. Dann majorisiert die Folge $\{\varrho_n\}$ mit $\varrho_n = \max\limits_{\mu \leqq n} \varrho_n^{(\mu)}$ jede Folge $\{\varrho_n^{(\mu)}\}$ von einem gewissen Index n ab. Daher folgt aus $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \varrho_n \to 0$ $\{\alpha_n\} \in \Psi(\infty, a)$. Ist $\{\varrho_n\}$ beschränkt, so gilt die Behauptung für jede Folge $\{\alpha_n\}$ mit $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \to 0$, ist $\{\varrho_n\}$ unbeschränkt, so ist $\{\alpha_n\} = \{\varrho_n^{-2n}\}$ eine gewünschte Folge.

12.4. Um zu zeigen, daß sich 5.9 nicht unmittelbar übertragen läßt, sei noch einmal L^ω herangezogen: $a = a(t) = \log|\log \frac{t}{4}|$, $p(a) = \|a\|_p$, $p(a^n)^{\frac{1}{n}} = \|a\|_{pn} \to \infty$ für das gegebene a. Also liegt ∞ in $\sigma(a)$. Es soll untersucht werden, ob $\{\frac{1}{n!}\}$ in $\Psi(\infty, a)$ liegt. Hierzu muß $|a|_{p,n}$ und dazu $p(a^n)^{\frac{1}{n}} = \|a\|_{pn}$ betrachtet werden.

$$\|a\|_m = \left(\int_0^1 |a(t)|^m \, dt\right)^{\frac{1}{m}} .$$

Sei $s = -\log \frac{t}{4}$, dann ist

$$\int_0^1 |\log|\log \tfrac{t}{4}||^m \, dt = 4 \int_{\log 4}^{\infty} (\log s)^m e^{-s} \, ds$$

$$= 4 \int_{\log 4}^{4m^2} (\log s)^m e^{-s} \, ds + 4 \int_{4m^2}^{\infty} (\log s)^m e^{-\frac{s}{2}} e^{-\frac{s}{2}} \, ds .$$

Für $s \geqq 4m^2$ ist $(\log s)^m = m \log s < m s^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{s}{2} < e^{\frac{s}{2}}$, also

$$\int_0^1 |a(t)|^m \, dt \leqq 16 m^2 (\log (2m)^2)^m \tfrac{1}{4} + 4 \int_0^\infty e^{-\frac{s}{2}} \, ds = 4m^2 (2 \log 2m)^m + 8 .$$

Es folgt $\|a\|_m \leqq 3 \log 2m$ für hinreichend großes m und $|a|_{p,n} \leqq 3 \log (2pn)$ für genügend großes n. Außerdem gilt $n! > n^n e^{-n}$, also

$$(n!)^{-\frac{1}{\nu n}} |a|_{p,\nu n} \leqq n^{-\frac{1}{\nu}} e^{\frac{1}{\nu}} 3 \log (2p\nu n) \to 0 ,$$

also $\{\frac{1}{n!}\} \in \Psi(\infty, a)$. Mithin liegt e^{ξ} in $\Phi(a)$ und es ist offenbar $e^a = |\log \frac{t}{4}| = \log \frac{4}{t}$. Man sieht aber sofort, daß $\{\frac{1}{n!}\}$ nicht in $\Psi(\infty, e^a)$ liegen kann, da sonst $e^{(e^a)} = \frac{4}{t}$ wäre, $\frac{4}{t}$ aber nicht in L^∞ liegt.

Literatur

[1] Arens, R.: The space L^ω and convex topological rings. Bull. Am. Math. Soc. 52, 931—935 (1946).

[2] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques. Chap. I, II. Paris 1953.

[3] Neubauer, G.: Zur Spektraltheorie in lokalkonvexen Algebren. Math. Ann. 142, 131—164 (1961).

(Eingegangen am 20. November 1960)

JURCHESCU, M.
Math. Annalen 143, 264—292 (1961)

Bordered Riemann Surfaces

By

MARTIN JURCHESCU in Bucarest

This paper is concerned with the classification problem for bordered Riemann surfaces, and, especially, with the prolongation problem. The last is part of the classification problem and requires to obtain conditions which be necessary and sufficient that a bordered Riemann surface X be maximal or essentially maximal, that the maximal prolongation of X be conformally or topologically unique, and that harmonic functions of certain classes on X be extendable over the maximal prolongation of X.

In § 1, preparatory statements of general topology are given and the concept of nowhere disconnecting and 0-dimensional ideal boundary of a space is introduced. § 2 contains a discussion of the concept of bordered Riemann surface; in particular relative homology is considered, and relatively planar surfaces and surfaces of finite relative genus are introduced. In § 3 the concept of modulus of an ideal boundary set is discussed; results obtained in [11] for the ordinary case are generalized to the bordered case; the proofs are generally similar to those of [11] and are therefore omitted. § 4 is devoted to the classification problem; here for bordered Riemann surfaces, the harmonic classes 0_{EF}, 0_{E^*F}, 0°_{EF}, $E = H, K, A, S$ and $F = B, D, BD$, the modular classes M_0, M_1, M_2 and M, and the mixed classes M_{EF}, $E = H, K$ and $F = B, D, BD$ are considered and discussed; also Sario's linear operator method is extended to the bordered case and used in studying the classes 0_{EF}. §§ 5—7 deal with the prolongation problem. The main result of § 5 states the equivalence between the properties of an arbitrary bordered Riemann surface X of belonging to M_2, of being essentially maximal and of having a topologically unique maximal prolongation. In § 6 it is shown that there is equivalence between the properties that $X \in M_{KD}$ and that the maximal prolongation of X is conformally unique; furthermore each mixed class M_{EF} is connected with the property of functions $\in EF$ of being extendable over the maximal prolongation of X. In § 7 the notion of Q-quasiconformal prolongation and related questions are discussed. § 8 contains a proof, for spaces without countable basis, of Freudenthal's theorem on the existence of a 0-dimensional and nowhere disconnecting ideal boundary.

Certain of the results, given in the paper, where announced in two Notes in Comptes Rendus [12, 13]. Note that M_2 of the paper is M_1 of [12, 13].

§ 1. Topological preparation

Let X be a topological space. A connected non-empty open set of X will be called a *region* in X, or also a *subregion* of X when X is connected.

Definition 1. A nowhere dense subset B of X is said to be *nowhere disconnecting in* X if for any $x \in X$ and any region U containing x there exists an open neighborhood $V \subset U$ of x such that the set $V - B$ is open and connected[1]).

We note that if B is nowhere disconnecting in X, $B \cap Y$ is nowhere disconnecting in Y for any open subspace Y of X.

Lemma 1. A nowhere dense subset B of X is nowhere disconnecting if and only if for any region $U \subset X$, the set $U - B$ is open and connected.

Proof. Only necessity need be proved. Let B be nowhere disconnecting in X, and let U be any region in X. If $x \in U - B$, we have an open neighborhood $V \subset U$ of x with $V - B$ open, so that $U - B$ is open. It remains to show that $U - B$ is connected. Assume to the contrary that $U - B = V_1 \cup V_2$, where V_1 and V_2 are disjoint non-empty open sets. As B is nowhere dense, $\overline{U} = \overline{U - B} = \overline{V}_1 \cup \overline{V}_2$, so that $U = \overline{V}_1 \cap U \cup \overline{V}_2 \cap U$. Each of the sets $\overline{V}_1 \cap U$ and $\overline{V}_2 \cap U$ is non-empty and closed in U. Let $B_1 = \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$. Connectedness of U implies $B_1 \cap U \neq 0$. Let $x \in B_1 \cap U$ and V be any open neighborhood, contained in U, of x. Then $V - B = (U - B) \cap V = V_1 \cap V \cup V_2 \cap V$. Each of the sets $V_1 \cap V$ and $V_2 \cap V$ is non-empty because each of the sets $\overline{V}_1 \cap V$ and $\overline{V}_2 \cap V$ contains the point x. Hence $V - B$ is non-connected. As V is any open neighborhood, contained in U, of x, we have a contradiction and the lemma is proved.

Corollary 1. If B is a nowhere disconnecting subset of X and B_1 a nowhere disconnecting subset of $X - B$, then the set $B \cup B_1$ is nowhere disconnecting in X.

Proof. Let U be any region in X. We have to show that $U - (B \cup B_1) = (U - B) - B_1$ is open in X and connected. Since B is nowhere disconnecting in X, $U - B$ is a region in X and hence also in $X - B$; and since B_1 is nowhere disconnecting in $X - B$, $(U - B) - B_1$ is a region in $U - B$ and hence also in X.

Corollary 2. If X is locally connected, any nowhere disconnecting subset B of X is closed.

Proof. If X is locally connected and B nowhere disconnecting in X, the set $U - B$ is open for any connected component U of X. Hence $X - B$ is a union of open sets, and this establishes the corollary.

We recall that, given two locally compact spaces X and X', a continuous map $\varphi : X \to X'$ is said to be *proper* if for any compact set $K' \subset X'$, $\varphi^{-1}(K')$ is compact. We shall prove an extension lemma for proper maps, which will be useful in the sequel.

[1]) See GRAUERT and REMMERT [7], and STEIN [31]; we note that the sets considered in [7] under the name "nowhere disconnecting" satisfy the condition of Definition 1 only for the points $x \in B$, so that sets, nowhere disconnecting in the sense of GRAUERT and REMMERT, may also be called "locally nowhere disconnecting".

Lemma 2. Let E be a locally connected and locally compact space, E' a locally connected compact space, B a nowhere disconnecting subset of E and B' a 0-dimensional[2]) closed subset of E'. Then any proper map $\varphi_0 : E - B \to E' - B'$ has a unique continuous extension $\varphi : E \to E'$ and we have $\varphi(B) \subset B'$.

Proof. By BOURBAKI [4], we have only to prove that for each $b \in B$ there exists $\lim\limits_{x \to b,\, x \in E - B} \varphi_0(x)$, that is there exists a point $b' \in E'$ such that for any neighborhood V' in E' of b' there is a neighborhood V in E of b with $\varphi_0(V - B) \subset V'$.

Let $b \in B$ and $(V_\iota)_{\iota \in I}$ be a basis of open and connected neighborhoods at b. Then the set $\bigcap\limits_\iota \overline{V}_\iota$ is formed by the single point b. Let $A' = \bigcap\limits_\iota \overline{\varphi_0(V_\iota - B)}$. Since the sets $\varphi_0(V_\iota - B)$, $\iota \in I$, are connected and form a filter base in the compact space E', the closed set A' is non-empty and connected. We assert that $A' \subset B'$. In fact, suppose this is false, and let $b' \in A' \cap (E' - B')$ and $K' \subset E' - B'$ be any compact neighborhood of b'. Then each of the sets $\varphi_0(V_\iota - B)$, $\iota \in I$, meets K', consequently each of the sets $V_\iota - B$ meets the compact set $K = \varphi_0^{-1}(K')$. Hence $(\overline{V}_\iota \cap K)_{\iota \in I}$ is a filter base in the compact space K, and therefore the set $\bigcap\limits_\iota \overline{V}_\iota$ has a point in K, which is a contradiction. Thus $A' \subset B'$. As B' is totally disconnected, A' contains a single point, say b'. If V' is any neighborhood of b', it is immediate that $\varphi_0(V_\iota - B) \subset V'$ for some ι, i.e. $b' = \lim\limits_{x \to b,\, x \in E - B} \varphi_0(x)$. Thus the existence of φ is established, and from the proof it follows that $\varphi(B) \subset B'$.

Lemma 3. Let E and E' be locally connected compact spaces, B a nowhere disconnecting set in E, B' a nowhere disconnecting and 0-dimensional set in E', $\varphi_0 : E - B \to E' - B'$ a proper map with the property: if U' is any region in $E' - B'$, so is $\varphi_0^{-1}(U')$. Then, if $\varphi : E \to E'$ is the continuous extension of φ_0, the connected components of B are exactly the fibres $\varphi^{-1}(b')$ with $b' \in B'$.

Proof. Since B' is totally disconnected, each connected component of B is contained in a fibre $\varphi^{-1}(b')$. Now let $b' \in B'$. If V' is any connected open neighborhood of b', the set $\varphi^{-1}(V')$ is open, and, by the hypothesis, the set $\varphi_0^{-1}(V' - B') = \varphi^{-1}(V') - B$ is a region in E. As B is nowhere disconnecting in E, $\varphi^{-1}(V')$ is also a region[3]). Hence, if $(V'_\iota)_{\iota \in I}$ is a basis of connected open neighborhoods of b', the sets $\varphi^{-1}(V'_\iota)$ form a connected filter base in the compact space E, and consequently the fibre[4]) $\varphi^{-1}(b') = \bigcap\limits_\iota \overline{\varphi^{-1}(V'_\iota)}$ is connected. This completes the proof.

An immediate consequence of Lemmas 2 and 3 is

---

[2]) A topological space is said to be 0-dimensional if it has a basis made up of both open and closed sets; we note that a locally compact space is 0-dimensional if and only if it is totally disconnected; see HUREWICZ and WALLMAN [9].

[3]) If A is a nowhere dense closed set in a topological space X and U an open set with $U - A$ connected, then U is connected, for $U - A \subset U \subset \overline{U - A}$.

[4]) If X and X' are topological spaces, X' regular, $\varphi : X \to X'$ a continuous map, $x' \in X'$ and $(U'_\iota)_{\iota \in I}$ a neighborhood basis for x', then $\varphi^{-1}(x') = \bigcap\limits_\iota \overline{\varphi^{-1}(U'_\iota)}$; for let $A = \bigcap\limits_\iota \overline{\varphi^{-1}(U'_\iota)}$, then $\varphi^{-1}(x') \subset A$, and $\varphi(A) \subset \bigcap\limits_\iota \varphi(\overline{\varphi^{-1}(U'_\iota)}) \subset \bigcap\limits_\iota \overline{\varphi\varphi^{-1}(U'_\iota)} = \bigcap\limits_\iota \overline{U}$ $= \{x'\}$.

Theorem 1. *Suppose that E and E' are locally connected compact spaces, that B and B' are nowhere disconnecting and 0-dimensional sets in E and E' respectively, and that h_0 is a proper topological map of $E - B$ into $E' - B'$. Then h_0 can be extended, uniquely, to a homeomorphism h of E into E'; if h_0 is onto, so is h.*

Definition 2. If a topological space X is imbedded in a locally connected compact space X^* in such a way that the set $\beta = X^* - X$ is nowhere disconnecting in X^* and 0-dimensional we say that β is the *(nowhere disconnecting and 0-dimensional) ideal boundary of* X; the ideal boundary of X is then denoted by $\beta(X)$ or simply by β when X is fixed. A subset α of $\beta(X)$ is said to be an *ideal boundary set* of X, and a point $\gamma \in \beta(X)$ an *ideal boundary component*[5]) *of* X.

We note that the (nowhere disconnecting and 0-dimensional) ideal boundary of a space X (if it exists) is unique, i.e. $\beta(X)$ is a topological invariant of the space. If X is compact $\beta(X)$ is empty and vice-versa.

If X has an ideal boundary $\beta(X)$, clearly X is locally compact, locally connected and has a finite number of connected components. Conversely, we have

Theorem 2. (Freudenthal). *Any connected locally connected and locally compact space has a nowhere disconnecting and 0-dimensional ideal boundary.*

Freudenthal's proof [6], founded on the notion of exhaustion, is explicitly given only for spaces with countable basis. In § 8 we shall give another proof.

§ 2. Bordered Riemann surfaces

A *bordered* Riemann surface is a connected Hausdorff space X together with a covering with regions U and homeomorphisms λ from U onto the unit circle $D = \{z; |z| < 1\}$ or onto the unit half-circle $D' = \{z; |z| < 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ such that, if U_1 and U_2 are any two overlapping regions of the covering and λ_1 and λ_2 are the corresponding homeomorphisms, the homeomorphism $\lambda_2 \circ \lambda_1^{-1} : \lambda_1(U) \to \lambda_2(U)$ is directly conformal[6]). If always $\lambda(U)$ is D, we say that X is an *ordinary* Riemann surface.

Let X be a bordered Riemann surface. The points of X which have no neighborhoods, homeomorphic to D, form a closed set in X; we call this set the *border* of X and we denote it by $B(X)$, or also simply by B when X is fixed. As each point of B has neighborhoods which are homeomorphic with D', B is clearly nowhere disconnecting in X. This implies, in particular, that the set $R = X - B$ is connected. The conformal structure of X canonically induces a conformal structure of ordinary Riemann surface on R; we write $X = R \cup B$. On X we naturally have the notion of (real single-valued) harmonic function, and also the notion of (directly or indirectly) conformal map of X into another bordered Riemann surface $X' = R' \cup B'$. If the function u on X is harmonic and the map $f : X \to X'$ is conformal, $u|R$ is harmonic on R and $f|R$ is a con-

[5]) The concept of ideal boundary component is due to Kerékjártó; see Freudenthal [6] and Stoilow [32].

[6]) See, for example, Royden [25] and Pfluger [21].

formal map of R into R'. A relatively compact region U in X is called a *parametric neighborhood* if we have a directly conformal homeomorphism of U onto D or D'. A conformal map $f: X \to X'$ is not generally open, i.e. $f(B)$ is not generally contained in B'.

Definition 3. A harmonic function u on X is called *distinguished* if $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ on B. A map $f: X \to X'$ is called *distinguished* if $f(B) \subset B'$.

A non-constant conformal map $f: X \to X'$ is distinguished if and only if it is open. We note that a distinguished continuous map $f: X \to X'$ is conformal if and only if $f|R : R \to R'$ is conformal.

Since the spaces X and R are connected, locally connected and locally compact (by RADO, they are also with countable basis), there exist the (nowhere disconnecting and 0-dimensional) ideal boundaries $\beta(X) = X^* - X$ and $\beta(R) = R^* - R$. The closure of B in X^* will be denoted by B^*.

Lemma 4. There exists a continuous map $\sigma: X^* \to R^*$ having the following properties:

1° $\sigma|R$ is the identity map of R.

2° The connected components of the set $B \cup \beta(X)$ are exactly the fibres $\sigma^{-1}(\gamma)$ with $\gamma \in \beta(R)$.

3° B^* is connected if and only if B is contained in a single fibre $\sigma^{-1}(\gamma)$.

Proof. By Corollary 1, the set $B \cup \beta(X)$ is nowhere disconnecting in X, and, by Lemma 2, the identity map of R has a (unique) continuous extension $\sigma: X^* \to R^*$, and we have $\sigma(B \cup \beta(X)) \subset \beta(R)$. By Lemma 3, σ has property 2°. If B^* is connected, $\sigma(B^*)$ contains a single point $\gamma \in \beta(R)$, so that $B \subset \sigma^{-1}(\gamma)$. Conversely, if $B \subset \sigma^{-1}(\gamma)$, then $B^* \subset \sigma^{-1}(\gamma)$; further, as $\beta(X)$ is 0-dimensional and B^* is closed, any point of $\beta(X) - B^*$ is clearly a connected component of $B \cup \beta(X)$ and therefore is a fibre $\sigma^{-1}(\gamma')$ with $\gamma' \in \beta(R)$ and $\gamma' \neq \gamma$; thus $B^* = \sigma^{-1}(\gamma)$. This completes the proof of the lemma.

Definition 4. If B is contained in a single fibre $\sigma^{-1}(\gamma)$, $\gamma \in \beta(R)$, we shall say that B is situated on a single element $\gamma \in \beta(R)$ and denote this by $\gamma = \gamma_B$.

Lemma 5. Suppose X has a non-empty border B; then there exist an ordinary Riemann surface $\hat{X}$ and an indirectly conformal automorphism s of $\hat{X}$ such that: $X \subset \hat{X}$ with a directly conformal inclusion map, $s|B$ is the identity map, $X \cap s(X) = B$, and $s^{-1} = s$. Moreover, the pair (X, s) is uniquely determined by these properties.

Proof. The existence of $\hat{X}$ and s with the mentioned properties is known (for example, PFLUGER [21], pp. 14—15). Now let (F, s) and (F_1, s_1) be two pairs having the properties stated in the lemma. We define the map $h: F \to F_1$, by setting $h(x) = x$ if $x \in X$ and $h(x) = s_1(s(x))$ if $x \in s(X)$. Then clearly h is a directly conformal homeomorphism of F onto F_1, with $h(x) = x$ for any $x \in X$, and which maps $s(X)$ onto $s_1(X)$. This established the lemma.

Definition 5. $\hat{X}$ (together with s) is called the (Schottky) *double* of X.

The inclusion map $X \subset \hat{X}$ is obviously proper, so that, by Theorem 1, it can be extended, uniquely, to a homeomorphism of the compact space $X^* = X \cup \beta(X)$ into the compact space $\hat{X}^* = \hat{X} \cup \beta(\hat{X})$. We identify X^*

with its image by this homeomorphism. Then X^* (= the closure in X^* of R) is a compact and hence closed subset of $\hat{X}^*$, so that X^* coincides with the closure in $\hat{X}^*$ of R. Similarly B^* (= the closure in X^* of B, by definition) coincides with the closure in $\hat{X}^*$ of B. Furthermore, by Theorem 1, the automorphism s of $\hat{X}$ is extendable to an automorphism s^* of $\hat{X}^*$. Then we have

Lemma 6. $s^* | B^*$ *is the identity map*, $X^* \cap s^*(X^*) = B^*$, *and* $(s^*)^{-1} = s^*$.

Proof. The set of fixed points of s^* is closed and contains B, so that it contains B^*, which proves the first assertion. Hence it follows that $X^* \cap s^*(X^*) \supset B^*$. Now let $\gamma \in X^* \cap s^*(X^*)$ and let V^* be any connected open neighborhood in $\hat{X}^*$ of γ. Then $V = V^* - \beta(\hat{X})$ is a region in $\hat{X} = R \cup B \cup s(R)$. The sets $V \cap R$ and $V \cap s(R)$ are open and disjoint. Moreover, as the automorphism s^* maps the closure (in $\hat{X}^*$) of R onto the closure (in $\hat{X}^*$) of $s(R)$, that is $s^*(X^*)$ is the closure (in $\hat{X}^*$) of $s(R)$, from $\gamma \in X^*$ and $\gamma \in s^*(X^*)$ it follows that V^* contains points of R and of $s(R)$, so that $V \cap R$ and $V \cap s(R)$ are non-empty. But $V = V \cap R \cup V \cap B \cup V \cap s(R)$ is connected, consequently $V \cap B$ is non-empty. As V is arbitrary, we conclude that $\gamma \in B^*$, which proves the second assertion. The last assertion is immediate.

Let Y be a region in X. As the set $Y \cap R$ is a region in R and the set $Y \cap B$ is open in B, Y is canonically endowed with a structure of bordered Riemann surface with the border $B(Y) = Y \cap B$. Let[7] $\partial Y = \overline{Y} - Y$ be the relative boundary of Y, and consider the following conditions:

1) ∂Y is nowhere disconnecting in $\overline{Y}$.

2) ∂Y is locally jordanian, i.e. each point $x \in \partial Y$ has a neighborhood V in X with the property that $V \cap \partial Y$ is a non-degenerated Jordan arc.

3) Any connected component c of $R \cap \partial Y$ is a closed analytic Jordan curve or an open Jordan arc with $\bar{c}$ an analytic arc on X having the ends on B and being normal to B.

4) ∂Y is non-empty and compact.

Definition 6. A region Y in X is called *distinguished* if it satisfies conditions 1) and 2), and *normal* if it satisfies conditions 1)—4).

If ∂Y is nowhere disconnecting in $\overline{Y}$, so is $B(\overline{Y}) = \overline{Y} - Y \cap R = B(Y) \cup \partial Y$ by Corollary 1. Further, if ∂Y is nowhere disconnecting in $\overline{Y}$ and locally jordanian, so is $B(\overline{Y})$. It follows that, if Y is distinguished, for each point $x \in B(\overline{Y})$ there exists a neighborhood V in $\overline{Y}$ of x and a homeomorphism λ from V onto D' in such a way that $\lambda | (V - B(\overline{Y}))$ is directly conformal and $\lambda(V \cap B(\overline{Y})) = \{z; |z| < 1, \operatorname{Im}(z) = 0\}$. Hence, *for any distinguished region* Y *in* X, $\overline{Y}$ *naturally becomes a bordered Riemann surface having the border* $B(\overline{Y})$. In a similar way we see that, for any distinguished region Y in X, there exist a bordered Riemann surface $X_1 = R_1 \cup B_1$, a region Y_1 satisfying conditions 1) to 3) in X_1 and a homeomorphism h of $\overline{Y}$ onto $\overline{Y}_1$ such that $h | Y$ is directly conformal and $h(\partial Y) = \partial Y_1$. Hence we see that condition 3) can generally be omited.

---

[7]) If A is any subset of X, we shall use $\overline{A}$ for the closure in X of A; in particular $\overline{R} = X$ and $\partial R = B$.

Definition 7. Let Y be a relatively non-compact normal region in X; a sequence $(Y_n)_{n \in N}$, $N =$ the set of natural numbers, of relatively compact normal regions of X, contained in Y, is called a *relative exhaustion* of Y if: a) $\partial Y \subset \overline{Y}_1$, b) $\overline{Y}_n \subset Y_{n+1}$, c) $Y - Y_n$ is free from relatively compact connected components, and d) any connected component of ∂Y_n disconnects Y, $n \in N$. For $Y = X$ we have the notion of exhaustion of X. If Y is a finite union of mutually disjoint normal regions Y^i in X, the sequence $(Y_n)_{n \in N}$ is a relative exhaustion of Y if, for each i, $(Y_n \cap Y^i)_{n \in N}$ is a relative exhaustion of Y^i.

The proof of the existence of a relative exhaustion for a normal region is similar to that used in the ordinary case.

Definition 8. Let α be an ideal boundary set of X, i.e. $\alpha \subset \beta(X)$, and let $Y^* \supset \alpha$ be a finite union of regions Y_i^* in X^*, with mutually disjoint closures in X^*, with $\alpha \cap Y_i^* \neq 0$ for each i, and with $Y_i = Y_i^* \cap X$ normal regions. Then we shall say that $Y = \cup Y_i$ is a *normal neighborhood* in X of α.

We note that any normal neighborhood of an ideal boundary component γ is connected. From the existence of an exhaustion of X it immediately follows that any ideal boundary set α of X has a basis of normal neighborhoods (in X).

Definition 9. Let α be an ideal boundary set of X. A property which is common to all the pairs (Y, α), where Y is any normal neighborhood in X of α, is called an *α-property* of X; in the case $\alpha = \beta(X)$, we say *boundary property* instead of $\beta(X)$-property.

In view of introducing further notions, it is necessary to consider *relative homology* on X: For $q = 0, 1, 2$, a q-chain (see NEVANLINNA [18]) in X is a q-cycle (we say simply *cycle* for 1-cycle) if its boundary is contained in B. So we have the relative homology groups $H_q(X, B)$. Furthermore, as in the ordinary case (NEVANLINNA [18]), we have the notion of dividing cycle and of dividing homology class $\in H_1(X, B)$.

Definition 9a. We say that X is *(relatively) planar* if all homology classes of $H_1(X, B)$ are dividing; we say that X has *finite (relative) genus* if $H_1(X, B)$ has only a finite number of non-dividing classes.

Lemma 7. Suppose X has a non-empty border. Then the following three conditions are equivalent:

1° R is planar and B is situated on a single element $\gamma_B \in \beta(R)$.

2° $\hat{X}$ is planar.

3° X is (relatively) planar.

Proof. First suppose that 1° holds. Then γ_B is hyperbolic [11, Theorem 6], so that [11, Theorem 10] we may assume that X is a region in the unit disc $\overline{D} = D \cup \Gamma$, where $\Gamma = \{z; |z| = 1\}$. Then we have $B \subset \Gamma$. Let s_1 be the symmetry map with respect to Γ in the extended complex z-plane. Then $\hat{X} = X \cup s_1(X)$ is planar and all homology classes on $\hat{X}$ are dividing. Conversely, if R is non-planar, clearly $\hat{X}$ is non-planar. Furthermore, if $\sigma(B)$ contains two points $\gamma_1 \neq \gamma_2$, there exists a Jordan arc c on R^* joining γ_1 and γ_2 such that $c \cap R$ is a non-disconnecting open Jordan arc on R and such that $\sigma^{-1}(c)$ is a Jordan arc on X with the ends on B; clearly $\hat{c} = c \cup s(c)$ does not disconnect $\hat{X}$. This completes the proof.

Remark. Similarly we may see that the following assertions are equivalent:

a) R has finite genus and $\sigma(B)$ is finite.

b) X has finite genus.

c) X has finite (relative) genus.

Definition 10. An ideal boundary component γ of X is said to be of *planar type* if there exists a normal neighborhood Y of γ having a planar closure $\overline{Y}$. The set of all ideal boundary components of planar type of X is denoted by $\beta_1(X)$.

Clearly $\beta_1(X)$ is an open subset of $\beta(X)$ and $\beta_1(X) = \beta(X)$ if and only if X has finite (relative) genus.

§ 3. Modulus of an ideal boundary set

Let $X = R \cup B$ be a bordered Riemann surface. We consider cycles c on X having the form $c = \sum_i c_i$, where each c_i is either a closed Jordan curve contained in R or a Jordan arc such that $c_i \cap B$ contains exactly the ends of c_i. We shall also attribute to c the set meaning, i.e. $c = \bigcup_i c_i$. The set c disconnects X if and only if the cycle c is dividing. Since $\beta(X)$ is nowhere disconnecting, c disconnects X if and only if c disconnects X^*. If A_1 and A_2 are sets in X, we shall say that a dividing cycle c separates A_1 from A_2 if $X^* - c = U_1^* \cup U_2^*$, where U_1^* and U_2^* are disjoint open sets and $A_1 \subset U_1^*$ and $A_2 \subset U_2^*$.

Let β be the (nowhere disconnecting and 0-dimensional) ideal boundary of X, α a subset of β, Y a normal neighborhood (in X) of α, $\alpha_0 = \partial Y$. Let $(Y_n)_{n \in N}$ be a relative exhaustion of Y, and let $\beta_n = \partial(Y_n) - \alpha_0$, $n \in N$. Then the set β_n has only a finite number of connected components, say β_{ni}. We shall also attribute to β_n the cycle meaning, i.e. $\beta_n = \sum_i \beta_{ni}$. Since β_n is a dividing cycle on X which separates α from α_0, there exists a minimal subcycle of β_n having the same property; this subcycle is uniquely determined and will be denoted by α_n. We shall also consider α_n as a subset of β_n.

Definition 11. A distinguished harmonic function u on Y will be called *admissible* for α_0 and α if[8]) $u = 0$ (continuously) on α_0, $\int_{\alpha_n} d\tilde{u} = 1$, and $\int_{\beta_{ni} \notin \alpha_n} d\tilde{u} = 0$, $n \in N$.

Lemma 8[9]). In the class of admissible harmonic functions u on Y_n for α_0 and α_n there exists one, say u_n, which satisfies the following two equivalent conditions:

1) $u = \text{const} = \mu_n$ on α_n, and $u_n = \text{const} = \mu_{ni}$ on each $\beta_{ni} \notin \alpha_n$.

2) $D(u_n) = \min D(u)$.

Definition 12. We say that u_n is the *extremal function* of Y_n for α_0 and α_n, and that $\mu_n = D(u_n)$ is the *modulus* of Y_n for α_0 and α_n; the notation $\mu_n = \mu(Y_n; \alpha_0, \alpha_n)$ is used.

---

[8]) If u is harmonic, we shall use $\tilde{u}$ to denote the conjugate harmonic function of u.

[9]) For the proofs of the statements of this § we refer to [11].

Theorem 3. a) *The sequence $(u_n)_{n\in N}$ is relatively compact for the compact (= uniform on each compact set) convergence in $\overline{Y}$.*

b) *Each limit function u_α of (u_n) is admissible on Y for α_0 and α, and satisfies*

$$D(u) = D(u_\alpha) + D(u - u_\alpha),$$

where u is any admissible function Y for α_0 and α.

c) *The sequence $(\mu_n)_{n\in N}$ is non-decreasing and $D(u_\alpha) = \lim \mu_n$.*

It is clear, by Theorem 3, that if $\lim \mu_n < \infty$ the extremal function u_α is unique.

Definition 13. We say that u_α is the *extremal function* of Y for α_0 and α, and that $\mu_\alpha = D(u_\alpha)$ is the *modulus* of Y for α_0 and α; the notation $\mu(Y; \alpha_0, \alpha)$ is used.

By Lemma 8, Theorem 3 and the uniqueness of u_α in the case $\lim \mu_n < \infty$, we see that Definitions 12 and 13 are consistent.

If $\mu(Y; \alpha_0, \alpha) = \infty$ for a normal neighborhood Y of α, then $\mu(Y'; \alpha_0, \alpha) = \infty$ for any other normal neighborhood Y' of α [11, Lemma 3].

Definition 14. An ideal boundary set α of X is said to be *parabolic* if $\mu_\alpha = \infty$ and *hyperbolic* if $\mu_\alpha < \infty$. If $\mu_\gamma = \infty$ for any $\gamma \in \alpha$, we say that α is *absolutely disconnected*.

We note that the property of α of being parabolic or absolutely disconnected is an α-property of X.

Remark. Suppose $Y = X$, and let $x \in Y_1$ and z be a local parameter at x ($z = 0 \leftrightarrow x$). Call admissible on X for α, x, z any real function t on X satisfying the following conditions: t is harmonic distinguished on $X - \{x\}$, $t = \log|z| + \varphi$ in the parametric neighborhood of x with a harmonic φ and with $\varphi(0) = 0$, $\int_{\alpha_n} d\bar{t} = 2\pi$ and $\int_{\beta_{ni}\notin\alpha_n} d\bar{t} = 0$, $n \in N$. Let $I(t) = \lim \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_n} t\, d\bar{t}$. Let t_n be the admissible function on Y_n for α_n, x, z satisfying $t_n = \text{const} = k_n$ on α_n and $t_n = \text{const} = k_{ni}$ on each $\beta_{ni} \notin \alpha_n$. Then we have the following theorem of SARIO [29]:

The sequence $(t_n)_{n\in N}$ is relatively compact for the compact convergence in X; any limit function t_α of (t_n) is admissible on X for α, x, z, and satisfies $I(t) = I(t_\alpha) + D(t - t_\alpha)$, for any admissible t; the sequence (k_n) is non-decreasing and $I(t_\alpha) = \lim k_n = k_\alpha$ (say).

t_α is called *the capacity function* of X for α, x, z, and $c_\alpha = e^{-k_\alpha}$ *the capacity* of X for α, x, z. We have $c_\alpha = 0$ *if and only if α is parabolic* [11, Theorem 3]. Furthermore, setting $g_n = k_n - t_n$, *the sequence (g_n) has a finite limit g_α if and only if α is hyperbolic.* For α hyperbolic, the function $g_\alpha = g_\alpha(x', x)$ is positive, harmonic in x' on $X - \{x\}$, and symmetrical: $g_\alpha(x', x) = g(x, x')$. We call g_α the *Green function* of X for α and x.

We now consider conformal metrics on X. If ϱ is any conformal metric on an open set containing the cycle $c = \sum_i c_i$, we define the *ϱ-length* of c by the lower Darboux integral $l(\varrho; c) = \sum_i \int_{c_i} \varrho(z)|dz|$.

Further, if ϱ is any measurable (in Lebesgue's sense) conformal metric on an open subset V of X, we define the *ϱ-area* of V, by the Lebesgue integral $A(\varrho; V) = \int_V \varrho^2(z)\, d\sigma_z$, where σ_z is the local Lebesgue measure. Clearly, for $\varrho_\alpha = |\operatorname{grad} u_\alpha|$, $A(\varrho_\alpha; Y) = \mu_\alpha$.

Definition 15. A measurable conformal metric ϱ on Y is said to be *admissible* for α_0 and α if $l(\varrho; c) \geqq 1$ for any cycle c on Y separating α from α_0.

Clearly, if a harmonic function u on Y is admissible for α_0 and α, so is the conformal metric $\varrho = |\operatorname{grad} u|$.

Theorem 4. *In the class of admissible conformal metrics on Y for α_0 and α, $\varrho_\alpha = |\operatorname{grad} u_\alpha|$ gives the minimum of $A(\varrho; Y)$; moreover $A(\varrho; Y) = \mu_\alpha + A(\varrho - \varrho_\alpha; Y)$, for any admissible ϱ.*

Remark. From the proof given in [11] it follows that the theorem remains true if we define admissibility by requiring condition $l(\varrho; c) \geqq 1$ only for *analytic* cycles c separating α from α_0.

An immediate consequence of Theorem 4 is

Theorem 5. *An ideal boundary set α of X is parabolic if and only if for any measurable conformal metric ϱ on Y with $A(\varrho; Y) < \infty$, there exists a cycle c on Y separating α from α_0 and having an arbitrarily small length.*

Corollary 3. If α is parabolic, so is any $\alpha_1 \subset \alpha$; hence if α is parabolic, then α is also absolutely disconnected.

Corollary 4. A finite set $\alpha \subset \beta(X)$ is parabolic if and only if all $\gamma \in \alpha$ are parabolic.

Let X_1 be a distinguished region in X; then X_1 is a bordered Riemann surface with the border $B_1 = B \cap X_1$.

Corollary 5. If $\beta(X_1)$ is parabolic (resp. absolutely disconnected), then so is $\beta(X)$.

If $\gamma_1 \in \beta(X_1)$, the set $\bar{\gamma}_1 = \bigcap_n \bar{V}_n$, where $(V_n)_{n \in N}$ is a basis of normal neighborhoods in X_1 of γ_1 and where $\bar{V}_n$ is the closure in X of V_n, is a closed subset of X. We have [11, Theorem 6]:

Theorem 6. *If $\bar{\gamma}_1$ contains a continuum, γ_1 is hyperbolic.*

Corollary 6. If $\beta(X_1)$ is absolutely disconnected, $X - X_1$ is 0-dimensional.

Corollary 7. If X is planar and $\beta(X)$ absolutely disconnected, $X^* = X \cup \beta(X)$ is the unit disc $\bar{D}$ when $B \neq 0$ and the extended complex plane (w) when $B = 0$.

Proof. If X is planar and $B \neq 0$, X may be considered as a region in $\bar{D}$ [11, Theorem 10]. If, in addition, $\beta(X)$ is absolutely disconnected, then by Corollary 6, $\bar{D} - D$ is 0-dimensional and hence also nowhere disconnecting in $\bar{D}$. Consequently X^* and $\bar{D}$ are homeomorphic by Theorem 1. The proof is similar in the case $B = 0$.

We suppose now that B is non-empty. Let $\hat{X} = X \cup s(X)$ be the double of X, $\hat{Y} = Y \cup s(Y)$, $\hat{\alpha}_0 = \alpha_0 \cup s(\alpha_0)$, $\hat{\alpha} = \alpha \cup s^*(\alpha)$, and $\mu_{\hat{\alpha}}$ the modulus of $\hat{Y}$ for $\hat{\alpha}_0$ and $\hat{\alpha}$. Let $\hat{u}_\alpha$ be the harmonic function on $\hat{Y}$ defined by $\hat{u}_\alpha(x) = u_\alpha(x)$ if $x \in X$ and $\hat{u}_\alpha(x) = u_\alpha(s(x))$ if $x \in s(X)$. Clearly $\hat{u}_\alpha \circ s = \hat{u}_\alpha$.

Lemma 9. The function $\frac{1}{2}\hat{u}_\alpha$ is extremal on $\hat{Y}$ for $\hat{\alpha}_0$ and $\hat{\alpha}$, and hence $\mu_{\hat{\alpha}} = \frac{1}{2}\mu_\alpha$.

Proof. Let $\hat{u}_n$ be the harmonic function on $\hat{Y}_n = Y_n \cup s(Y_n)$ defined by $\hat{u}_n(x) = u_n(x)$ if $x \in Y_n$ and $\hat{u}_n(x) = u_n(s(x))$ if $x \in s(X)$. It follows from Lemma 8 that $\frac{1}{2}\hat{u}_n$ is the extremal function of $\hat{Y}_n$ for $\hat{\alpha}_0$ and $\hat{\alpha}_n = \alpha_n \cup s(\alpha_n)$. As clearly $\hat{u}_\alpha$ is a limit function of the sequence $(\hat{u}_n)$, the lemma follows.

Corollary 8. $\alpha \subset \beta(X)$ is parabolic (absolutely disconnected) if and only if $\hat{\alpha} \subset \beta(\hat{X})$ is parabolic (absolutely disconnected).

Let R_1 be a region in the unit circle D of the extended complex plane (w) satisfying the following conditions:

a) There exists a sequence of (closed or not) segments $b_i \subset D - R_1$ on $\arg w =$ const., such that each point of b_i has a neighborhood V with $V \cap b_i = V \cap (D - R_1)$.

b) Let $b = \bigcup_i b_i$ and $'R_1 = R_1 \cup b$; then the set $D - {'R_1}$ is closed in D, has a vanishing area and each connected component of $D - {'R_1}$ is a point or an arc on $|w| =$ const. with at most one point belonging to b_i.

For such an R_1 we may naturally obtain a bordered Riemann surface $X_1 = R_1 \cup B_1$ in such a way that we have a continuous map $\tau : X \to {'R_1}$ having the following properties: $\tau | R_1$ is the identity map, $\tau(B_1) = b$, for each $w \in \mathring{b}_i$ $\tau^{-1}(w)$ contains exactly two points, say x_1 and x_2, and $\tau | B_1$ is locally topological in x_1 and x_2[10]). We shall call X a *bordered slit circle*, and say that the border B_1 of X_1 is situated on b. Similarly we have the notion of a *bordered slit annulus*.

Now let $\gamma \in \beta(X)$ and Y a normal neighborhood of γ *with a connected relative boundary* α_0. Let $f_\gamma = e^{2\pi(u_\gamma + i\bar{u}_\gamma)}$. If $Y \cap R$ is planar, f_γ is clearly single-valued. Moreover, we have (cf. the proof of Theorem 9 in [11]):

Theorem 7. *If $Y \cap R$ is planar and γ hyperbolic, the direct conformal map $f_\gamma : Y \cap R \to (w)$ is topological and $f_\gamma(Y)$ is a bordered slit annulusin $1 < |w| < e^{2\pi\mu_\gamma}$ with $|w| = 1$ and $|w| = e^{2\pi\mu_\gamma}$ corresponding to α_0 and γ respectively. If, in addition, $\overline{Y}$ is planar, then at a suitable determination for $\bar{u}_\gamma$, the border of $f_\gamma(\overline{Y})$ is situated on the negative real axis.*

Again suppose $\gamma \in \beta(X)$ be hyperbolic. Let $x \in X$, let g_γ be the Green function of X for γ and x, and let $h_\gamma = e^{-g_\gamma - i\bar{g}_\gamma}$. From Theorem 7 it follows (cf. Lemma 4 in [11]).

Theorem 8. *If R is planar and γ hyperbolic, $h_\gamma : R \to (w)$ is topological and $h_\gamma(X)$ is a bordered slit circle with $|w| = 1$ corresponding to γ. If, in addition, X is planar, then, at a suitable determination for $\bar{g}_\gamma$, the border of $h_\gamma(X)$ is situated on the negative real axis*

§ 4. Classification

Let $X = R \cup B$ be a bordered Riemann surface. We consider the following properties of a harmonic function u on X:

H = harmonic distinguished.

[10]) $\mathring{b}_i$ is the interior of b_i; for $w \in D \cap (b_i - \mathring{b}_i)$, $\tau^{-1}(w)$ contains a single point.

$K = H$ and $\int_c d\tilde{u} = 0$ for any dividing cycle c on X.
$A = H$ and $u + i\tilde{u}$ single-valued.
$S = K$ and $u + i\tilde{u}$ univalent on R (only for a planar R).
$H^\circ =$ harmonic and $u = 0$ on B.
$K^\circ = H^\circ$ and $\int_c d\tilde{u} = 0$ for any dividing cycle c on X.
$A^\circ = H^\circ$ and $u + i\tilde{u}$ single-valued.
$S^\circ = K^\circ$ and $u + i\tilde{u}$ univalent on R (only for a planar R).
$B =$ bounded.
$D =$ with a finite Dirichlet integral.
$BD = B$ and D.

Let $E = H, K, A, S$ and $F = B, D, BD$, and let EF (resp. $E^\circ F$) be the class of all functions u on X having properties E and F (resp. E° and F).

Definition 16. We define the *harmonic classes* of bordered Riemann surfaces 0_{EF}, $0_{E^\circ F}$ and 0°_{EF} as follows: 0_{EF} (resp. $0_{E^\circ F}$) is the class of all bordered Riemann surfaces X on which there exist no non-constant functions of the class EF (resp. $E^\circ F$). 0°_{EF} is the class of all bordered Riemann surfaces X with the property that every distinguished region Y of X belongs to the class $S0_{EF}$, i.e. any $u \in EF$ on Y, satisfying $u = 0$ (continuously) on ∂Y is $\equiv$ const ($= 0$, if $\partial Y \neq 0$)[11]).

It is clear that $0^\circ_{EF} \subset 0_{E^\circ F}$, $0_{HF} \subset 0_{KF}$ and $0_{H^\circ F} \subset 0_{K^\circ F}$.

Definition 17. We define the *modular classes* M_i, $i = 0, 1, 2, 3$ ($M_3 = M$), as follows: M_0 (resp. M_1) is the class of all bordered Riemann surfaces X with parabolic (resp. absolutely disconnected) $\beta(X)$. M_2 is the class of all bordered Riemann surfaces X having the property that for any distinguished subregion Y with a planar closure $\overline{Y}$, $\overline{Y} \in M_1$. $M_3 = M$ is the class of all $X \in M_2$ which are free from planar ideal boundary[12]).

It is clear that, for bordered surfaces of finite genus, $M_1 = M_2$ and M contains only compact surfaces. We note that the property of belonging to a modular class is a boundary property of X.

Let Y be a normal neighborhood (in X) of $\beta(X)$. We say that the *unrestricted maximum principle* holds on X if for any $u \in HB$ on Y, continuous on $\overline{Y}$, we have $\sup_Y u \leq \max_{\alpha_e} u$. The following lemma generalizes a well known theorem of MYRBERG (see, for example ROYDEN [25]).

Lemma 10. $X \in M_0$ if and only if the unrestricted maximum principle holds on X.

---

[11]) For ordinary Riemann surfaces $X = R$, $0_{EF} = 0_{E^\circ F}$, and these classes are well known (see AHLFORS and BEURLING [1], and SARIO [26—30]). The classes 0_{EF}, $0_{E^\circ F}$, for $B \neq 0$, and 0°_{EF}, for $B = 0$ and for some E and F, were introduced by KURODA [15, 16], who used the notations $N0_{EF}$ for 0_{EF} and $S0_{EF}$ for $0_{E^\circ F}$; see also ROYDEN [25], and CONSTANTINESCU and CORNEA [5].

[12]) Suppose we are in the ordinary case: the class M_1, for planar surfaces, was introduced by AHLFORS and BEURLING [1], and, for arbitrary surfaces, by SARIO [29]. The class M_2 may be considered as a further generalization of Ahlfors and Beurling class $0_{SB} = 0_{SD}$.

Proof. If $X \notin M_0$, the extremal function on Y for α_0 and β clearly violates the unrestricted maximum principle. Conversely, let $X \in M_0$ and $u \in HB$ on Y, continuous on $\overline{Y}$ and satisfying $u \leqq m$ on α_0. Then for each $\varepsilon > 0$, we have $u \leqq m + \varepsilon \mu_n$ on β_n, for $n \geqq n(\varepsilon)$, whence $u \leqq m + \varepsilon u_n$ on Y_n because u and u_n are distinguished. Hence $u \leqq m + \varepsilon u_\beta$, so that, for $\varepsilon \to 0$, $u \leqq m$, which completes the proof.

Theorem 9. *The inclusion diagram*

$$M_0 \not\subset 0_{HB} \begin{matrix} \subset 0_{HD} \subset \\ \subset 0_{KB} \subset \end{matrix} 0_{KD} \subset M_2$$

holds for arbitrary bordered surfaces. Moreover $0_{HBD} = 0_{HD}$ *and* $0_{KBD} = 0_{KD}$.

Proof. The inclusion $M_0 \subset 0_{HB}$ follows from Lemma 10, the inclusion $0_{HB} \subset 0_{KB}$ is obvious, and the inclusions $0_{HB} \subset 0_{HD}$ and $0_{KB} \subset 0_{KD}$ and equalities $0_{HBD} = 0_{HD}$ and $0_{KBD} = 0_{KD}$ may be proved by extending Sario's method of [28]. The inclusion $0_{KD} \subset M_2$ will be proved below (Corollary 11).

The inclusion diagram, being throughout strict in the ordinary case [1, 30, 35], is a fortiori throughout strict in the bordered case.

Theorem 10. *For planar bordered surfaces,* $M_1 = M_2 = 0_{SF} = 0_{S^\circ F}$, $F = B, D$[13]).

Proof. We already know that $M_1 = M_2$ for the finite genus case. Also, it is clear that $0_{SF} = 0_{S^\circ F}$. Finally the equalities $M_1 = 0_{SF}$, $F = B, D$, may be proved by means of the reasoning used in [11] for the ordinary case.

Corollary 9. For planar bordered surfaces, $E = H, K, S$ and $F = B, D, BD$, $0_{EF} \cup 0_{E^\circ F} \subset M_1 = M_2$.

Lemma 11. Let Ω be a region in the extended complex plane (w), containing $w = \infty$; if $\Omega \in M_1 - 0_{KD}$, the set $\beta(\Omega) = (w) - \Omega$ has infinite length[14]).

Proof. We shall show that if $\Omega \in M_1$ and the length of $\beta(\Omega)$ is finite, then $\Omega \in 0_{KD}$. By a theorem of SARIO [26], it will be enough to show that any directly conformal homeomorphism h of Ω onto a region Ω' in the extended complex plane (w') is (the restriction to Ω of) a linear map. By Corollary 6, $\beta(\Omega)$ and $\beta(\Omega')$ are 0-dimensional and hence also nowhere disconnecting. It follows from Theorem 1 that h can be extended to a homeomorphism h^* of (w) onto (w'). Since $\beta(\Omega)$ has a finite length, it follows from a lemma of PAINLEVÉ-POMPEIU (see [22]), whose proof is by the familiar argument of Cauchy's integral, that h^* is conformal, and hence linear. This establishes the lemma.

Theorem 11. *For simply connected bordered surfaces,* $0_{KD} = M_1 = M_2$.

Proof. $X = R \cup B$ is simply connected if and only if X is planar and R simply connected (by Theorem 8, applied to R and γ_B). Hence, by Corollary 9, inclusion $0_{KD} \subset M_1$ is certainly true. To prove the converse inclusion, we need some preparations. Let X be simply connected. We may suppose $B \neq 0$ (for the ordinary case the theorem is obvious). Then γ_B is hyperbolic by Theorem 6

---

[13]) In the ordinary case, the equality $0_{SB} = 0_{SD}$ was first proved by AHLFORS and BEURLING [1]; see also SARIO [29], and author's paper [11].

[14]) In connection with this lemma and Theorem 11 see also AHLFORS and BEURLING [1].

and therefore X can be considered as a region in $\bar{D}$ by Theorem 8. Then $R = D$. Let s_1 be the symmetry map with respect to Γ in (w).

After these preparations, let $X \in M_1$ and u be any function of KD on X. Let $\hat{u}$ be the harmonic function on $\hat{X} = X \cup s_1(X)$ defined by $\hat{u}(x) = u(x)$ if $x \in X$ and $\hat{u}(x) = u(s_1(x))$ if $x \in s_1(X)$. Clearly $\hat{u} \in KD$ on $\hat{X}$. Now, by Corollary 8, $\hat{X} \in M_1$. As $(w) - \hat{X} \subset \Gamma$, Lemma 11 gives $\hat{X} \in 0_{KD}$. This yields $\hat{u} = \text{const}$, i.e. $u = \text{const}$, and the proof is complete.

For further investigation on the harmonic classes 0_{HF} we need an extension to the bordered case of Sario's linear operator theory [27]. To this purpose we consider a finite union $Y = \bigcup_i Y^i$ of normal regions Y^i with mutually disjoint closures $\bar{Y}^i$. Let $c = \partial Y = \bigcup_i \partial Y^i$. A function v on c will be called *distinguished* if there exist a neighborhood V in X of c and a distinguished harmonic function v_1 on V such that $v_1 | c = v$. Let H_c be the set of all distinguished functions v on c, and let H_Y be the set of all distinguished harmonic functions u on Y, continuous on $\bar{Y}$. Clearly H_c and H_Y are real vector spaces. A linear map $L: H_c \to H_Y$ will be called a *normal linear operator if*, for any $v \in H_c$, $u = L(v)$, the following two conditions are satisfied:

1) $u = v$ on c and $\int_c d\bar{u} = 0$,

2) $\min_c v \leqq u \leqq \max_c v$, on Y.

Let $(Y_n)_{n \in N}$ be a relative exhaustion of Y. For $v \in H_c$, let u_n^0 be the function $\in HB$ on Y_n with $u_n^0 = v$ on c and $\frac{\partial u_n^0}{\partial n} = 0$ on β_n, and let u_n^1 be the function $\in HB$ on Y_n with $u_n^1 = v$ on c and $u_n^1 = \text{const} = k_{ni}$ on each β_{ni}. Then it is not difficult to see that the sequences $(u_n^0)_{n \in N}$ and $(u_n^1)_{n \in N}$ are convergent. If $u^0 = \lim u_n^0$ and $u^1 = \lim u_n^1$, we easily see that the maps $v \to u^0 = L_0(v)$ and $v \to u^1 = L_1(v)$ are normal linear operators satisfying, in addition, the following condition:

3) $D(u) = \int_c v\, d\bar{u}$.

Now let Y_0 and Y_1 be open sets in X each having the above mentioned properties of Y. We suppose, in addition, that $Y_0 \cap Y_1 = 0$, that $\partial Y_0 = \partial Y_1 = c$ (say) and that $X - c = Y_0 \cup Y_1$. Let c_0 and c_1 be the two edges of c, in Y_0 and Y_1, respectively, each c_i being traced in the negative direction with respect to Y_i. Let L be a normal linear operator on $X - c$ for the two edges c_0 and c_1 of c. Let v be a single-valued real function on $X - c$, harmonic distinguished near c and such that setting $v_i = v | Y_i$, each v_i is extendable to a distinguished harmonic function across c. Then we have the following

Theorem 12 (Sario). *The condition* $\int_{c_0 + c_1} d\bar{v} = 0$ *is necessary and sufficient for the existence of a function u on X, harmonic distinguished on c and such that $u - v = L(u - v)$ on $X - c$. The function u is unique up to and additive constant and $u = \text{const}$ if and only if $v = L(v)$ on $X - c$.*

Proof. Sario's proof given for the ordinary case in [27] can, in a natural extension, be applied to the bordered case.

Definition 18. Let Y be a finite union of normal regions Y^i with mutually dispoint closures $\overline{Y}^i$, and let $c = \partial Y$. Then we shall say that Y has *Sario's EF-property*, $E = H, K$ and $F = B, D, BD$, if from $u \in EF$ on Y, $u = 0$ (continuously) on c and $\int_c d\bar{u} = 0$, it follows $u \equiv 0$.

From Theorem 12 it easily follows, as in the ordinary case [27],

Theorem 13. *Let Y be as in Definition 18, and let $E = H, K$ and $F = B, D, BD$. Then if $X \in 0_{EF}$, Y has Sario's EF-property; conversely, if Y has Sario's EF-property and $X - Y$ is compact, $X \in 0_{EF}$.*

Hence it follows in particular that the property of X of belonging to a class 0_{EF}, $E = H, K$ and $F = B, D, BD$, is a boundary property of X.

Theorem 14. *Let Y be a normal region in X, and let $E = H, K$ and $F = B, D, BD$. Then if $X \in 0_{EF}$, $\overline{Y} \in 0_{EF}$; conversely if $\overline{Y} \in 0_{EF}$ and $X - Y$ is compact, $X \in 0_{EF}$.*

Proof. Let Z be a normal region in X such that $\overline{Z} \subset Y$ and $\overline{Y} - Z$ is compact. Then we may consider Z as a normal region both in X and in $\overline{Y}$. Hence we see by Theorem 13 that if $X \in 0_{EF}$, Z has Sario's EF-property, consequently, as $\overline{Y} - Z$ is compact, $\overline{Y} \in 0_{EF}$. The proof of the converse is similar.

Definition 19. For $E = H, K, A$ and $F = B, D$, we say that $X = R \cup B$ is of class $\hat{0}_{EF}$ if $\hat{X} = X \cup s(X) \in 0_{EF}$ when $B \neq 0$ and if $X \in 0_{EF}$ when $B = 0$.

It is immediate that $\hat{0}_E \subset 0_{EF}$.

Theorem 15. *The inclusions $\hat{0}_{HF} \subset 0_{HF}$, $F = B, D, BD$, are strict.*

Proof. Let R_1 be an ordinary Riemann surface with a single ideal boundary component γ and such that γ be hyperbolic and $R_1 \in 0_{HB}$. For the existence of such an R we refer to SARIO [30] and TÔKI [35]. Let S_1 be a normal region in R_1 with a compact $R_1 - S_1$, and let $X_1 = \overline{S}_1$. Then Theorem 14 implies $X_1 \in 0_{HB}$. But, as both ideal boundary components of $\hat{X}_1$ are hyperbolic, it follows from a theorem of NEVANLINNA [18] that $\hat{X}_1 \notin 0_{HF}$ for $F = B, D, BD$. This proves the theorem.

Theorem 16[15]). *For bordered surfaces of finite genus, $M_0 = 0_{HB} = 0_{HD}$.*

Proof. We know that $M_0 \subset 0_{HB} \subset 0_{HD}$ for arbitrary surfaces. Now suppose X if of finite relative genus and $X \notin M_0$. We have to show that $X \notin 0_{HF}$ for $F = B, D, BD$. If $X \notin M_1$ this is clear by Theorem 10. Hence we may suppose $X \in M_1$. Let Y be a normal region in X such that $X - Y$ is compact and $\overline{Y}$ planar. Then it will be enough to show that $\overline{Y} \notin 0_{HF}$ by Theorem 14. Hence we may suppose that X is planar. Since the theorem is known in the ordinary case, we shall also suppose $B \neq 0$. Then, by Theorem 8 applied to R and γ_B, X may be considered as being a region in the unit disc $\overline{D}$ of (w). Let s_1 be the symmetry map with respect to $\Gamma = \overline{D} - D$ in (w). Then, by Corollary 8, $\hat{X} \in M_1 - M_0$, so that the set $(w) - X$ is 0-dimensional and has a positive harmonic measure in (w). It follows that $\overline{D} - X$ is 0-dimensional and has a positive harmonic measure in (w). Hence we may divide $\overline{D} - X$ by an analytic Jordan arc c in X, normal to Γ, in two sets α_0 and α_1 each having a positive harmonic measure

[15]) In the ordinary case, this is a well-known theorem; also the theorem is known in the simply connected bordered case (cf. KURODA [15]).

in (w). Then $X - c = Y_0 \cup Y_1$, where Y_0 and Y_1 are normal regions in X and where $\overline{Y}_0$, $\overline{Y}_1$ do not belong to M_0 by Corollary 8. Let v_0 be the extremal function of Y_0 for c and α_0 and let v_1 be the extremal function of Y_1 for c and α_1. Then $v_0, v_1 \in HBD$ on Y_0, Y_1. Let v be defined on $X - c$ by $v|Y_0 = v_0$, $v|Y_1 = -v_1$, and $v|c = 0$. Then v satisfies the condition of Theorem 12, and $v \neq L(v)$ on $X - c$, for any normal linear operator L. Let L be the operator L_0 or L_1. Then by Theorem 12 there exists a function u on X, harmonic non-constant and such that $u = v + L(u - v)$ on $X - c$. Clearly $u \in HBD$ on X. Hence $X \notin 0_{HF}$, $F = B, D, BD$, and the proof is complete.

Corollary 10. For bordered surfaces of finite genus, $E = H, K$ and $F = B, D, BD$, $\hat{0}_{EF} = 0_{EF}$.

Proof. For $E = H$, this immediately follows from Theorem 16 and Corollary 8. For $E = K$ one first shows that, in the finite genus case, $0_{KF} = 0_{K^\circ F}$ and hence one concludes that $\hat{0}_{KF} = 0_{KF}$.

Remark. For simply connected bordered surfaces $0_{HF} = 0_{AF}$ obviously, and consequently $0_{AF} = M_0$ by Theorem 16, while the inclusions $0_{HF} \subset 0_{KF}$ are strict (cf. Ahlfors and Beurling [1], observe that for planar ordinary surfaces $K = A$). Further, for ordinary surfaces, it is known that $0_{KF} \subset 0_{AF}$ strictly. We conclude that for bordered surfaces neither of the classes 0_{KF} and 0_{AF} is contained in the other.

Theorem 17. *Let Y be a distinguished region in X having a planar closure $\overline{Y}$; then for $E = H, K$ and $F = B, D, BD$, if $X \in 0_{EF}$, $\overline{Y} \in 0_{KD}$.*

Proof. Let $X \in 0_{EF}$, $E = H, K$, $F = B, D, BD$, and let Y be a distinguished region in X with a planar $\overline{Y}$. Then, as it will be proved below (Corollary 13), $\overline{Y} \in M_1$. Let $X_1 = \overline{Y}$. By Theorem 8 we may suppose X_1 be a region in $\overline{D}$. Let $\alpha_1 = \overline{D} - X_1$. By Corollary 7, $\alpha_1 = \beta(X_1)$, so that α_1 is 0-dimensional. Let $\gamma \in D \cap \alpha_1$ and let V be an open neighborhood in D of γ such that $\overline{V} - V$ is an analytic Jordan curve, non-meeting α_1. Then we may consider $V \cap X_1$ as a normal region both in X and in $(w) - \alpha_1$. Hence, by applying Theorem 13, we see that $D \cap \alpha_1$ is EF-removable in (w) and hence also in D. Let $u_1 \in EF$ on X_1. It follows that u_1 has an extension $u_2 \in EF$ on $X_2 = \overline{D} - \Gamma \cap \alpha_1$. By Corollary 5, $X_2 \in M_1$, and hence, by Theorem 11, $X_2 \in 0_{KD}$. Now let $E = K$ and $F = D$. It follows $u_2 \equiv$ const, i.e. $u_1 \equiv$ const. Thus $X_1 \in 0_{KD}$, and the proof is complete.

Corollary 11. For $E = H, K$ and $F = B, D, BD$, $0_{EF} \subset M_2$ and $0^\circ_{EF} \subset M_2$.

Proof. The first assertion follows from Theorem 17 and the last from Corollary 9.

Definition 20. Let $E = H, K$ and $F = B, D, BD$. We shall say that $\beta(X)$ is *EF-null* at the point $\gamma \in \beta(X)$ if γ has a normal neighborhood Y in X with $\overline{Y} \in 0_{EF}$. Further, an open subset α of $\beta(X)$ will be called *EF-null* if $\beta(X)$ is EF-null at all points of α; we may take in particular $\alpha = \beta(X)$ and $\alpha = \beta_1(X)$ = the planar ideal boundary of X.

We note that the property of $\beta(X)$ of being EF-null at γ is a γ-property of X by Theorem 14. Also the property of an open subset α of $\beta(X)$ of being EF-null is an α-property of X.

Definition 21. For $E = H, K$ and $F = B, D, BD$, M_{EF} is the class of all bordered Riemann surfaces $X \in M_2$ for which $\beta_1(X)$ is EF-null. We refer to the classes M_{EF} as to *mixed classes* of bordered Riemann surfaces. It follows from Theorems 13 and 14 that an $X \in M_2$ belongs to M_{EF} if and only if for any normal region Y in X with a planar closure $\overline{Y}$, Y has Sario's EF-property.

We observe that for surfaces of finite genus, $M_{EF} = 0_{EF}$ by Theorem 14, and that for surfaces without planar ideal boundary, $M_{EF} = M_2 = M$.

Theorem 18. *For $E = H, K$ and $F = B, D, BD$, $0_{EF} \subset M_{EF}$. Further, $M \subset M_{HB} = M_{HBD} = M_{HD} \subset M_{KB} \subset M_{KD} \subset M_2$. All the inclusions are strict.*

Proof. The inclusions $0_{EF} \subset M_{EF}$ follow from Theorems 14 and 17. The equalities $M_{HB} = M_{HBD} = M_{HD}$ follow from Theorem 16. The inclusions $M_{HD} \subset M_{KB} \subset M_{KD}$ follow from Theorem 9, and the inclusion $M_{KD} \subset M_2$ is given by the definition of mixed classes. That the inclusions $M_{HB} \subset M_{KB} \subset$ $\subset M_{KD} \subset M_2$ are strict follows from the fact that the inclusions $0_{HB} \subset 0_{KB} \subset$ $\subset 0_{KD} \subset 0_{SB}$ are strict in the planar ordinary case (cf. AHLFORS and BEURLING [1]). If R_1 is an ordinary surface without planar ideal boundary belonging to $0_{HB} - M_0$, and $\alpha_1 \subset R_1$ is any non-empty compact set of a vanishing harmonic measure, $R_1 - \alpha_1 \in M_{HB} - M$, i.e. the inclusion $M \subset M_{HB}$ is strict. Further, in [14] we prove the existence of an ordinary Riemann surface $R_1 \in M - 0_{AD}$. As in the ordinary case $0_{KD} \subset 0_{AD}$, this R_1 belongs to $M - 0_{KD}$. Hence all the inclusions $0_{EF} \subset M_{EF}$ are strict.

Theorem 19. *Let Y be a distinguished region in X; then if $X \in M_i$, $i = 0, 1, 2$, $\overline{Y} \in M_i$.*

Proof. Let $X_1 = \overline{Y}$. The inclusion map $X_1 \subset X$ is clearly proper, consequently it is extendable to a continuous map $\varphi : X_1^* \to X^*$ by Lemma 2. Let $\alpha \subset \beta(X)$ and $\alpha_1 = \varphi^{-1}(\alpha)$. Let Z be a normal neighborhood in X of α. Then $Z_1 = \varphi^{-1}(Z) \cap X_1 = Z \cap X_1$ is a normal neighborhood in X_1 of α_1. Let μ_α be the modulus of Z for $\alpha_0 = \partial Z$ and α, and let μ_{α_1} be the modulus of Z_1 for $\alpha_1^0 = \alpha_0 \cap X_1 = \partial Z_1$ and α_1. It will be proved that $\mu_\alpha \leqq \mu_{\alpha_1}$.

Let ϱ_1 be any conformal metric on Z_1, admissible for α_1^0 and α_1, and let ϱ be the conformal metric on Z defined by $\varrho = \varrho_1$ on Z_1 and $\varrho = 0$ on $Z - Z_1$. If c is an analytic cycle on Z which separates α from α_0, then by the continuity of φ[16]), the analytic cycle $\varphi^{-1}(c) = c \cap X_1$ separates α_1 from α_1^0. Hence, ϱ is admissible on Z for α_0 and α. It follows that $\mu_\alpha \leqq A(\varrho; Z) = A(\varrho_1; Z)$. As ϱ_1 is arbitrary, we conclude that $\mu_\alpha \leqq \mu_{\alpha_1}$. Hence, by taking $\alpha = \beta(X)$, $\alpha = \{\gamma\}$ for any $\gamma \in \beta(X)$, we see that $X \in M_0$, M_1 implies $X_1 \in M_0, M_1$. The assertion for M_2 follows immediately from the assertion for M_1.

Remark. If $\alpha_1 \subset \varphi^{-1}(\alpha)$, we may say that α_1 is part of α defined by X_1 and the inclusion $\alpha_1 \subset \varphi^{-1}(\alpha)$. Then, combining the inequality $\mu_\alpha \leqq \mu_{\varphi^{-1}(\alpha)}$ with Corollary 3, we can state: *if α is parabolic, so is any part of α.*

Corollary 12. *$M_0 \subset M_1 \subset M_2$ and $M \subset M_2$; all the inclusions are strict.*

---

[16]) From $X^* - c = U_0^* \cup U_1^*$, where U_0^* and U_1^* are open, non-empty and disjoint, $\alpha_0 \subset U_0^*$ and $\alpha \subset U^*$, it follows $X^* - \varphi^{-1}(c) = \varphi^{-1}(U_0^*) \cup \varphi^{-1}(U_1^*)$, where $\varphi^{-1}(U_0^*)$ and $\varphi^{-1}(U_1^*)$ are open, non-empty and disjoint, $\alpha_1^0 \subset \varphi^{-1}(U_0^*)$ and $\alpha_1 \subset \varphi^{-1}(U_1^*)$.

Proof. We know that $M_0 \subset M_1$ (Corollary 3). Further, the inclusion $M_1 \subset M_2$ follows from Theorem 19 and the inclusion $M \subset M_2$ from Definition 17. It is easy to see that the inclusions are all strict.

§ 5. Prolongability

Let $X = R - B$ be a bordered Riemann surface.

Definition 22[17]. If $X' = R' \cup B'$ is a bordered Riemann surface and f a distinguished directly conformal homeomorphism of X into X', we say that the pair (f, X') is a *prolongation of* X. Let (f_1, X_1) and (f_2, X_2) be two prolongations of X; if there exists a distinguished directly conformal homeomorphism h of X_1 into X_2 such that $f_2 = h \circ f_1$, we say that (f_1, X_1) is *smaller* than (f_2, X_2) and write $(f_1, X_1) \leqq (f_2, X_2)$; if in addition h is onto, we say that (f_1, X_1) and (f_2, X_2) are *equal* and write $(f_1, X_1) = (f_2, X_2)$. It is immediate that the relation "$\leqq$" such introduced is an order relation in the set of all prolongations of X; a maximal element of this ordered set will be called a *maximal prolongation* of X.

Theorem 20. (Bochner). *Any bordered Riemann surface has a maximal prolongation.*

Proof. Let $\{(f_i, X_i), i \in I\}$ be an indexed totally ordered set of prolongations of X. We order the index set I by "$i \leqq j$ if $(f_i, X_i) \leqq (f_j, X_j)$". Then for any $i \leqq j$, there exists a distinguished directly conformal homeomorphism h_j^i of X_i into X_j such that $f_j = h_j^i \circ f_i$. Hence we have an inductive system $\{(X_i, h_j^i); i \leqq j, i, j \in I\}$. Let X' be the inductive limit of this inductive system and let $h^i : X_i \to X'$ be the canonical maps[18]. Then h^i are homeomorphisms into, and we can naturally introduce on X' a structure of bordered Riemann surface such that all h^i are distinguished directly conformal homeomorphisms. By using a diagram we easily see that for any i, j, $h^i \circ f_i = h^j \circ f_j$. Consequently, if $f = h^i \circ f_i$, (f, X') is a prolongation of X and $(f, X') \geqq (f_i, X_i)$ for all $i \in I$. Hence the conditions of Zorn's lemma are satisfied and the theorem follows[19].

---

[17]) The notion of prolongation for an ordinary Riemann surface was introduced by Radó [24], and was further discussed by Bochner [3], de Possel [23], Heins [8], Sario [26], Tsuji [36], Tamura [33, 34] and Oikawa [19, 20]; see also author's paper [11] and the Notes [12, 13].

[18]) In the sum space $\sum_{i \in I} X_i$ we introduce the equivalence relation "$a_i \in X_i$ and $a_j \in X_j$ are equivalent if and only if there exists $k \geqq i, j$ such that $h_k^j(a_j) = h_k^i(a_i)$"; then X' is the quotient space of $\sum_{i \in I} X_i$ by this equivalence relation and $h^i : X_i \to X'$ is defined by $h^i(a_i)$ = the equivalence class of a_i.

[19]) This proof due essentially to Bochner [3] may be used also to prove the existence of maximal prolongations for any complex manifold. Further, call K-maximal any K-complete complex manifold X for which there exists no K-complete complex supermanifold X' with the property that any holomorphic function on X has a holomorphic extension over X'; then for any X there exists a K-maximal supermanifold X_1. We observe that if $X \subset C^n$, X is K-maximal if and only if X is a holomorphy domain.

Proofs without using Zorn's lemma of Bochner's theorem were given by Heins [8], Tsuji [36] and Tamura [34].

Definition 23. X is said to be *maximal* if the prolongation (i, X) is maximal, where i is the identity map. In the contrary case, X is called *prolongable*.

For instance, if (f, X') is a maximal prolongation of X, X' is a maximal surface. Note that X is maximal if and only if for any prolongation (f, X') of X, the map f is onto.

Lemma 12. If X has non-empty planar ideal boundary, X is prolongable.

Proof. Let $\gamma \in \beta_1(X)$ and Y be a normal neighborhood in X of γ with a planar closure $\overline{Y}$. Then we may consider $\overline{Y}$ as a region X_1 in $\overline{D}$. Since X_1 is non-compact, $\overline{D} - X_1$ is non-empty. Thus X_1 is prolongable and hence so is X.

Definition 24. We say that the maximal prolongation of X is conformally unique if $(f_1, X_1) = (f_2, X_2)$ for any two maximal prolongations of X. Further, if for any two maximal prolongations (f_1, X_1) and (f_2, X_2) of X, we have a homeomorphism h of X_1 onto X_2 with $f_2 = h \circ f_1$, we say that X has a topologically unique maximal prolongation.

Definition 25. A prolongation (f, X') of X is said to be *non-essential* if $f(X)$ is dense in X' and *essential* in the contrary case. X is said to be *essentially maximal* if all prolongations of X are non-essential, and *essentially prolongable* in the contrary case.

Lemma 13[20]**).** *For $E = H, K$ and $F = B, D, BD$, any $X \in 0_{EF}$ is essentially maximal.*

Proof. We shall prove that X is essentially prolongable, then $X \notin 0_{EF}$. Let (f, X') be an essential prolongation of X; we identify X with $f(X)$, so that $X \subset X'$, $B \not\subset B'$ and $X' - X$ contains an open non-empty subset of X'. Let $\overline{D} = \{z;\, |z| \leq 1\}$ be a parametric disc contrained in $R' - R$ and Γ the relative boundary of $\overline{D}$. If v is any non-constant harmonic function on Γ, the function $u = L_0(v)$ is non-constant and belongs to KBD on $X' - \overline{D}$. But, by using Theorem 7, we can choose X' such that $u \in KBD$ also an X. This proves the lemma.

Corollary 13. Let Y be a distinguished region in X with a planar closure $\overline{Y}$, $E = H, K$ and $F = B, D, BD$. Then if $X \in 0_{EF}$, $\overline{Y} \in M_1$.

Proof. If $\overline{Y} \notin M_1$, it follows from Theorem 8 that $\overline{Y}$ is essentially prolongable and hence so is X.

Thus by Lemma 13, $X \notin 0_{EF}$.

Theorem 21[21]**).** *The following assertions about X are equivalent:*

1) $X \in M_2$.

2) *The maximal prolongation of X is topologically unique.*

3) *X is essentially maximal.*

Proof. 1) $\rightarrow$ 2). Let $X \in M_2$ and let (f_1, X_1) and (f_2, X_2) be two maximal prolongations of X. It follows from Corollary 6 that the closed sets $\alpha_1 = X_1 - f_1(X)$ and $\alpha_2 = X_2 - f_2(X)$ are 0-dimensional and hence also nowhere disconnecting in X_1 and X_2. We consider the compact spaces $X_1^* = X_1 \cup \beta(X_1)$

---

[20]) For $E = H$ and $F = D$, in the ordinary case, this lemma was first obtained by OIKAWA (see TAMURA [34]).

[21]) For X ordinary and of finite genus, this is Theorem 12 in [11].

and $X_2^* = X_2 \cup \beta(X_2)$. The closed sets $\alpha_1 \cup \beta(X_1)$ and $\alpha_2 \cup \beta(X_2)$ are 0-dimensional and nowhere disconnecting in X_1^* and X_2^*, and hence they are the ideal boundaries of $f_1(X)$ and $f_2(X)$ respectively. Then by Theorem 1 the homeomorphism $f_2 \circ f_1^{-1}$ of $f_1(X)$ onto $f_2(X)$ can be extended to a homeomorphism h^* of X_1^* onto X_2^*. No element of $\beta(X_1)$ or $\beta(X_2)$ is of planar type by Lemma 12, so that α_1 is exactly the planar ideal boundary of $f_1(X)$ and α_2 is exactly the planar ideal boundary of $f_2(X)$. Hence necessarily $h^*(\alpha_1) = \alpha_2$ and $h^*(\beta(X_1)) = \beta(X_2)$. Hence $h = h^* | X_1$ is a homeomorphism of X_1 onto X_2, and clearly $f_2 = h \circ f_1$.

2) $\to$ 3). Suppose X has an essential prolongation (f_1, X_1), $X_1 = R_1 \cup B_1$. Then by Theorem 20, X has a maximal prolongation which compounded with (f_1, X_1) gives an essential maximal prolongation of X. Hence we may suppose that (f_1, X_1) is a maximal prolongation of X.

The open set $X_1 - \overline{f_1(X)}$ is non-empty. Let D be the unit circle, $\Gamma = \overline{D} - D$ and h_1 a directly conformal homeomorphism of $\overline{D}$ into $X_1 - \overline{f_1(X)}$, and let h_2 be a directly conformal homeomorphism of $\overline{D}$ into F, where F is a compact ordinary Riemann surface of genus >0. Let $D_1 = h_1(D)$, $D_2 = h_2(D)$, $\Gamma_1 = h_1(\Gamma)$ and $\Gamma_2 = h_2(\Gamma)$. If in the sum space $(X_1 - D_1) + (F - D_2)$ we identify the corresponding points by $h_2 \circ h_1^{-1}$ of Γ_1 and Γ_2, we obtain a bordered Riemann surface X_2 and a maximal prolongation (f_2, X_2) of X with $f_2(x) = f_1(x)$ for any $x \in X$. Clearly $f_2 \circ f_1^{-1}$ cannot be extend to a homeomorphism of X_1 onto X_2. Thus 2) $\to$ 3).

3) $\to$ 1). Suppose $X \notin M_1$. Then there exist a distinguished region Y in X such that the bordered surface $X_1 = \overline{Y}$ is planar and $\beta(X_1)$ contains an hyperbolic element, say γ. Then it easily follows from Theorem 7 that X_1 is essentially prolongable. Hence so is X, and the proof is complete.

Corollary 14. X is essentially maximal if and only if for any prolongation (f, X') of X, the set $X' - f(X)$ is 0-dimensional.

Proof. By Corollary 6 and Theorem 21.

Lemma 14. X is maximal if and only if X is essentially maximal and without planar ideal boundary.

Proof. Necessity is clear by Lemma 12. To prove sufficiency, let X be essentially maximal and without planar ideal boundary, and let (f, X') be any prolongation of X. Then the set $\alpha = X' - f(X)$ is 0-dimensional by Corollary 14. Hence α is contained in $\beta_1(X)$, and consequently α is empty.

From Theorem 21 and Lemma 14 it follows

Theorem 22. *X is maximal if and only if $X \in M$.*

Corollary 15[22]. X is maximal if and only if for any simply connected distinguished region Y in X, $\overline{Y} \in 0_{KD}$.

Proof. By Theorem 11 it is enough to observe that if X is without planar ideal boundary, any distinguished region Y in X with a planar closure $\overline{Y}$ is simply connected. This easily follows by using Theorem 8.

---

[22]) First stated, for ordinary surfaces, by DE POSSEL [23], see also TAMURA [33].

§ 6. Extendability of functions

Let $X = R \cup B$ be a bordered Riemann surface.

Definition 26. Let $X' = R' \cup B'$ be a supersurface of X, i.e. $X' \supset X$ and $B' \supset B$, and let $E = H, K$ and $F = B, D, BD$. Then we say that the set $\alpha = X' - X$ is *EF-removable* in X' if for any region V' in X' and any $u \in EF$ on $V' - \alpha$, u is harmonically extendable over V'.

Lemma 15. Suppose X is planar and $B \neq 0$, so that X is a region in $\bar{D}$. Then, for $E = H, K$ and $F = B, D, BD$, $X \in 0_{EF}$ if and only if the set $\bar{D} - X$ is EF-removable.

Proof. If $X \in 0_{EF}$, $\hat{X} \in 0_{EF}$ by Corollary 10. Hence the set $(w) - \hat{X}$ is EF-removable in (w). Let V be any region in $\bar{D}$.

Let $u \in EF$ on $V \cap X$ and define $\hat{u}$ on $V \cap X \cup s_1(V \cap X)$ by $\hat{u}(x) = u(x)$ when $x \in V \cap X$ and $\hat{u}(x) = u(s_1(x))$ when $x \in s_1(V \cap X)$. Then $\hat{u} \in EF$ on $V \cap X \cup s_1(V \cap X)$. Since the set $(w) - \hat{X}$ is EF-removable in (w), $\hat{u}$ is harmonically extensible over $V \cup s_1(V)$, consequently u is harmonically extensible over V. Thus $\bar{D} - X$ is EF-removable in $\bar{D}$.

Conversely, let $\bar{D} - X$ be EF-removable in $\bar{D}$. Then any function $u \in EF$ on X has a harmonic extension u_1 over $\bar{D}$. Since clearly $u_1 \in EF$ on $\bar{D}$, we have $u_1 \equiv$ const, i.e. $u \equiv$ const. Thus $X \in 0_{EF}$ and the lemma is completely proved.

Lemma 16. For planar bordered Riemann surfaces X with non-empty border, the following assertions are equivalent:

1) $X \in 0_{KD}$.

2) For any two directly conformal homeomorphisms f_1 and f_2 of X into $\bar{D}$, the map $f_2 \circ f_1^{-1} : f_1(X) \to f_2(X)$ is the restriction to $f_1(X)$ of a linear map of $\bar{D}$ onto itself.

3) For any directly conformal homeomorphism f of X into $\bar{D}$, the set $\bar{D} - f(X)$ has a vanishing area.

Proof. Let $X \in 0_{KD}$ and let $f_1, f_2 : X \to \bar{D}$ be directly conformal homeomorphisms. For $i = 1, 2$, define $\hat{f}_i : \hat{X} \to (w)$ by $\hat{f}_i(x) = f_i(x)$ if $x \in X$ and $\hat{f}_i(x) = \bar{f}_i(s(x))$ if $x \in s(X)$. Then $\hat{f}_i$ is a directly conformal homeomorphism of $\hat{X} = X \cup s(X)$ into (w). As the set $(w) - \hat{X}$ is KD-removable in (w) by Lemma 14, we easily see that the map $\hat{f}_2 \circ \hat{f}_1^{-1}$ is extensible to a linear map of (w) onto itself. Hence $f_2 \circ f_1^{-1} = \hat{f}_2 \circ \hat{f}_1^{-1} | f_1(X)$ is linear, so that 1) implies 2).

We now suppose that there is a directly conformal homeomorphism $f_1 : X \to \bar{D}$ such that $\bar{D} - X$ has a non-vanishing area. If we apply Theorem 8 to R and γ_B, we have a directly conformal homeomorphism $f_2 : X \to \bar{D}$ with $\bar{D} - f_2(X)$ of a vanishing area. Hence the map $f_2 \circ f_1^{-1}$ cannot be linear. Thus 2) implies 3).

The implication from 3) to 1) may be proved as the corresponding assertion in the ordinary case (cf. SARIO [26], AHLFORS and BEURLING [1]).

Theorem 23[23]**.** *The maximal prolongation of X is conformally unique if and only if $X \in M_{KD}$.*

Proof. Sufficiency. Let $X \in M_{KD}$ and let (f_1, X_1) and (f_2, X_2) be two maximal prolongations of X. Since $X \in M_2$, the map $f_2 \circ f_1^{-1} : f_1(X) \to f_2(X)$

can be extended to a distinguished homeomorphism h of X_1 onto X_2. For $i = 1, 2$, let $\alpha_i = X_i - f_i(X)$.

As in the proof of Theorem 21, we see that each α_i is 0-dimensional and that $h(\alpha_1) = \alpha_2$. Let $\gamma_1 \in \alpha_1$, and U_1 be a parametric neighborhood in X_1 of γ_1 such that $\partial U = \overline{U}_1 - U_1$ is an analytic Jordan curve. Let $\gamma_2 = h(\gamma_2)$ and $U_2 = h(U_1)$. We may suppose U_2 be a parametric neighborhood in X_2 of γ_2. Then we can define $u \doteq \mathrm{Re}(h)$. As $U_1 - \alpha_1$ has Sario's KD-property, u is harmonically extendable over U_1. Hence h is directly conformal.

Necessity. Let X have a conformally unique maximal prolongation. Then in particular X has a topologically unique maximal prolongation, so that $X \in M_2$ by Theorem 21. Now let Y be any normal region in X with a planar $\overline{Y}$. For $i = 1, 2$, let $g_i : \overline{Y} \to \overline{D}$ be any distinguished directly conformal homeomorphism. By identifying ∂Y and $g_i(\partial Y)$ in the sum space $(X - Y) + \overline{D}_i$ we obtain a bordered Riemann surface X_i'. Let X_i be a maximal Riemann surface containing X_i'. Then we have a maximal prolongation (f_i, X_i) of X, where f_i is defined by $f_i(x) = x$ if $x \in X - Y$ and $f_i(x) = g_i(x)$ if $x \in Y$. By the hypothesis $f_2 \circ f_1^{-1}$ can be extended to a directly conformal homeomorphism of X_1 onto X_2. As $f_2 \circ f_1^{-1} | g_1(\overline{Y}) = g_2 \circ g_1^{-1}$, the map $g_2 \circ g_1^{-1}$ can be extended to a directly conformal homeomorphism of $\overline{D}$ onto itself, so that $g_2 \circ g_1^{-1}$ is linear. Hence by Lemma 16, $\overline{Y} \in 0_{KD}$. Thus $X \in M_{KD}$ and the proof is complete.

Definition 27. Let X and X' be bordered Riemann surfaces. A non-conformal distinguished continuous map $f : X \to X'$ is said to be a *Pompeiu map*[24]) if there exists a closed 0-dimensional set α in X such that the map $f | (X - \alpha)$ is directly conformal.

We shall prove the existence of topological Pompeiu maps.

Theorem 24. *Let X be any bordered Riemann surface. Then there exists a pair made up of a bordered Riemann surface X' and a Pompeiu homeomorphism f of X onto X'.*

Proof. Let U be a parametric neighborhood in R with $\overline{U} - U$ an analytic Jordan curve. We may identify $\overline{U}$ with the unit disc $\overline{D}$ in (w). According to Ahlfors and Beurling [1], there exists in D a compact set α having a positive area and such that $(w) - \alpha \in 0_{SB}$. By Theorem 8, applied to $D - \alpha$ and Γ, there exists directly conformal homeomorphism h of $\overline{D} - \alpha$ into the unit disc $\overline{D}'$ in (w') such that $\alpha' = \overline{D}' - h(\overline{D} - \alpha)$ has a vanishing area. In the sum space $(X - U) + \overline{D}'$ we identify the corresponding points under h of $\overline{U} - U$ and $\Gamma' = \overline{D}' - D'$. Then we obtain a bordered Riemann surface X' such that $X' - \alpha'$ coincides with $X - \alpha$. As α and α' are absolutely disconnected and hence 0-dimensional, the identity map of $X - \alpha$ onto $X' - \alpha'$ can be extended to a homeomorphism f of X onto X' with $f(\alpha) = \alpha'$. As the area of α is positive and the area of α' is zero, f is not conformal.

---

[23]) For surfaces of finite genus, $M_{KD} = 0_{KD}$ and, in the ordinary case, the theorem was proved in Sario [26], Ahlfors and Beurling [1] and Mori [17].

[24]) The existence of such maps was first proved by Pompeiu [22].

Theorem 25. *Let R be a compact ordinary Riemann surface of genus $g \geqq 1$. Then there exists a compact ordinary Riemann surface R' such that R and R' are not conformally equivalent but between which there exists a Pompeiu homeomorphism.*

Proof. Again using the theorem of AHLFORS and BEURLING we get a compact set α in R such that $R - \alpha \in M_1 - 0_{KD}$. Then, according to OIKAWA[25]), there exists a compact prolongation (f, R') of $R - \alpha$ with R' of genus g and such that R and R' are not conformally equivalent. Since $R - \alpha \in M_1$, $\alpha' = R' - f(R - \alpha)$ is 0-dimensional. Hence, by Theorem 1, the conformal map $f: R - \alpha \to R' - \alpha'$ can be extended to a homeomorphism $\bar{f}$ of R onto R'. Since R and R' are not conformally equivalent, $\bar{f}$ is not conformal. Hence $\bar{f}$ is a Pompeiu homeomorphism. The proof is complete.

Let (f, X_1) be a maximal prolongation of X. We identify X with $f(X)$ and so consider X_1 as a supersurface of X, i.e. $X_1 \supset X$ and $B_1 \supset B$. Let $E = H, K$ and $F = B, D, BD$. Let $\alpha = X_1 - X$.

Theorem 26. *The following three assertions are equivalent:*

1) $X \in M_{EF}$.

2) *Any $u \in EF$ on X can be extended to a harmonic function on X_1.*

3) *α is EF-removable in X_1.*

Proof. Let $X \in M_{EF}$. Then it easily follows from Lemma 14 that α is EF-removable in X and hence that property 2) holds.

Let X satisfy 2). To prove that α is EF-removable in X_1 it will be enough to show that for any parametric neighborhood Y_1 in X_1 and any compact subset α_1 of $Y_1 \cap \alpha$, α_1 is EF-removable in $\overline{Y}_1$. Hence, by Lemma 15, we have only to show that $\overline{Y}_1 - \alpha_1 \in 0_{EF}$. Further, by Theorem 13, we have only to show that for any continuous function v on $\overline{Y}_1 - \alpha_1$ the conditions $v \in EF$ on $Y_1 - \alpha_1$, $v = 0$ on c and $\int_c d\bar{v} = 0$ imply $v \equiv 0$. Let L be the operator L_0 or L_1 on $(X_1 - \alpha_1) - c$, where $c = \overline{Y}_1 - Y_1$.

By Theorem 12, we have a distinguished harmonic function u on $X_1 - \alpha_1$ satisfying $u = L(u)$ on $X_1 - \overline{Y}_1$ and $u - v = L(u - v)$ on $Y_1 - \alpha_1$. Clearly $u \in EF$ on $X_1 - \alpha_1$, so that u can be extended to a harmonic function over X_1. Consequently, by the equality $u = L(u)$ on $X_1 - \overline{Y}_1$, we have, on $X_1 - \alpha_1$, $\min_c u \leqq u \leqq \max_c u$. Hence $u \equiv$ const, and therefore $v \equiv 0$ by Theorem 12.

Let X satisfy 3). Then α is in particular 0-dimensional. Hence if Y_1 is any distinguished region in X_1, $Y_1 - \alpha = Y$ is distinguished in X, and moreover any distinguished region Y in X can be so obtained. Let $\overline{Y}_1$ be the closure in X_1 of Y_1 and suppose that $\overline{Y}_1$ is planar. Let $\overline{Y} = \overline{Y}_1 - \alpha$ and $u \in EF$ on $\overline{Y}$. Then u can be extended to a harmonic function u_1 on $\overline{Y}_1$ by 3). Clearly $u_1 \in EF$

[25]) Oikawa's result is as follows: An ordinary Riemann surface F of a finite genus $g \geqq 1$ belongs to 0_{KD} if and only if for any two compact prolongations (f_1, R_1) and (f_2, R_2) of F, with R_1 and R_2 of genus g, R_1 and R_2 are conformally equivalent; see OIKAWA [20].

on $\overline{Y}_1$. Now X_1 is maximal and $\overline{Y}_1$ planar, consequently $\overline{Y}_1$ is simply connected and so $\overline{Y}_1 \in 0_{KD}$ by Corollary 15. Hence, as in any case α is KD-removable, if $u \in KD$, we have $u_1 \equiv$ const, $u \equiv$ const. Therefore $\overline{Y} \in 0_{KD}$. Now let Y be normal. Then $\overline{Y}_1$ is compact, so that for any $u \in EF$ on $\overline{Y}$ we have $u_1 \equiv$ const, $u \equiv$ const, whence $\overline{Y} \in 0_{EF}$. This completes the proof.

From the last part of the proof above we obtain.

Corollary 16. $X \in M_{EF}$ when and only when X has the following property: If Y is any distinguished region in X having a planar closure $\overline{Y}$, then $\overline{Y} \in 0_{KD}$, and if in addition Y is normal, then $\overline{Y} \in 0_{EF}$.

§ 7. Q-quasiconformal maps

Let X and X' be bordered Riemann surfaces, let $1 \leq Q < \infty$ and let f be an orientation preserving distinguished homeomorphism of X into X'. Then f is said to be Q-quasiconformal (in the sense of PFLUGER-AHLFORS) if for any quadrilateral Δ in X, $Q^{-1}\,\mu(\Delta) \leq \mu(\Delta') \leq Q\,\mu(\Delta)$, where Δ' is the quadrilateral $f(\Delta)$ and where $\mu(\Delta)$ and $\mu(\Delta')$ are corresponding moduli of Δ and Δ'.

We now suppose f is onto. Then f can be extended to a homeomorphism f^* of $X \cup \beta(X)$ onto $X' \cup \beta(X')$. Let $\alpha \subset \beta(X)$, Y a normal neighborhood in X of α, μ_α the modulus of Y for $\alpha_0 = \partial Y$ and α, $\mu_{\alpha'}$ the modulus of $Y' = f(Y)$ for $\alpha_0' = \partial Y'$ and $\alpha' = f^*(\alpha)$.

Lemma 17. If f is Q-quasiconformal onto, $Q^{-1}\mu_\alpha \leq \mu_{\alpha'} \leq Q\mu_\alpha$.

Proof. Let $(Y_n)_{n\in N}$ be a relative exhaustion of Y. Let μ_n the modulus of Y_n for α_0 and α_n, and let μ_n' the modulus of $Y_n' = f(Y_n)$ for α_0' and $\alpha_n' = f(\alpha_n)$. Then $Q^{-1}\mu_n \leq \mu_n' \leq Q\mu_n$ (cf. [10]). Hence $Q^{-1}\mu_\alpha \leq \mu_\alpha' \leq Q\mu_\alpha$.

From Lemma 17 it immediately follows

Theorem 27. *Parabolicity of an ideal boundary set α is a Q-quasiconformal invariant*[26]).

In particular we have

Theorem 28. *The modular classes M_i, $i = 0, 1, 2, 3$, are Q-quasiconformal invariants.*

Corollary 17. Maximality and essential maximality are Q-quasiconformal invariant properties[27]).

Definition 28. If f is a (distinguished) Q-quasiconformal homeomorphism of X into X', we say that the pair (f, X') is a *Q-quasiconformal prolongation* of X, or also a *Q-prolongation* of X.

Similarly we have the notions of maximal and essentially maximal Q-prolongation, of Q-maximal and essentially Q-maximal surface. Also, we say

---

[26]) C. ANDREIAN-CAZACU [2] has shown that parabolicity of an ideal boundary set is invariant also under certain quasiconformal maps with a non-bounded dilatation coefficient.

[27]) The Q-quasiconformal invariance of M_0 is due to PFLUGER (see [21]), and that of maximality to OIKAWA [19].

that the maximal Q-prolongation of X is topologically (Q-quasiconformally) unique if for any maximal prolongation (f_1, X_1) and any maximal Q-prolongation (f_2, X_2) of X there exists a homeomorphism (a Q-quasiconformal homeomorphism) h of X_1 onto X_2 such that $f_2 = h \circ f_1$.

From Theorems 21 and 28 we deduce

Theorem 29. *The following three assertions are equivalent:*

1) $X \in M_2$.

2) *The maximal Q-prolongation of X is topologically unique.*

3) *X is essentially Q-maximal.*

Corollary 18. X is Q-maximal if and only if $X \in M$.

Theorem 30. *The maximal Q-prolongation of X is Q-quasiconformally unique if and only if $X \in M_{KD}$.*

Proof. Let $X \in M_{KD}$, (f_1, X_1) a maximal prolongation of X and (f_2, X_2) a maximal Q-prolongation of X. Then clearly the surfaces X_1 and X_2 are maximal and, since $X \in M_2$, the sets $\alpha_1 = X_1 - f_1(X)$ and $\alpha_2 = X_2 - f_2(X)$ are 0-dimensional. Hence the map $f_2 \circ f_1^{-1}: f_1(X) \to f_2(X)$ can be extended to an homeomorphism h of X_1 onto X_2 satisfying $h(\alpha_1) = \alpha_2$. We have to show that h is Q-quasiconformal. Let Δ_1 be any quadrilateral in X_1 and let $\Delta_2 = h(\Delta_1)$. Let μ_1 and μ_2 be corresponding moduli of Δ_1 and Δ_2. Then we have to show that $Q^{-1}\mu_1 \leq \mu_2 \leq Q\mu_1$. By using conformal maps we may assume that Δ_1 and Δ_2 are rectangles contained in parametric neighborhoods of X_1 and X_2 respectively, so that $\mu_1 = \frac{b_1}{a_1}$ and $\mu_2 = \frac{b_2}{a_2}$, where a_i and b_i are the lengths of two consecutive sides of Δ_i, $i = 1, 2$. Let μ_1^0 (resp. μ_2^0) the modulus of the collection of all Jordan arcs joining in $\Delta_1 - \alpha_1$ (resp. $\Delta_2 - \alpha_2$) the sides of length b_1 (resp. b_2) of Δ_1 (resp. Δ_2). Monotony property of modulus imply $\mu_1^0 \leq \frac{b_1}{a_1}$ and $\mu_2^0 \leq \frac{b_2}{a_2}$. We know (Theorem 26) that α is KD-removable. Hence by a theorem of Ahlfors and Beurling [1], we have $\mu_1^0 = \frac{b_1}{a_1}$. Since $f_2 \circ f_1^{-1}$ is Q-quasiconformal we have, as in the proof of Lemma 17, $Q^{-1}\mu_1^0 \leq \mu_2^0 \leq Q\mu_1^0$. Hence $\frac{b_2}{a_2} \geq \mu_2^0 \geq Q^{-1}\mu_1^0 = Q^{-1}\frac{b_1}{a_1}$, and similarly, $\frac{a_2}{b_2} \geq Q^{-1}\frac{a_1}{b_1}$. Thus $Q^{-1}\mu_1 \leq$ $\leq \mu_2 \leq Q\mu_1$.

Conversely, suppose the maximal Q-prolongation of X is Q-quasiconformally unique. Then, in particular, $X \in M_2$ by Theorem 29. Further, suppose to the contrary that $X \notin M_{KD}$. Then, as in the proof of Theorem 24, we have two maximal supersurfaces X_1 and X_2 of X and a homeomorphism h of X_1 onto X_2 such that $h|X$ is the identity map of X and that $\alpha_1 = X_1 - X$ is of positive area while $\alpha_2 = X_2 - X$ is of vanishing area. Thus h cannot be Q-quasiconformal, which is a contradiction. This completes the proof of the theorem.

§ 8. Proof of Theorem 2

The proof of Theorem 2 will be given by a number of lemmas.

Let X be a connected, locally connected and locally compact space. For each compact set $K \subset X$ we denote by Γ_K the union of all relatively compact components of $X - K$, and we define $\hat{K} = K \cup \Gamma_K$. Since $X - \hat{K}$ is the union of all relatively non-compact connected components of $X - K$, $\hat{K}$ is closed.

Lemma A. For every compact set $K \subset X$, $\hat{K}$ is compact and the number of the connected components of $X - \hat{K}$ is finite.

Proof. This is evident if $K = 0$, and thus we may suppose $K \neq 0$. Let U be a relatively compact open neighborhood of K, and let $B = \overline{U} - U$. Since B is compact, the number of connected components of $X - K$ which meet B is finite. Hence in order to prove the lemma it will be enough to show that any connected component of $X - K$ which does not meet B is contained in U. Let S be any connected component of $X - K$. We have $\overline{S} - S \neq 0$, for X is connected and $K \neq 0$, and further $\overline{S} - S \subset K \subset U$ obviously. Hence S meets U. If now S does not meet B, $S \subset U \cup (X - \overline{U})$, i.e. $S = S \cap U \cup S \cap (X - \overline{U})$. Connectedness of S and the fact that $S \cap U \neq 0$ imply $S \cap (X - \overline{U}) = 0$, i.e. $S \subset U$. This proves the lemma.

A region U in X will be called *admissible* if $\overline{U} - U$ is compact. A filter γ on X will be called *admissible* if γ has a basis $(U_\iota)_{\iota \in I}$ made up of admissible regions and satisfying $\bigcap_\iota \overline{U}_\iota = 0$. The last condition is clearly independent of the basis of γ which is used.

Lemma B. Let the filter γ be admissible on X and let $(U_\iota)_{\iota \in I}$ be a basis of γ made up of admissible regions. Then we have the following two properties:

1) Any open set U with compact relative boundary and satisfying $U \cap U_\iota \neq 0$, for all $\iota \in I$, belongs to γ.

2) For every compact $K \subset X$, γ contains exactly one of the connected components $S_{K,\iota}$ of $X - \hat{K}$.

Proof. Let $B = \overline{U} - U$. Since B is compact and $(U_\iota)_{\iota \in I}$ is a filter basis satisfying $\bigcap_\iota \overline{U}_\iota = 0$, there exists $\iota_0 \in I$ with $B \cap \overline{U}_{\iota_0} = 0$. It follows that $\overline{U}_{\iota_0} \subset U \cup (X - U)$, i.e. $U_{\iota_0} = U \cap U_{\iota_0} \cup (X - \overline{U}) \cap U_{\iota_0}$. As $U \cap U_{\iota_0} \neq 0$, connectedness of U_{ι_0} implies $(X - \overline{U}) \cap U_{\iota_0} = 0$, $U_{\iota_0} \subset U$, $U \in \gamma$. This proves 1).

Further, as before, there is $\iota_1 \in I$ with $\hat{K} \cap \overline{U}_{\iota_1} = 0$, whence $U_{\iota_1} \subset X - \hat{K}$. This means that γ contains $X - \hat{K}$ and hence, as γ has connected basis, property 2) follows.

Let β be the set of all admissible filters γ on X, and let X^* be the sum set of X and β. With each admissible region U in X, we associate the set β_U of all filters γ containing U of β and the subset $U^* = U \cup \beta_U$ of X^*. We call U^* the admissible set of X^* associated with U. Clearly $U^* \cap X = U$, so that the correspondence $U \to U^*$ is one-to-one.

Lemma C. 3) If U_1 and U_2 are admissible regions in X with $U_1 \cap U_2 \neq 0$, any connected component V of $U_1 \cap U_2$ is admissible and $V^* \subset U_1^* \cap U^*$; if $U_1 \cap U_2 = 0$, $U_1^* \cap U_2^* = 0$.

4) If U is a relatively compact region in X, U is admissible and $U^* = U$.

The proofs of 2) and 3) are clear.

From 3) it follows that the collection of all admissible sets U^* of X^* is a topology basis on X, and we endow X^* with this topology. From 4) it follows that X is an open subset of X^*. As for each U^*, $U^* - \beta = U$ is a region, β is nowhere disconnecting in X. Since U is dense in U^*, each U^* is connected, so that X^* is locally connected and connected.

Lemma D. X^* is a connected and locally connected Hausdorff space, and β is nowhere disconnecting and 0-dimensional.

Proof. We already know that X^* is locally connected and connected and that β is nowhere disconnecting in X^*. From Lemma B and the fact that X is a Hausdorff space immediately follows that X^* is a Hausdorff space. Also, Lemma B implies that $\overline{U}^* \cap \beta = U^* \cap \beta$ for any admissible U, where $\overline{U}^*$ is the closure in X^* of U^*. This means that the sets $U^* \cap \beta$ are both open and closed in β, so that β is 0-dimensional.

Lemma E. X^* is compact.

Proof. We know that X is a Hausdorff space. By BOURBAKI [4], we have only to show that any ultrafilter u on X is convergent. If u contains some compact $K \subset X$, then the trace $u|K$ of u to K is an ultrafilter on K and hence converges to some point $x \in K$, consequently u converges to x. Hence we may suppose that u does not contain any compact of X. By Lemma A, for each compact $K \subset X$, we have a decomposition

$$X = \hat{K} \cup S_{K,1} \cup \cdots \cup S_{K,n_K},$$

where $\hat{K}$ is compact and $S_{K,i}$ are the connected components (all relatively non-compacts) of $X - \hat{K}$. From 3) it follows that the sets $\hat{K}$, $S^*_{K,1}, \ldots, S^*_{K,n_K}$ are mutually disjoint and that

$$X^* = \hat{K} \cup S^*_{K,1} \cup \cdots \cup S^*_{K,n_K}.$$

As u is an ultrafilter and $\hat{K} \notin u$, u contains exactly one of the sets $S^*_{K,i}$; we denote it by $S^*_{K,u}$ and we consider $S_{K,u} = X \cap S^*_{K,u}$. If K and K' are any two compact sets in X, $S^*_{K,u} \cap S^*_{K',u} \neq 0$ because $S^*_{K,u}$ and $S^*_{K',u}$ belong to u.

Hence it follows $S_{K,u} \cap S_{K',u} \neq 0$ from 3). If in addition $K \subset K'$, then $S_{K',u} \subset S_{K,u}$; for the set $S_{K',u}$, being connected and contained in $X - K$, is contained in exactly one of the connected components of $X - K'$ which certainly is $S_{K,u}$ because $S_{K,u} \cap S_{K',u} \neq 0$. In particular, for any two compact sets K_1 and K_2 in X,

$$S_{K_1,u} \cap S_{K_2,u} \supset S_{K_1 \cup K_2,u},$$

that is $(S_{K,u})_K$ is a basis of a filter γ on X. Clearly $\gamma \in \beta$, so that γ is a point of X^*. Let U be any admissible region in X such that $\gamma \in U^*$. Then U belongs

to γ and so $S_{K,u} \subset U$ for some K. Hence $S^*_{K,u} \subset U^*$, so that $U^* \in u$. Thus u converges to γ. This completes the proof of Lemma E and of Freudenthal's theorem.

If X has countable topology and $(U_n)_{n \in N}$ is a countable basis of X, clearly $(U^*_n)_{n \in N}$ is a countable basis of X^*, and so X^* has countable topology too.

References

[1] Ahlfors, L., and A. Beurling: Conformal invariants and function-theoretic null sets. Acta Math. **83**, 101—129 (1950).

[2] Andreian Cazacu, C.: Sur les transformations pseudo-analytiques. Rev. Math. p. appl., II, 383—397 (1957).

[3] Bochner, S.: Fortsetzung Riemannscher Flächen. Math. Ann. **98**, 406—421 (1928).

[4] Bourbaki, N.: Topologie générale. Chap. I, II. Paris: Hermann et Cie. 1951.

[5] Constantinescu, C., and A. Cornea: Über den idealen Rand und einige seiner Anwendungen bei der Klassifikation der Riemannschen Flächen. Nagoya Math. J. **13**, 169—233 (1958).

[6] Freudenthal, H.: Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. Math. Z. **33**, 692—713 (1931).

[7] Grauert, H., and R. Remmert: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245—318 (1958).

[8] Heins, M.: On the continuation of a Riemann surface. Ann. Math. **43**, 280—297 (1942).

[9] Hurewicz, W., and H. Wallman: Dimension Theory. Princeton University Press 1948.

[10] Jurchescu, M.: L'invariance K-quasi conforme de la parabolicité d'un élément frontière. C. R. Acad. Sci. (Paris) **246**, 2997—2999 (1958).

[11] Jurchescu, M.: Modulus of a boundary component. Pacific J. Math. 8, 791—809 (1958).

[12] Jurchescu, M.: Sur le problème du prolongement des surfaces de Riemann. C. R. Acad. Sci. (Paris) **249**, 988—990 (1959).

[13] Jurchescu, M.: Sur l'unicité du prolongement des surfaces de Riemann et sur les fonctions de Pompeiu univalentes. C. R. Acad. Sci. (Paris) **249**, 1026—1027 (1959).

[14] Jurchescu, M.: A maximal Riemann surface. To appear.

[15] Kuroda, T.: A property of some open Riemann surfaces and its applications. Nagoya Math. J. **6**, 77—84 (1953).

[16] Kuroda, T.: On analytic functions on some Riemann surfaces. Nagoya Math. J. **10**, 27—50 (1956).

[17] Mori, A.: A remark on the prolongation of Riemann surfaces of finite genus. J. Math. Soc. Japan **4**, 27—30 (1952).

[18] Nevanlinna, R.: Uniformisierung. Berlin: Springer 1953.

[19] Oikawa, K.: Some properties of quasi conformal mapping. Sugaku **9**, 13—14 (1957/58, Japanesse).

[20] Oikawa, K.: On the uniqueness of the prolongation of an open Riemann surface of finite genus. To appear.

[21] Pfluger, A.: Theorie der Riemannschen Flächen. Berlin: Springer 1957.

[22] Pompeiu, D.: Sur la continuité des fonctions de variable complexe. Ann. Fac. Sci. Toulouse **7**, 265—315 (1905).

[23] de Possel, R.: Sur les ensembles du type maximum, et le prolongement des surfaces de Riemann. C. R. Acad. Sci. (Paris) **194**, 585—587 (1932).

[24] Rado, T.: Über eine nichtfortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Math. Z. **21**, 1—6 (1924).

[25] Royden, H. L.: Harmonic functions on an open Riemann surface. Trans. Am. Math. Soc. **73**, 40—94 (1952).

[26] SARIO, L.: Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I, 1—79 (1948).
[27] SARIO, L.: A linear operator method on arbitrary Riemann surfaces. Trans. Am. Math. Soc. 72, 281—295 (1952).
[28] SARIO, L.: An extremal method on arbitrary Riemann surfaces. Trans. Am. Math. Soc. 73, 459—470 (1952).
[29] SARIO, L.: Capacity of the boundary and of a boundary component. Ann. Math. 59, 135—144 (1954).
[30] SARIO, L.: Positive harmonic functions. Lectures on functions of a complex variable. The University of Michigan Press. Ann Arbor 1955.
[31] STEIN, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. 132, 63—93 (1956).
[32] STOILOW, S.: Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Paris: Gauthier-Villars (2nd ed) 1956.
[33] TAMURA, J.: A prolongable Riemann surface. Sci. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo 6, 123—127 (1956).
[34] TAMURA, J.: On the maximal Riemann surface. Sci. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo 7, 19—22 (1957).
[35] TÔKY, Y.: On the examples in the classification of open Riemann surfaces. Osaka Math. J. 5, 267—280 (1953).
[36] TSUJI, M.: Maximal continuation of a Riemann surface. Kôdai Math. Sem. Rep. 2, 55—56 (1952).

(Received October 8, 1960)

Ramanathan, K. G.
Math. Annalen 143, 293—332 (1961)

Quadratic forms over involutorial division algebras II

By

K. G. Ramanathan in Bombay

§ 1. Introduction

Let $\mathcal{D}$ be a division algebra of finite rank over the field Γ of rational numbers and let $\mathcal{D}$ have an involution $\alpha \to \bar{\alpha}$ over Γ. Let $\mathcal{A} = \mathfrak{M}_n(\mathcal{D})$ be the algebra of n-rowed matrices over $\mathcal{D}$ and let the involution in $\mathcal{D}$ be extended to $\mathcal{A}$ in the obvious manner; namely for $(s_{kl}) = S \in \mathcal{A}$ define $\bar{S} = (\bar{s}_{lk})$. The expression $\bar{x} S x = \sum_{i,j} \bar{x}_i s_{ij} x_j$ where $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathcal{D}$ is called the *quadratic form* of S if $S = \varepsilon \bar{S}$, $\varepsilon = \pm 1$. In a recent paper [10] we studied the equivalence of and representations by quadratic forms over $\mathcal{D}$. In this paper we study the units and theta series associated with a quadratic form with a view to developing, in the next paper of this series, the analytic theory of quadratic forms over $\mathcal{D}$. Some of the theorems proved below were already announced in our note [9].

Let o be an order in $\mathcal{D}$. A matrix $U \in \mathcal{A}$ with elements in o is called a *unit* of $S = \varepsilon \bar{S}$ if U^{-1} has elements in o and $\bar{U} S U = S$. The units of S form a group $\Gamma(S)$. We prove in § 7 that $\Gamma(S)$ is finitely generated generalising the results proved earlier [13], [8]. If $\mathcal{D}$ is, however, a division algebra over the p-adic field instead of Γ and $\Gamma(S)$ is defined in relation to the maximal order in $\mathcal{D}$, it is then shown in § 9 that $\Gamma(S)$ is topologically finitely generated in the sense that every unit in $\Gamma(S)$ can be written as a convergent product — in the topology in $\mathcal{D}$ — using a finite number of elements of $\Gamma(S)$. In certain special cases it turns out that a proper subgroup of $\Gamma(S)$ of finite index consists of just powers β^λ of an element β, λ running through all p-adic integers.

In order to study the theta series associated with S it is necessary to obtain a generalization of the ordinary complex variable. This is done by studying the representation space § 6 of $J_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -\varepsilon E & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \pm 1$, E the unit matrix of order n over $\mathcal{D}$. This representation space has a parametrization $Z = X + Y Q \eta$ where $\varepsilon X = \bar{X}$ and $Y = Y^* > 0$ over $\bar{\mathcal{D}}$ the tensor product of $\mathcal{D}$ and the real number field. This gives the required generalization of the upper half plane of Siegel. If $\mathfrak{H}$ is the representation space § 6 of the orthogonal group $\Omega(S)$ of S, one constructs for $\Gamma(S)$, which is a discrete subgroup of $\Omega(S)$, a fundamental region $\mathcal{F}$ with nice properties. § 8 contains the proof of the theorem that $\int_{\mathcal{F}} \mathfrak{D}\, dv$, where $\mathfrak{D}$ is the theta series and dv the invariant volume element in $\mathfrak{H}$,

converges and even uniformly over compact sets. This theorem is of importance for the analytic theory of quadratic forms and for a study of the Zeta functions associated with such forms. A consequence of this is that $\int_{\mathscr{F}} dv$ is finite. In § 10 we consider the representation space of J_s in greater detail. A fundamental region for the general modular group, that is the unit group of J_s, is constructed using ideas familiar in Siegel's symplectic geometry [15]. The special case when this representation space is a complex space is also discussed. It is shown § 10 that this is a product of Cartan's symmetric spaces of the first three types. We give examples of discontinuous groups in these spaces. It is interesting to study the commensurability of these groups with the modular group defined above and the connection with Riemann matrices. We only show here that in certain cases the fundamental regions for these groups can be compact. The last section is devoted to the study of bilinear forms. Since the results described above depend on the reduction theory of positive forms over semi-simple algebras, we devote § 3—5 to a brief account of this using a method related to HUMBERT's [5]. SIEGEL uses [14] a generalization of Minkowski's method.

§ 2. Notation

If $\mathscr{R}$ is a ring with a unit, $\mathscr{R}_n$ will stand for the ring $\mathfrak{M}_n(\mathscr{R})$ of n-rowed matrices over $\mathscr{R}$. The direct sum of two rings $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}'$ is denoted by $\mathscr{R} \oplus \mathscr{R}'$. If $f > 0$ is an integer $f\mathscr{R}$ denotes the direct sum of $\mathscr{R}$ with itself f times. Γ and $\bar{\Gamma}$ will be the rational and real number fields respectively. For an algebra $\mathscr{R}$ over Γ, $\bar{\mathscr{R}}$ will denote the tensor product $\mathscr{R} \otimes \bar{\Gamma}$. σ and N_0 will denote the regular trace and norm of $\mathscr{R}$ over Γ and also of $\bar{\mathscr{R}}$ over $\bar{\Gamma}$. E will stand for the unit matrix in $\mathscr{R}_n$. If $\sim$ and $*$ are two involutions in $\mathscr{R}_n$ then we write $S\{A\} = \tilde{A}SA$ and $S[A] = A^*SA$ for S and A in $\mathscr{R}_n$. The diagonal elements of a matrix are denoted with single subscripts. For a matrix $X \in \bar{\mathscr{R}}_n$, $\operatorname{abs} X = \{\sigma(X^*X)\}^{1/2}$. If $S = S^*$ in $\bar{\mathscr{R}}$, $S > 0$ will denote that S is a positive matrix. $S > T$ means that $S - T > 0$. $\bar{P}$ and $\bar{\Omega}$ will stand for the complex number field and the division algebra of real quaternions.

§ 3. Positive forms

Let $\mathscr{D}$ be a division algebra of finite rank g over Γ the field of rational numbers and let $\mathscr{K}$ be its centre. $\mathscr{K}$ is an algebraic number field. Let

$$(\mathscr{K} : \Gamma) = h\,, \quad (\mathscr{D} : \mathscr{K}) = f^2$$

so that $g = hf^2$. Let $\delta_1, \ldots, \delta_g$ be a basis of $\mathscr{D}/\Gamma$ so that every element δ of $\mathscr{D}$ can be written uniquely in the form

$$\delta = \sum_i a_i \delta_i\,, \quad a_i \in \Gamma.$$

The a_i's are called the *coordinates* of δ. By means of the regular representation of $\mathscr{D}/\Gamma$ with regard to the basis $\delta_1, \ldots, \delta_g$, to every element δ of $\mathscr{D}$ corresponds a g-rowed rational matrix $\hat{\delta}$

Let $\bar{\mathscr{D}} = \mathscr{D} \otimes \Gamma$ be the Kronecker product of $\mathscr{D}$ and Γ the field of real numbers. $\bar{\mathscr{D}}$ is a direct sum of simple algebras over Γ. Let $r_1 + r_2 + r_3$ denote the number of infinite prime spots of $\mathscr{K}$, r_1 denoting the number of real places at which $\mathscr{D}$ is unramified, r_3 those at which $\mathscr{D}$ is ramified and r_2 the number of complex infinite prime spots of $\mathscr{K}$. Clearly $h = r_1 + 2r_2 + r_3$. We have therefore the decomposition

$$\bar{\mathscr{D}} \cong \sum_{i=1}^{r_1} \mathfrak{M}_f^{(i)}(\Gamma) \oplus \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} \mathfrak{M}_f^{(i)}(\bar{P}) \oplus \sum_{i=r_1+r_2+1}^{r_1+r_2+r_3} \mathfrak{M}_{f/2}^{(i)}(\bar{\Omega}) . \tag{1}$$

Let $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_g$ be a basis of $\bar{\mathscr{D}}/\Gamma$ formed by means of the above decomposition. We then have

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_g \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_g \end{pmatrix} \tag{2}$$

for a real g-rowed matrix γ. The regular representation of $\bar{\mathscr{D}}$ by the basis $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_g$ gives for any $\delta \in \bar{\mathscr{D}}$ the matrix

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{r_1} f\, M_f^{(i)}(\Gamma) \oplus \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} f\, M_f^{(i)}(\bar{P}) \oplus \sum_{i=r_1+r_2+1}^{r_1+r_2+r_3} \frac{f}{2} M_{f/2}^{(i)}(\bar{\Omega}) . \tag{3}$$

Because of (2) we find

$$\delta = \gamma^{-1} \delta_0 \gamma . \tag{4}$$

In the matrix algebra $\bar{\mathscr{D}}$ of the matrices in the regular representation by means of the normal basis $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_g$ there is an involution $\delta_0 \to \delta_0'$. Since δ_0' belongs to $\bar{\mathscr{D}}$ there exists an element $\delta^* \in \bar{\mathscr{D}}$ so that $(\delta^*)_0 = \delta_0'$. It follows that

$$\delta^* = M\, \delta'\, M^{-1}, \quad M = \gamma\gamma' > 0 . \tag{5}$$

(5) thus defines an involution in $\bar{\mathscr{D}}$.

An element $\delta \in \bar{\mathscr{D}}$ is *symmetric* if $\delta = \delta^*$, *skew* if $\delta = -\delta^*$. It is said to be *positive*, denoted $\delta > 0$ if $\delta = \delta^*$ and all the characteristic roots of δ are positive real numbers. It is clear that if on $\bar{\mathscr{D}}$ we impose the topology of g dimensional Euclidean space, the positive elements constitute an open subset of $(hf + r_1 - r_3)f/2$ dimensions.

Clearly if $\delta \in \bar{\mathscr{D}}$ and $\delta > 0$ then $\delta = c^* c$ for $c \in \bar{\mathscr{D}}$.

Let $\mathscr{A}$ be a simple algebra over Γ so that $\mathscr{A} = \mathfrak{M}_n(\mathscr{D})$. The Kronecker product $\bar{\mathscr{A}} = \mathscr{A} \otimes \Gamma$ will then be given by (1) with f replaced by nf. The involution in $\bar{\mathscr{D}}$ can be extended to $\bar{\mathscr{A}}$ by prescribing for any $S = (s_{kl})$, $s_{kl} \in \bar{\mathscr{D}}$ the matrix $S^* = (s_{lk}^*)$. $S \to S^*$ is then an involution of $\bar{\mathscr{A}}$. As before we define S symmetric or skew if $S = \pm S^*$ respectively and *positive* if S is symmetric and all its characteristic roots are positive real numbers. If M again denotes an n-rowed diagonal matrix with M of (5) in the diagonals then

$$S^* = M\, S'\, M^{-1} . \tag{6}$$

Also if $S = S^*$ then the matrix $\gamma^{-1} S \gamma$, where γ is again a diagonal n-rowed matrix with the γ of (2) in the diagonals, is symmetric in the ordinary sense as a real matrix.

The positive elements $S > 0$ of $\bar{\mathscr{A}}$ constitute an $(hnf + r_1 - r_3)nf/2$ dimensional open subset of $\bar{\mathscr{A}}$. Every $S > 0$ can be written in the form $S = C^* C$ for $C \in \bar{\mathscr{A}}$.

Let $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ be an n-rowed column vector with elements in $\bar{\mathfrak{D}}$. The expression $S[x] = \sum_{i,j} x_i^* s_{ij} x_j$ for $S = S^*$ is called the *quadratic form* of S. Clearly σ $(S[x])$ is a quadratic form, in the usual sense, in the gn variables which are the coordinates of the n elements $x_1, \ldots, x_n$. Also σ $(S[x])$ is a positive quadratic form in these gn variables is equivalent to saying that $S > 0$ as an element of $\bar{\mathscr{A}}$. If $\varrho > 0$ is a real number and $S > 0$ in $\bar{\mathscr{A}}$ then the ellipsoid

(7) $$\sigma(S[x]) < \varrho$$

has the volume

(8) $$c_{ng}\, \varrho^{gn/2} (N_0 S)^{-1/2}$$

where

$$c_{ng} = \frac{\pi^{gn/2} |d|^{-n/2}}{\Gamma(1 + gn/2)}$$

d being the discriminant of the basis $\delta_1, \ldots, \delta_g$.

Let $H > 0$ be an element of $\bar{\mathscr{A}}$. One has then the Jacobi transformation $H = D[V]$ where

(9) $$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & & v_{kl} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Also

$$h_k = d_k + \sum_{l \leq k-1} v_{lk}^* \, d_l \, v_{lk} \, .$$

We thus easily obtain

(10) $$\begin{cases} \sigma(h_k) \geq \sigma(d_k) \\ N_0(h_k) \geq N_0(d_k) \\ \sigma(h_k) + \sigma(h_l) \geq 2 \operatorname{abs} h_{kl} \, . \end{cases}$$

§ 4. Half reduced matrices

Let o be an order in $\mathfrak{D}$ and $\delta_1, \ldots, \delta_g$ a minimal base of o over $\mathfrak{Z}$, the ring of rational integers. Put $O = \mathfrak{M}_n(o)$. Then O is an order in $\mathscr{A}$. An element $U \in O$ is a unit of O if U and U^{-1} are in O. The units clearly form a group $\Gamma(O) = \Gamma(o_n)$.

Let $\mathscr{P}$ denote the space of positive elements of $\bar{\mathscr{A}}$. If $S \in \mathscr{P}$ and $U \in \Gamma(o_n)$ then $U^* S U = S[U]$ is again in $\mathscr{P}$. Thus the mapping $S \to S[U]$ gives a representation of $\Gamma(o_n)$ in the space $\mathscr{P}$.

Call a matrix B in $\mathscr{A}$ *integral* if it is in O. We call o *integers* of $\mathfrak{D}$. Consider the set of non-singular integral matrices of $\mathscr{A}$. Let α run over the first columns of these matrices. Since every integral column $\alpha \neq 0$ can be completed to a non singular integral matrix this means α runs through all integral columns $\neq 0$. There is then $\alpha = \alpha_1$ for which $\sigma(S[\alpha])$ is minimum. Let now α run through

all second columns of non singular integral matrices with first column α_1. $\sigma(S[\alpha])$ again attains a minimum for say $\alpha = \alpha_2$. Clearly

$$\sigma(S[\alpha_1]) \leqq \sigma(S[\alpha_2]) .$$

Proceeding in this way successively we obtain an integral matrix $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ so that if $S[A] = H = (h_{kl})$ then

$$0 < \sigma(h_1) \leqq \sigma(h_2) \leqq \cdots \leqq \sigma(h_n) . \tag{11}$$

We call A an *auxiliary matrix*.

Let B be a non singular integral matrix in $\mathscr{A}$ whose first $k-1$ columns coincide with those of A. Then

$$B = A \begin{pmatrix} E_{k-1} & F \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

F and G being matrices with, in general, elements only in $\mathfrak{D}$. Let w denote the first column of the matrix $\binom{F}{G}$ and v_k the k-th column of B. Then $v_k = A w$. Furthermore $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$, $(w_k, w_{k+1}, \ldots, w_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. By the construction of A we get

$$\sigma(h_k) \leqq \sigma(S[v_k]) = \sigma(H[w]) .$$

Thus the matrix H has the following properties. If w is a column with elements in $\mathfrak{D}$ such that

$$\begin{cases} (w_k, w_{k+1}, \ldots, w_n) \neq (0, \ldots, 0) \\ A w \text{ integral} \end{cases} \tag{12}$$

then

$$\sigma(H[w]) \geqq \sigma(h_k), \; k = 1, \ldots, n \tag{13}$$

we call H *half reduced*.

We can now prove the

Theorem 1. *The norm $N_0 A$ of the auxiliary matrix is bounded by a constant depending only on n and $\mathfrak{D}$.*

Proof. Put $T = A^{*-1} A^{-1}$. Then $T > 0$. The ellipsoid $\sigma(T[x]) < \varrho$ has by (8) the volume $c_{ng}\, \varrho^{gn/2} N_0 A$ (note that A^* and A have the same norm). Put now

$$\varrho = 4g (c_{ng} N_0 A)^{-2/gn}$$

Then by Minkowski's theorem there exists $x \neq 0$ in o with $\sigma(T[x]) < \varrho$. Put $A^{-1} x = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Then $\sigma(y^* y) < \varrho$ and so $\sigma(y_k^* y_k) < \varrho$ for $k = 1, \ldots, n$. Also this y has the property that $A y$ is integral. Let k be the largest integer (certainly $k \geqq 1$) such that $y_k \neq 0$ but $y_{k+1} = \cdots = y_n = 0$. y then satisfies (12) and we have

$$\sigma(H[y]) \geqq \sigma(h_k) . \tag{14}$$

But $H[y] = \sum_{i,j=1}^{k} y_i^* h_{ij} y_j$. Since $\sigma(H[y]) \leqq gn\,\mathrm{abs}(H[y])$, we get, from (14),

$$0 < \sigma(h_k) \leqq gn\,\mathrm{abs}(H[y])$$
$$\leqq gn \cdot \varrho \sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{abs}\, h_{ij}\,.$$

Using the last inequality in (10) we get

$$0 < \sigma(h_k) \leqq n g^2 \varrho \sigma(h_k)\,.$$

Restoring the value of ϱ we obtain the contention.

Call two integral matrices A_1 and A_2 in O *associated* if there exists a $U \in \Gamma(o_n)$ such that $A_1 = U A_2$. This is an equivalence relation and the matrices in O which are non-singular can be put into classes of associate matrices. The number of classes of such matrices with given norm is finite. Because of theorem 1, the auxiliary matrices fall into a finite number of classes represented say by $A_1, \ldots, A_\mu$ determined *uniquely* by n and $\mathfrak{D}$.

Consider the group G_0 of units $u \in o$ with $u^* u = 1$. This is easily seen to be a finite group. In the topological space $\overline{\mathfrak{D}}$ introduce the inner product

$$d(x, y) = \sigma(x^* y)\,. \tag{15}$$

Then $d(x, x) > 0$ if $x \neq 0$. Choose any point $x \in \overline{\mathfrak{D}}$, $x \neq 0$. For any variable point $y \in \overline{\mathfrak{D}}$ choose the image yu of y by $u \in G_0$ such that

$$\sigma(x^* y u) \geqq \sigma(x^* y u_0)$$

for all $u_0 \in G_0$. The totality of these points yu is a set $\overline{\mathfrak{D}}_x$ which is a fundamental domain for G_0 in $\overline{\mathfrak{D}}$. For any $z \in \overline{\mathfrak{D}}$ there exists $u \in G_0$ such that $zu \in \overline{\mathfrak{D}}_x$.

In the reduction which we have obtained for S in $\mathfrak{P}$ we could, at each stage, choose $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ such that

$$\sigma(h_{1k}) = \sigma(\alpha_1^* S \alpha_k) \in \overline{\mathfrak{D}}_k,\ k = 2, \ldots, n \tag{16}$$

by multiplying $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ by a suitable $u \in G_0$. We have thus the

Theorem 2. *There exist finitely many integral matrices $A_1, \ldots, A_\mu$ determined uniquely by the integer n and the algebra $\mathfrak{D}$ such that for any $S > 0$ there exists a $U \in \Gamma(o_n)$ and at least one A_i such that $H = S[U A_i]$ satisfies* (11), (12), (13) *and* (16).

§ 5. The Siegel domain

Denote by $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_0^{(n)}$ the point set in $\mathfrak{P}$ consisting of matrices S satisfying

$$\sigma(S[x]) \geqq \sigma(s_k),\ k = 1, \ldots, n \tag{17}$$

for every *integral vector* x with $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Clearly every half reduced matrix lies in $\mathfrak{R}_0$.

Let $S \in \mathfrak{R}_0$ and $S = (s_{kl})$ so that

$$0 < \sigma(s_1) \leqq \cdots \leqq \sigma(s_n)\,.$$

Put $t_k = \sigma(s_k)$. Let $S = D[V]$ be the Jacobi transform of S. Put, after Minkowski, $S_1 = D_1[V]$,

$$S_1 = \begin{pmatrix} t_1^{-1}d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n^{-1}d_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & v_{kl} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Let $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ be an integral vector. Let $x_k \neq 0$ and $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$. Then

$$\sigma(S_1[x]) = \sigma(t_1^{-1}d_1[x_1 + v_{12}x_2 + \cdots + v_{1k}x_k]) + \cdots + \sigma(t_k^{-1}d_k[x_k]) .$$

Therefore

$$\sigma(S_1[x]) \geqq t_k^{-1}\sigma(S[x]) \geqq 1 .$$

This proves that the convex ellipsoid $\sigma(S_1[x]) < 1$ has no lattice points $\neq 0$ in its interior. By Minkowski's well known theorem

$$c_{n\,g}(N_0 S_1)^{-1/2} < 2^{gn}. \tag{19}$$

Let now $c_1, \ldots$ denote constants depending only on n and $\mathscr{D}$. From (19), using the value of $N_0 S_1$, we get

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(\sigma(s_k))^g}{N_0 d_k} \leqq c_1 ;$$

on the other hand, from (10), we have

$$c_2 \leqq \frac{(\sigma(s_k))^g}{N_0 d_k}, \; k = 1, \ldots, n$$

which gives

$$\sigma(s_k)^g \leqq c_3 N_0 d_k \leqq c_4 N_0 s_k \leqq c_5 \sigma(d_k)^g. \tag{20}$$

(20) proves that the characteristic roots of s_k and also of d_k are of the same order of magnitude. The Jacobi transformation gives

$$s_{kl} = v_{1k}^* d_1 v_{1l} + \cdots + v_{k-1\,k}^* d_{k-1} v_{k-1\,k} + d_k v_{kl}, \; k \leqq l .$$

If we assume as induction hypothesis that $\operatorname{abs} v_{ab} \leqq c_6$ for $a \leqq k-1$, $b \leqq l$ we get from above

$$\operatorname{abs} v_{kl} \leqq c_7 . \tag{21}$$

Let $t > 0$ be a real number and denote by $\mathscr{R}_t$ the subspace of $\mathscr{P}$ with $S = (s_{kl})$ satisfying

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{\sigma(s_k)}{\sigma(s_{k+1})} < t, \; k = 1, \ldots, n-1 \\ \dfrac{1}{t} N_0 s_k \leqq \sigma(s_k)^g \leqq t N_0 s_k, \; k = 1, \ldots, n \\ \sigma(s_1) \ldots \sigma(s_n) \leqq t (N_0 S)^{1/g}. \end{cases} \tag{22}$$

One obtains then easily that S satisfies the previous inequalities and (21) with constants depending on t, n and $\mathscr{D}$.

We call the domain $\mathscr{R}_t$ defined by (22) the *Siegel domain*. It contains $\mathscr{R}_0$ and

$$\operatorname*{Lt}_{t \to \infty} \mathscr{R}_t = \mathscr{P} .$$

Let for $t' > 0$, $\mathscr{F}_{t'}$ denote the set of real gn-rowed positive symmetric matrices $H = (h_{kl})$ with

$$(23) \qquad \begin{gathered} 0 < \frac{h_k}{h_{k+1}} < t', \; k = 1, \ldots, gn-1 \\ \pm h_{kl} \leqq t' h_k, \; k \leqq l \\ h_1 \ldots h_{gn} \leqq t' |H| . \end{gathered}$$

What we have seen above shows that for $S \in \mathscr{R}_t$ there exists t' depending only on t, n and $\mathscr{D}$ such that the real symmetric matrix $\gamma^{-1} S \gamma$ lies in $\mathscr{F}_{t'}$.

Let $\mathfrak{N}$ be the norm surface in $\mathscr{P}$ with $N_0 S = 1$. We have then from above

Theorem 3. *Let $S = (s_{kl})$ be in $\mathscr{P}$. There exists a constant $\lambda > 0$ depending only on n and $\mathscr{D}$, a unimodular matrix $U \in \Gamma(o_n)$, an integral matrix A_i from the finite set in theorem 2 so that*

$$\lambda \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{pmatrix} > S[UA_i] > \lambda^{-1} \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{pmatrix}.$$

We deduce

Corollary. *$\mathscr{R}_0 \cap \mathfrak{N}$ is a compact set if $n = 1$.*

Theorem 2 shows that given $S \in \mathscr{P}$ there exists a unimodular matrix U and a matrix A_i belonging to a finite set such that $S[UA_i]$ satisfies the minimum conditions of § 4. We call $S[U]$ *reduced* and denote by $\mathscr{R}$ the set of reduced matrices. Following HUMBERT one can show that the A's can be so chosen that $\mathscr{R}$ is a connected point set and that it has finitely many neighbours. As a consequence one obtains Siegel's important theorem that $\Gamma(o_n)$ is finitely generated.

The space $\mathscr{P}$ is a symmetric riemannian space with the metric $ds^2 = \sigma(S^{-1} dS S^{-1} dS)$. A simple computation shows that, upto a constant factor, the invariant volume element induced by this metric is

$$(24) \qquad dv = c_1 \prod_{k=1}^{r_1} |S^{(k)}|^{-(nf+1)/2} \prod_{k=r_1+1}^{r_1+r_2} |S^{(k)}|^{-nf/2} \prod_{k>r_1+r_2} |S^{(k)}|^{-(nf-1)/2} dS$$

where c_1 is a constant and $S^{(1)}, \ldots, S^{(r_1+r_2+r_3)}$ are the irreducible components in the representation of S by (3) and dS is the Euclidean volume element in $S^{(1)}, \ldots, S^{(r_1+r_2+r_3)}$. $|S^{(k)}|$ denotes the reduced norm.

Let $t > 0$ be a positive real number and $\mathscr{K}_t$ denote the set of elements in $\mathscr{R}$ with $N_0 S \leqq t$. We have then

Theorem 4. *For positive real numbers $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_1+r_2+r_3}$*

$$\int_{\mathscr{K}_t} \prod_{k=1}^{r_1+r_2+r_3} |S^{(k)}|^{\lambda_k} dv$$

converges.

Proof. Because of the invariance of the volume element dv, it is enough to prove the theorem with $\mathscr{K}_t$ replaced by $\mathscr{L}_t$; $\mathscr{L}_t$ being the subset of S in $\mathscr{R}_0$ with $N_0 S \leqq t_1$, t_1 depending on t. We can even assume that $t_1 = 1$.

Writing $S^{(k)} = T^{(k)}[V^{(k)}]$ in the Jacobi transform so that $T^{(k)} = (t_{pq}^{(k)})$ is an n-rowed matrix with elements $t_{pq}^{(k)}$ in the corresponding component in (3) we see that the characteristic roots of

$$\begin{pmatrix} t^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{(q)} \end{pmatrix}, q = r_1 + r_2 + r_3$$

are all of the same order of magnitude. We write $t_l^{(k)}$ again in the Jacobi form $t_l^{(k)} = (u_{lkp})[v_{lk}]$. The (u_{lkp}) is a matrix of f rows or $f/2$ rows according as $k \leqq r_1 + r_2$ or $> r_1 + r_2$. Also it is a diagonal matrix. If $r_1 < k \leqq r_1 + r_2$ the diagonal elements in (u_{lkp}) are repeated twice and if $k > r_1 + r_2$ they are repeated 4 times. We denote the elements of (u_{lkp}) by $u_{lk1}, \ldots, u_{lka}$, $a = f$ if $k \leqq r_1 + r_2$, $= f/2$ if $k > r_1 + r_2$.

We now make a change of variables from $S^{(k)}$ to u_{lkp} and the $(v_{lk})V^{(k)}$. Noting the fact that since $S \in \mathscr{R}_0$, the elements of $(v_{lk})V^{(k)}$ are bounded by absolute constants we arrive, after a simple computation, at the integral

$$\int \prod_{k=1}^{q} \prod_{l=1}^{n} \prod_{p=1}^{a} u_{lkp}^{\lambda_{lkp}}\, du_{lkp} \tag{25}$$

where

$$\lambda_{lkp} = \begin{cases} \lambda_k + \dfrac{nf - 2(l-1)f - 2a - 1}{2}, & k \leqq r_1 \\ 2\lambda_k + nf - 2(l-1)f - 2a, & r_1 < k \leqq r_1 + r_2 \\ 2\lambda_k + nf - 2(l-1)f - 4a + 1, & k > r_1 + r_2 \end{cases}$$

whose convergence is to be established. Let $e_k = 1$ if $k \leqq r_1$, $= 2$ if $r_1 < k \leqq$ $\leqq r_1 + r_2$ and $= 4$ if $k > r_1 + r_2$. Then $N_0 S \leqq 1$ means that

$$\prod_{k=1}^{q} \prod_{l=1}^{n} \prod_{p=1}^{a} u_{lkp}^{e_k} \leqq t_1 .$$

But for a given k, u_{lkp} are all of the same order of magnitude. So in order to prove the convergence of (25), it is enough to prove the convergence of

$$\int \prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k}\, dx_1, \ldots, dx_n \tag{26}$$

where $\lambda_k = \lambda + \dfrac{n - 2k - 1}{2}$ or $\lambda + n - 2k$ or $\lambda + 2n - 4k + 1$. The domain of integration is

$$0 < \frac{x_k}{x_{k+1}} \leqq t,\ x_1, \ldots, x_n \leqq t .$$

But this can easily be established by using induction on n. Our theorem is completely proved.

In particular if $\lambda_k = \dfrac{nf+1}{2}$ if $k \leqq r_1$, $= \dfrac{nf}{2}$ if $r_1 < k \leqq r_1 + r_2$ and $= \dfrac{nf-1}{2}$ if $k > r_1 + r_2$ in (24) we obtain Siegel's theorem that $\int dS < \infty$ when extended over that part of R with $N_0 S \leqq 1$.

§ 6. The representation space of the orthogonal group

Let $\mathscr{A}$ be a simple algebra of finite rank over the field Γ. $\mathscr{A}$ is then a matrix algebra $\mathfrak{M}_m(\mathscr{D})$ over a division algebra $\mathscr{D}$. Let $\mathscr{A}$ have an involution $x \to x^*$ namely a mapping $x \to x^*$ of $\mathscr{A}$ onto $\mathscr{A}$ such that for $\alpha, \beta \in \mathscr{A}$

$$(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*, (\alpha\beta)^* = \beta^* \alpha^*, (\alpha^*)^* = \alpha .$$

Albert has shown that $\mathscr{D}$ has then an involution. On the other hand if $\mathscr{D}$ has an involution $x \to \tilde{x}$, this can then be extended to $\mathscr{A}$ by defining for any $P = (p_{kl})$ in $\mathscr{A}$, $\tilde{P} = (\tilde{p}_{lk})$. $P \to \tilde{P}$ is an involution of $\mathscr{A}$ and if they have the same effect on the centre of $\mathscr{D}$ then there exists Q_1 in $\mathscr{A}$ with

$$P^* = Q_1^{-1} \tilde{P} Q_1, \quad \tilde{Q}_1 = \pm Q_1 \tag{27}$$

for every P.

We shall therefore consider a division algebra $\mathscr{D}$ over Γ. The centre $\mathscr{K}$ is an algebraic number field. Let $\mathscr{D}$ have an involution and let k be the fixed field of the involution. Then $(\mathscr{K} : k) = 1$ or 2. In case $\mathscr{K} = k$ the involution (the algebra) is of the first kind. Albert has shown that then $\mathscr{D} = k$ or $\mathscr{D}$ is a quaternion division algebra over k.

Let us first consider the case when $\mathscr{D}$ is a quaternion algebra with $\mathscr{K}$ as centre. Let $(\mathscr{K} : \Gamma) = r_1 + 2r_2 + r_3 = h$ in the usual notation. Put $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} \otimes \overline{\Gamma}$. Then $\overline{\mathscr{D}}$ is a direct sum of simple algebras $\Delta_1, \ldots, \Delta_q$, $q = r_1 + r_2 + r_3$. They are matrix algebras over division algebras $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_q$. Now $\Lambda_k = \overline{\Gamma}$ if $k \leqq r_1$, $= \overline{P}$ if $r_1 < k \leqq r_1 + r_2$, $= \overline{\Omega}$ if $k > r_1 + r_2$. Also Δ_k is a matrix algebra of rank 4 over Λ_k if $k \leqq r_1 + r_2$ and of order 1 over Λ_k if $k > r_1 + r_2$. Clearly the involution in $\mathscr{D}$ can be extended to each of Λ_k and also to $\overline{\mathscr{D}}$. Let $x \in \overline{\mathscr{D}}$ and write

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_q \end{pmatrix} \tag{28}$$

where $x_1, \ldots, x_q$ correspond to the irreducible components $\Delta_1, \ldots, \Delta_q$. By above

$$x_i = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & x_{12}^{(i)} \\ x_{21}^{(i)} & x_{22}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad x_{ab}^{(i)} \in \Lambda_i \tag{29}$$

for $i \leqq r_1 + r_2$. If $i > r_1 + r_2$, x_i is a real quaternion. The x_k's are represented in the regular representation of Λ_k. If we denote by $\tilde{x}$ the matrix with $\tilde{x}_i$ in place of x_i in (28) then

$$\tilde{x} = V_i^{-1} x_i' V_i, \quad i = 1, \ldots, q \tag{30}$$

where $V_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ if $i \leqq r_1$, $= \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ if $r_1 < i \leqq r_1 + r_2$ and $= E_4$ the unit matrix of order 4 if $i > r_1 + r_2$. If we put

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_q \end{pmatrix}$$

then we get

$$\tilde{x} = V^{-1} x' V \tag{31}$$

which gives the value of $\tilde{x}$ when x is represented in terms of the normal basis. Also $V' = V^{-1}$.

Consider now the simple algebra $\mathscr{A} = \mathfrak{M}_m(\mathscr{D})$ for $m \geq 1$. Let $\bar{\mathscr{A}} = \mathscr{A} \otimes \Gamma$. Let $S \in \bar{\mathscr{A}}$ so that $S = (s_{kl})$, $s_{kl} \in \bar{\mathscr{D}}$. By above s_{kl} has the form (28). By means of a certain real orthogonal matrix P_1 we have

$$P_1^{-1} S P_1 = \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(q)} \end{pmatrix}, \quad S^{(k)} = (s_{ab}^{(k)})$$

where $s_{kl} = \begin{pmatrix} s_{kl}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & s_{kl}^{(q)} \end{pmatrix}$ as in (28). From above we have

$$P_1^{-1} \tilde{S} P_1 = \begin{pmatrix} \tilde{S}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{S}^{(q)} \end{pmatrix}.$$

If V denotes the m-rowed matrix with V of (31) in the diagonal and zero everywhere else, we get

$$P_1^{-1} \tilde{S} P_1 = (P_1^{-1} V^{-1} P_1) \begin{pmatrix} S^{(1)\prime} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(q)\prime} \end{pmatrix} (P_1^{-1} V P_1) \tag{32}$$

we shall say S is *symmetric* or *skew* according as $\tilde{S} = S$ or $-S$. From (32) we get

$$\varepsilon S^{(k)} = W^{(k)^{-1}} S^{(k)\prime} W^{(k)}, \; k = 1, \ldots, q, \; \varepsilon = \pm 1 \tag{33}$$

and $W^{(k)} = \begin{pmatrix} W^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & W^{(q)} \end{pmatrix} = P_1^{-1} V P_1$ and $W' = W^{-1}$. Note that $S^{(k)}$ and $W^{(k)}$ are elements of $\mathfrak{M}_m(\Lambda_k)$.

Let S be non singular, $\tilde{S} = \varepsilon S$. We shall associate with it a symmetric riemannian space in the following manner. *Let first* $\varepsilon = 1$. For $k \leq r_1 + r_2$ we can write $S^{(k)} = \widetilde{C^{(k)}} C^{(k)}$ for an element $C^{(k)}$ in $\mathfrak{M}_m(\Lambda_k)$. Put $H^{(k)} = C^{(k)\prime} C^{(k)}$ and $\widetilde{H^{(k)}} = \widetilde{C^{(k)}}\, \widetilde{C^{(k)}}'$. Because of (33) we have

$$H^{(k)} S^{(k)^{-1}} \widetilde{H^{(k)}} = S^{(k)\prime}. \tag{34}$$

Also $H^{(k)} > 0$ and $\widetilde{H^{(k)}} > 0$. On the other hand let $H^{(k)} > 0$ satisfy (34). Then $\widetilde{H^{(k)}}$ is also > 0. From (33) we see that $W^{(k)} S^{(k)}$ is skew symmetric in the ordinary sense. There exists therefore $C^{(k)}$ with $S^{(k)} = \widetilde{C^{(k)}} C^{(k)}$ and $H^{(k)} = C^{(k)\prime} D^{(k)} C^{(k)}$, $D^{(k)}$ being a diagonal matrix with positive diagonal elements. From (34) it follows that $D^{(k)} = E$. Thus all solutions $H^{(k)} > 0$ of (34) are obtained in the manner we have outlined.

Let now $k > r_1 + r_2$. Then

$$S^{(k)} = \widetilde{C^{(k)}} \begin{pmatrix} E_{p_k} & 0 \\ 0 & -E_{q_k} \end{pmatrix} C^{(k)}$$

E_a being the unit matrix of order a in $\mathfrak{M}_a(\Lambda_k)$, $p_k + q_k = m$. Put $H^{(k)} = C^{(k)\prime} C^{(k)}$. $H^{(k)}$ again satisfies (34). Let

$$P_1^{-1} H P_1 = \begin{pmatrix} H^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & H^{(q)} \end{pmatrix}$$

where $H \in \mathscr{A}$ (note we take only the irreducible components of $\mathscr{A}$). We then have

$$HS^{-1}\bar{H} = S' \tag{35}$$

and $H > 0$, $H = H'$. From above it follows that every solution $H > 0$ of (35) comes in the above manner. We denote by $\mathfrak{H}_0$ the space of solutions H of (35) with the condition $H' = H > 0$. We call this the *$\mathfrak{H}$-space* of S. It is clearly a locally compact topological space.

In order to determine the topological dimension of the space $\mathfrak{H}_0$ it is enough to determine the dimensions of the spaces defined by (34) since $\mathfrak{H}_0$ is the product of such spaces. If $k \leqq r_1$ we get because of (33), $W^{(k)} S^{(k)}$ is real skew symmetric so that the dimension of the space $H^{(k)}$ is equal to the dimension of the space of $2m$ rowed real matrices which are positive and symplectic. By Siegel's work, this is $m(m+1)$. If $r_1 < k \leqq r_1 + r_2$, for a similar reason the $H^{(k)}$ constitute a space of the same dimension as that of hermitian matrices which are positive and symplectic. A simple calculation shows that this space is $m(2m+1)$ dimensional. If $k > r_1 + r_2$ we have to proceed in exactly the same way as Siegel [13]. We find that the topological dimension is $4\, p_k q_k$. Thus the $\mathfrak{H}_0$ space is of

$$r_1 m(m+1) + r_2 m(2m+1) + 4 \sum_{k=r_1+r_2+1}^{r_1+r_2+r_3} p_k q_k \tag{36}$$

real dimensions.

Let now $\varepsilon = -1$. From (33) it follows that $W^{(k)} S^{(k)}$ is symmetric for $k \leqq r_1 + r_2$. In case $k \leqq r_1$ we can find $H^{(k)} > 0$ satisfying (34). If $r_1 < k \leqq$ $\leqq r_1 + r_2$ we can proceed as in [8] and show that $H^{(k)}$ again satisfies (34). It is easy to see that the $H^{(k)}$ in the first case constitute a space of $p_k q_k$, $2m = p_k + q_k$ dimensions and of $m(2m-1)$ dimensions in the second case. Consider the case $k > r_1 + r_2$. $S^{(k)}$ is now a skew quaternion matrix. Since for real skew quaternions α, β there always exists a quaternion γ such that $\bar{\gamma}\alpha\gamma = \beta$, it follows that there exists a matrix $C^{(k)}$ in $\mathfrak{M}_m(\Lambda_k)$, $k > r_1 + r_2$ such that

$$C^{(k)\prime} S^{(k)} C^{(k)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, & m \text{ even} \\[2ex] \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & i & 0 \\ -E & 0 & 0 \end{pmatrix}, & m \text{ odd} \end{cases} \tag{37}$$

i being a real skew quaternion (given as a 4 rowed real matrix in the regular representation). If we put $H^{(k)} = (C^{(k)} C^{(k)\prime})^{-1}$, then $H^{(k)}$ again satisfies (34). In order to determine the dimension of this space it is enough to assume that $S^{(k)}$ is given by the right side of (37). If m is even one proceeds as in Siegel's symplectic geometry and gets the parametric representation

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & -X \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

where $Y > 0$ is an $n = \frac{m}{2}$ rowed symmetric quaternion matrix and $X' = X$ is a quaternion matrix. The dimensionality is clearly $m(m-1)$.

Let now $m = 2n + 1$. A parametrization of $H^{(k)}$ is given by

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix} Y^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & -z' & X + \frac{1}{2} ziz' \\ 0 & 1 & -iz' \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix}$$

where $Y > 0$, $X' = X$ as before and z is a quaternion column of n rows. The $H^{(k)}$ constitute a space of $m(m-1)$ dimensions.

If now we define H by (35) we get the $\mathfrak{H}$-space associated with S and it has the dimension

$$\sum_{k=1}^{r_1} p_k q_k + r_2 m(2m-1) + r_3 m(m-1)\,. \tag{38}$$

Let now $\mathfrak{D}$ be an involutorial division algebra of the second kind. Let $\mathcal{K}$ be its centre; then $(\mathcal{K} : k) = 2$ and so $\mathcal{K} = k(\varrho)$ for $\varrho \in \mathcal{K}$. Let $\varrho^2 < 0$ at r_4 of the real infinite prime spots of k. Put, with the usual notation $r_1 + r_2 + + r_3 + r_4 = q$. Let $x \in \mathfrak{D}$. SIEGEL has shown that

$$x = C^{-1} \underline{x}' C \tag{39}$$

where $C' = \underline{C} = C^{-1}$. In fact SIEGEL has shown that for $k \leq r_1 + r_2 + r_3$, $C^{(k)}$ can be taken to be the unit matrix and in other cases $C^{(k)\prime} = C^{(k)}$ and $C^{(k)2}$ is the identity matrix. If x and $\underline{x}$ are given by

$$x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \ddots \\ x^{(t)} \end{pmatrix}, \quad \varkappa = \begin{pmatrix} \underline{x}^{(1)} \\ \ddots \\ \underline{x}^{(t)} \end{pmatrix}$$

where $t = 2(r_1 + r_2 + r_3) + r_4$ then

$$\begin{cases} \underline{x}^{(2k+1)} = x^{(2k+2)}, & k = 0, 1, \ldots, r_1 + r_2 + r_3 - 1 \\ \underline{x}^{(k)} = x^{(k)}, & k > 2(r_1 + r_2 + r_3)\,. \end{cases} \tag{40}$$

Let $S \in \mathcal{A} = \mathfrak{M}_m(\mathfrak{D})$ and C the m-rowed diagonal matrix with the matrix C of (39) in its diagonals. Then

$$S = C^{-1} \underline{S}' C\,.$$

As before we introduce the matrix P_1 and obtain

$$P_1^{-1} S P_1 = P_1^{-1} C^{-1} P_1 \begin{pmatrix} \underline{S}^{(1)\prime} \\ \ddots \\ \underline{S}^{(t)\prime} \end{pmatrix} P_1^{-1} C P_1\,. \tag{41}$$

Let $W = \begin{pmatrix} W^{(1)} \\ \ddots \end{pmatrix} = P_1^{-1} C P_1$. Then $W' = W^{-1} = \underline{W}$.

Let now $S = \underline{S}$ be a symmetric non singular matrix in $\mathcal{A}$. It is clear that there is no loss in generality in considering only symmetric matrices; for, if $S = -\underline{S}$ then $\varrho \in \mathcal{K}$ and so $S_1 = \varrho S$ is symmetric. We shall as before associate a symmetric riemannian space $\mathfrak{H}_0$ with S.

Let $k \leq r_1$. We then have a real infinite prime spot of k at which $\varrho^2 > 0$ and $\mathfrak{D}$ is unramified. From (39) and (41) we get

$$W^{(k)} S^{(k)} = \underline{S}^{(k)\prime} \underline{W}^{(k)\prime} = (\underline{W^{(k)} S^{(k)}})'\,.$$

We can therefore write

$$W^{(k)} S^{(k)} = \underline{B}^{(k)\prime} B^{(k)}$$

for an arbitrary mf-rowed non singular matrix $B^{(k)}$. Put $H^{(k)} = B^{(k)\prime} B^{(k)}$ and $\underline{H}^{(k)} = \underline{B}^{(k)\prime} \underline{B}^{(k)}$ (note that $\underline{B}^{(k)}$ is uniquely determined by $B^{(k)}$). One then obtains

$$H^{(k)} S^{(k)-1} \widetilde{\underline{H}^{(k)}} = S^{(k)\prime}. \tag{42}$$

Here $H^{(k)}$ is an arbitrary positive mf-rowed real matrix and $\underline{H}^{(k)}$ is determined by $H^{(k)}$ from equation (42). The topological dimension of the space of these $H^{(k)}$ is clearly $\frac{mf(mf+1)}{2}$.

A similar thing is true if $r_1 < k \leqq r_1 + r_2 + r_3$. In these cases the dimensions of the space of $H^{(k)}$ are found to be $(mf)^2$ and $\frac{mf}{2}(mf-1)$ in the two cases $r_1 < k \leqq r_1 + r_2$ and $r_1 + r_2 < k \leqq r_1 + r_2 + r_3$ respectively.

Let now $k > r_1 + r_2 + r_3$. In this case $W^{(k)} S^{(k)} = (W^{(k)} S^{(k)})'$ is a hermitian matrix, in the usual sense, of order mf. We can therefore write

$$W^{(k)} S^{(k)} = B^{(k)\prime} \begin{pmatrix} E_{p_k} & 0 \\ 0 & -E_{q_k} \end{pmatrix} B^{(k)}$$

where $p_k + q_k = mf$. Putting $H^{(k)} = B^{(k)\prime} B^{(k)}$ we see that $H^{(k)}$ satisfies (35) and the dimension of the corresponding space is $2 p_k q_k$. Defining as before

$$P_1^{-1} H P_1 = \begin{pmatrix} H^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & H^{(s)} \end{pmatrix}$$

we see that $H S^{-1} \bar{H} = S'$ as before and that the $\mathfrak{H}_0$ space is of real dimension equal to

$$\frac{r_1 mf(mf+1)}{2} + r_2 (mf)^2 + \frac{r_3 mf(mf-1)}{2} + 2 \sum_{k > r_1 + r_2 + r_3} p_k q_k . \tag{43}$$

Remark. In case of both involutions if for some k, $S^{(k)}$ is definite, that is, that the equation $\bar{x} S^{(k)} x = 0$ for x in Λ_k has only the trivial solution $x = 0$, then the corresponding solution $H^{(k)}$ of (34) or (42) is unique. The corresponding space of $H^{(k)}$ has dimension zero. It is clear that such a situation can take place only if $k > r_1 + r_2$ if the involution is of the first kind and $\varepsilon = 1$ and $k \leqq r_1$ if $\varepsilon = -1$ and $k > r_1 + r_2 + r_3$ in case of involutions of the second kind. Thus the $\mathfrak{H}_0$ space consists of just one point, that is, that the solution of the equation (35) is unique only when k is totally real and $\mathscr{K}$, if not equal to k, is totally complex. Furthermore if the involution is of the first kind $\mathscr{D} = k$ or $\mathscr{D}$ is a totally definite quaternion algebra when $\varepsilon = 1$ and totally indefinite quaternion algebra if $\varepsilon = -1$. If $\mathscr{D}$ is of the second kind, it satisfies the conditions of Albert.

Let us denote the matrices of $\mathscr{A}$ obtained from the regular representation of $\overline{\mathscr{D}}$ by the basis $\delta_1, \ldots, \delta_g$ of $\mathscr{D}/\Gamma$ by B_0 with the suffix o. Let us denote the corresponding matrices obtained by means of the normal basis $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_g$ by B without the suffix. In $\mathscr{A}$ we have two involutions $B_0 \to B_0^*$ obtained in the

natural way as in § 3 and $B_0 \to \bar{B}_0$ given by means of the involution in $\mathfrak{D}$. From what we have seen above, it follows that

$$B_0 = Q^{-1} B_0^* Q \tag{44}$$

where Q is a matrix satisfying 1) Q^2 commutes with all elements of $\mathscr{A}$ 2) Q^4 is the identity matrix 3) $M Q' M^{-1} = Q^{-1}$ with the M defined in § 3 and 4) Q^2 is the identity matrix in case of involution of the second kind and is a diagonal matrix with ± 1 in diagonals in case of involution of first kind. More specifically if Q is written

$$P_1^{-1} Q P_1 = \begin{pmatrix} Q^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & Q^{(s)} \end{pmatrix}$$

then in case of involution of first kind $Q^{(k)2} = -E$ if $k \leq r_1 + r_2$ and equal to E if $k > r_1 + r_2$.

It is to be noted that in this section we are *not* considering the case $\mathfrak{D} = k$ or $\mathfrak{D} = \mathscr{K}$. This has been considered in another paper in a different context [11].

Let now S_0 be a non singular matrix of $\mathscr{A}$ and $S_0 = \varepsilon \bar{S}_0$, $\varepsilon = \pm 1$. We take $\varepsilon = 1$ in case of involution of the second kind. By means of the foregoing we associate with S_0 the $\mathfrak{H}$ space of positive $H_0 = H_0^*$ which because of (35) satisfies

$$H_0 S_0^{-1} \bar{H}_0 = S_0^* . \tag{45}$$

It is clear that in the representation of H_0 by the normal basis, the irreducible components $H^{(1)}, \ldots$ occur as often as the multiplicity.

The group $\Omega(S_0)$ of matrices P_0 in $\mathscr{A}$ satisfying

$$\bar{P}_0 S_0 P_0 = S_0 \tag{46}$$

is called the *orthogonal group* of S_0. It is clearly a Lie group. It is not hard to see that if $H_0 \in \mathfrak{H}$ and $P_0 \in \Omega(S_0)$ then $P_0^* H_0 P_0$ is also in $\mathfrak{H}$. Thus the mapping $H_0 \to P_0^* H_0 P_0$ gives a representation of $\Omega(S_0)$ in $\mathfrak{H}$. We call $\mathfrak{H}$ the *representation space* of $\Omega(S_0)$, the orthogonal group of S_0. $\mathfrak{H}$ is topologically equivalent to the quotient space of $\Omega(S_0)$ by a maximal compact subgroup of it. If G is the subgroup of the centre of $\bar{\mathfrak{D}}$ consisting of elements α with $\alpha\alpha^* = 1$, then $G \cap \Omega(S_0)$ is compact and normal in $\Omega(S_0)$, regarded as matrices αE. The representation $H_0 \to P_0^* H_0 P_0$ of $\Omega(S_0)/G \cap \Omega(S_0)$ is a faithful representation.

$\mathfrak{H}$ is a symmetric space with the metric

$$ds^2 = \sigma(H_0^{-1}\, dH_0 H_0^{-1}\, dH_0) \tag{47}$$

where σ denotes the regular trace. We shall find the invariant volume element by suitably parametrising the $\mathfrak{H}$-space. To this end let us take the irreducible components of $P_1^{-1} \gamma^{-1} S_0 \gamma P_1$ in the form (32) and (41), namely

$$\begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Let us assume that

$$S^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{(k)} \\ 0 & F^{(k)} & Q^{(k)} \\ \varepsilon \tilde{P}^{(k)} & \varepsilon \tilde{Q}^{(k)} & G^{(k)} \end{pmatrix} \tag{48}$$

with $P^{(k)}$ non-singular and of order $g_k \leqq \frac{m}{2}$. The integer g_k may be zero or $\frac{m}{2}$. In the latter case $S^{(k)}$ has the form

$$S^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & P^{(k)} \\ \varepsilon \tilde{P}^{(k)} & G^{(k)} \end{pmatrix}$$

we shall, for the moment, omit the superscripts. The equations one obtains below are understood to be true for $k = 1, 2, \ldots$. Put now

$$J^{(k)} = \begin{pmatrix} E & -\tilde{P}^{-1}\tilde{Q} & -\frac{1}{2}\tilde{P}^{-1}G \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

and let $T = \tilde{J} S^{(k)} J$ so that

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & P \\ 0 & F & 0 \\ \varepsilon \tilde{P} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let now $K = K_1[J_1 J]$ where $H = K_1[J_1]$ is the Jacobi transform of H with

$$K_1 = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} E & Q_1 & Q_2 \\ 0 & E & Q_3 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Here H_1 and H_3 are g_k rowed square matrices. Put now

$$L = J_1 J = \begin{pmatrix} E & L_1 & L_2 \\ 0 & E & L_3 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Since S and H satisfy (35), we obtain writing S and H in terms of J_1, J, T and K_1 the following equations

$$(49) \quad \begin{cases} L_1 F^{-1} + \varepsilon \tilde{P}^{-1} \tilde{L}_3 = 0 \\ H_1 \tilde{P}^{-1} \tilde{H}_3 = \tilde{P}' \\ H_2 F^{-1} \tilde{H}_2 = F' \\ L_2 = (A - \frac{1}{2} L_1 F^{-1} \tilde{L}_1) P \\ \text{where } 2A = L_2 P^{-1} - \varepsilon \tilde{P}^{-1} \tilde{L}_2 \text{ satisfies } A = -\varepsilon \tilde{A}. \end{cases}$$

We now parametrize the $\mathfrak{H}$ space in the following way. Let the algebra be of the first kind. We choose the parameters to be $H_1^{(k)}$, $L_1^{(k)}$, $A^{(k)}$ and the parameters required in the equation $H_2 F^{-1} \tilde{H}_2 = F'$ $k = 1, \ldots, q$. It is clear that these parameters satisfy $H_1^{(k)} > 0$ and g_k-rowed, $L_1^{(k)}$ arbitrary and of g_k rows and $m - 2g_k$ columns and $\tilde{A}^{(k)} = -A^{(k)}$ has g_k rows. Under these conditions the solutions H of (35) are completely determined. Moreover the elements of these matrices are in Δ_k. Let now the algebra be of the second kind. If $k > r_1 + r_2 + r_3$ we take $H_1^{(k)}$, $L_1^{(k)}$, $A^{(k)}$ and the parameters in $H^{(k)} F^{(k)^{-1}} \widetilde{H^{(k)}} = F^{(k)'}$ as the required parameters again with the conditions $H_1^{(k)} > 0$ and g_k-rowed, $L_1^{(k)}$ arbitrary of g_k rows and $m - 2g_k$ columns and $\tilde{A}^{(k)} = -A^{(k)}$ is g_k rowed. If now $k \leqq r_1 + r_2 + r_3$ we take $H_1^{(k)}$, $\bar{H}_1^{(k)}$, $L_1^{(k)}$, $A^{(k)}$, $\overline{L_1^{(k)}}$, and the parameters in $H^{(k)} F^{(k)^{-1}} \widetilde{H^{(k)}} = F^{(k)'}$ as the required independent parameters.

They satisfy $H_1^{(k)} > 0$, $\widetilde{H_1^{(k)}} > 0$ and both have g_k rows, $L_1^{(k)}$ and $\widetilde{L_1^{(k)}}$ have g_k rows and $m - 2g_k$ columns and have arbitrary elements in Δ_k and $\widetilde{A^{(k)}} = -A^{(k)}$.

Since these parameters are independent, the $\mathfrak{H}$ space is a product space defined by these parameters. We can write the metric in terms of these parameters. The metric given in (43) is invariant under the orthogonal group and also under the transformations $S_0 \to \tilde{B}_0 S_0 B_0$ and $H_0 \to B_0^* H_0 B_0$ for an arbitrary B_0 in $\mathscr{A}$. Let us denote for any matrix B in Δ_k the matrix of differentials by $\dot{B}$. Except for a multiplicative constant depending on m and g, the metric is given by

$$(50)\quad ds^2 = \tau(K_1^{-1}\dot{K}_1 K_1^{-1}\dot{K}_1) + \tau(K_1^{-1}K_1[\dot{L}L^{-1}]) + \tau(\dot{L}L^{-1}K_1^{-1}\dot{K}_1) + \\ + \tau(\dot{L}L^{-1}\dot{L}L^{-1})$$

τ denoting the reduced trace in $\mathscr{A}$. Now

$$\dot{L}L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{L}_1 & \dot{L}_2 - \dot{L}_1 L_3 \\ 0 & 0 & \dot{L}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

which shows that $\tau(\dot{L}L^{-1})^2 = 0$. Let us put $\dot{L}_2 - \dot{L}_1 L_3 = (\dot{A} + B)P$ where $B = \frac{1}{2}(\dot{L}_1 F \tilde{L}_1 - L_1 F^{-1} \tilde{\dot{L}}_1)$. Using then the expression for K_1 we get

$$(51)\quad \tau(K_1[\dot{L}L^{-1}]K_1^{-1}) = \tau(H_1[\dot{L}_1]H_2^{-1}) + \tau(H_3^{-1}H_2[\dot{L}_3]) + \tau(\hat{H}_1 H_1[\dot{A} + B]).$$

Furthermore the equations (49) show that in case of involutions of the first kind

$$(52)\quad \begin{cases} \tau(H_3^{-1}H_2[\dot{L}_3]) = \tau(H_2^{-1}H_1[\dot{L}_1]) \\ \tau(H_3^{-1}\dot{H}_3 H_3^{-1}\dot{H}_3) = \tau(H_1^{-1}\dot{H}_1 H_1^{-1}\dot{H}_1) \end{cases}$$

and in case of involutions of the second kind

$$(53)\quad \begin{cases} \tau(H_3^{-1}H_2[\dot{L}_3]) = \tau(\hat{H}_2^{-1}\hat{H}_1[\dot{L}_1]) \\ \tau(H_3^{-1}\dot{H}_3 H_3^{-1}\dot{H}_3) = \tau(\hat{H}_1^{-1}\dot{\tilde{H}}_1 \hat{H}_1^{-1}\dot{\hat{H}}_1). \end{cases}$$

Omitting constants depending on m, g and $\mathscr{D}$ only, the metric is given by

$$ds^2 = \tau(\dot{H}_1^{-1}H_1 H_1^{-1}\dot{H}_1) + \tau(H_2^{-1}\dot{H}_2 H_2^{-1}\dot{H}_2) + \tau(H_2^{-1}H_1[\dot{L}_1]) + \tau(\hat{H}_1 H_1[\dot{A} + B]).$$

For any matrix G in $\mathfrak{M}_r(\Delta_k)$ denote by $|G|$ its reduced norm over Γ. We have then the invariant volume element in terms of the parameters as follows. Let the involution be of the first kind, then

$$(54)\quad d\omega = \prod_{k=1}^{r_1+r_2+r_3} |H_1^{(k)}|^{\lambda_k} |H_2^{(k)}|^{-\mu_k}\, dv_1\, dv_2\, dv_3\, dv$$

where dv_1, dv_2, dv_3 are respectively the Euclidean volume element in the product of the spaces $H_1^{(k)}$, in the product of $L_1^{(k)}$ and in that of $A^{(k)}$. dv is the

product measure in the space of H_2. Also

$$\lambda_k = \begin{cases} (m-2g_k) - \frac{1-\varepsilon}{2}, & k \leqq r_1 \\ (m-2g_k) + \frac{\varepsilon}{2}, & r_1 < k \leqq r_1 + r_2 \\ (m-2g_k) + \frac{1+\varepsilon}{2}, & k > r_1 + r_2 \end{cases}$$

$\varepsilon = \pm 1$. Suppose now the involution is of the second kind, then

(55)

$$d\omega = \prod_{k=1}^{r_1+r_2+r_3+r_4} |H_1^{(k)}|^{\lambda_k} |\widetilde{H_1^{(k)}}|^{\lambda_k} |H_2^{(k)}|^{-\frac{fg_k}{2}} |\widetilde{H_2^{(k)}}|^{-\frac{fg_k}{2}} dv_1\, d\tilde{v}_1\, dv_2\, d\tilde{v}_2\, dv_3\, dv$$

where dv_1 is the euclidean volume element in the product space of $H_1^{(k)}$ and $d\tilde{v}_1$ in that of $\widetilde{H_1^{(k)}}$. dv_2 and $d\tilde{v}_2$ refer to the euclidean volume element in the product spaces of $L_1^{(k)}$ and $\widetilde{L_1^{(k)}}$ respectively and dv_3 to that of $A^{(k)}$. dv as before is the volume element in the space of H_2. It is to be noted that for $k > r_1 + r_2 + r_3$, $H_i^{(k)} = \widetilde{H_i^{(k)}}$, $i = 1, 2$. Also

$$\lambda_k = \begin{cases} \frac{f(m-2g_k)-1}{2}, & k \leqq r_1 \\ \frac{f(m-2g_k)+1}{2}, & r_1 + r_2 < k \leqq r_1 + r_2 + r_3 \\ \frac{f(m-2g_k)}{2}, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

We shall denote by $d\omega_0$ the volume element computed under the metric (47). $d\omega_0$ is a constant multiple of $d\omega$ above.

§ 7. Units of quadratic forms

Let $\mathscr{D}$ be an involutorial division algebra over Γ and $\mathscr{A} = \mathfrak{M}_m(\mathscr{D})$ the simple algebra of m-rowed square matrices over $\mathscr{D}$. Let S_0 in $\mathscr{A}$ be non singular and $(s_{kl}) = S_0 = \varepsilon \bar{S}_0$. If $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ is a column of elements of $\bar{\mathscr{D}}$ we call $S_0\{x\} = \sum_{i,j} \bar{x}_i' s_{ij} x_i$ the *quadratic form* associated with S_0. Let o be an order in $\mathscr{D}$ and O the extended order in $\mathscr{A}$. If $\alpha \in \mathscr{D}$, $\alpha = \varepsilon\bar{\alpha}$ we say that S_0 *represents* α *integrally* if there exists x with elements in o such that $S_0\{x\} = \alpha$. An element $U_0 \in \Gamma(O_0)$ is said to be a *unit* of S_0 if $\bar{U}_0 S_0 U_0 = S_0\{U_0\} = S_0$. The units of S_0 form a group called the *unit group* of S_0. We shall denote it by $\Gamma(S_0)$. From the definition in the previous section, it follows that $\Gamma(S_0)$ is a subgroup of the orthogonal group $\Omega(S_0)$.

Two matrices S_0 and T_0 in $\mathscr{A}$ are said to be *equivalent* or in the *same class* if $S_0 = \varepsilon\bar{S}_0$, $T_0 = \varepsilon\bar{T}_0$ and there is a $U_0 \in \Gamma(O)$ such that $\bar{U}_0 S_0 U_0 = T_0$. The set of equivalent matrices is a class. If S_0 and T_0 are in the same class then $N_0 S_0 = N_0 T_0$ and they have the same system of signatures.

Let now $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(S_0)$ be the space of positive matrices associated with S_0. If $B_0 \in \bar{\mathscr{A}}$ and is non singular then the positive space associated with $S_0\{B_0\} = \bar{B}_0 S_0 B_0$ is the set of positive matrices $H_0[B_0] = B_0^* H_0 B_0$ with $H_0 \in \mathfrak{H}$. With HERMITE-SIEGEL we say that $S_0\{U_0\}$ for $U_0 \in \Gamma(O)$ is *reduced* if there exists at least one element of the $\mathfrak{H}$ space of $S_0\{U_0\}$ which is reduced in the sense of § 3. If we denote by $\mathfrak{H}[U_0]$ the set of elements $H_0[U_0]$ for $H_0 \in \mathfrak{H}$, then $S_0\{U_0\}$ is reduced if and only if $\mathfrak{H}[U_0] \cap \mathscr{R}$ is not empty.

Now $\mathfrak{H}$ is a subspace of $\mathscr{P}$ and so for any $H_0 \in \mathfrak{H}$ there exists a U_0 such that $H_0[U_0] \in \mathscr{R}$. This means there exists a U_0 with $\mathfrak{H}[U_0] \cap \mathscr{R}$ is not empty. Thus in each class of matrices in $\mathscr{A}$ there exists a reduced matrix.

It is to be noted that if S_0 is totally definite then the space reduces to a point so that if $S_0 > 0$ then the definition of reduced matrix given above coincides with that in § 3.

In general if $S_0 \in \bar{\mathscr{A}}$ the number of reduced matrices in the class of S_0 can be infinite. We shall assume that $S_0 \in \mathscr{A}$ and is non singular. Then we have

Theorem 5. *For given m and $N_0 S_0$ there exists only finitely many reduced integral matrices.*

Proof. Let $a_1, a_2, \ldots,$ denote positive real numbers depending only on m and $\mathfrak{D}$. Let U_0 be a unimodular matrix for which $S_0\{U_0\}$ is reduced. This means that for some $H_0 \in \mathfrak{H}$, $H_0[U_0]$ is reduced. Let A_0 be one of the finitely many matrices of § 4 for which $H_0[U_0 A_0]$ is in the Siegel domain $\mathscr{R}_0$. Put $S_1 = S_0\{U_0 A_0\}$. By (35) we have

$$\hat{H}_1 = H_1^{-1}[S_1^*]\,, \quad H_1 = H_0[U_0 A_0]\,. \tag{56}$$

Since $\hat{H}_1$ is determined uniquely by H_1, the matrices H_1 and $H_1^{-1}[B]$ where $B = (b_{kl})$, $b_{kl} = 1$ if $k + l = m + 1$ and zero otherwise, lie in $\mathscr{R}_{a_1}$. Put

$$H_2 = \gamma^{-1} \hat{H}_1 \gamma\,, \quad H_3 = \gamma^{-1} B^* H_1^{-1} B \gamma\,. \tag{57}$$

Then H_2 and H_3 being ordinary real positive symmetric matrices are, by § 5, in $\mathscr{F}_{a_2}$. Let now

$$T_1 = \gamma H_2 \gamma'\,, \quad T_2 = \gamma H_3 \gamma'\,. \tag{58}$$

Since γ is independent of H, T_1 and T_2 lie in $\mathscr{F}_{a_3}$ in the space of mg rowed positive symmetric matrices. From (56), (57), (58) we get

$$T_1 = T_2[B S_1']\,.$$

From the form of S_1 it follows that BS_1' and $(BS_1')^{-1}$ have both bounded denominators and are rational mg rowed matrices. By a wellknown theorem of SIEGEL there exist only finitely many such rational matrices with given norm equal to that of BS_1'. Our theorem is proved.

We deduce

Corollary 1. *There exist finitely many classes of integral matrices S_0 with given m and $N_0 S_0$.*

Corollary 2. *In each class of matrices in $\mathscr{A}$ there exist only finitely many reduced matrices.*

Let $S_0 \in A$, $S_0 = \varepsilon S_0$ and $\Gamma(S_0)$ its unit group. Since $\mathfrak{H}$, the representation space of the orthogonal group $\Omega(S_0)$, is a subspace of $\mathscr{P}$, the representation $H_0 \to H_0[U_0]$ of $U_0 \in \Gamma(S_0)$ is discontinuous in $\mathfrak{H}$. This representation is faithful if we take $\Gamma(S_0)/\Gamma(S_0) \cap G$ where G is the group defined in § 6. The group $\Gamma(S_0) \cap G$ is finite. We construct a fundamental region for $\Gamma(S_0)$ in $\mathfrak{H}$ in the following way. Let $U_1, \ldots, U_\lambda$ be the finitely many unimodular matrices which render S_0 reduced. Put $\mathfrak{H}_k = \mathfrak{H} \cap \mathscr{R}[U_k^{-1}]$. Let

$$\mathscr{F} = \mathfrak{H} \cap \left(\sum_k \mathfrak{H}_k\right).$$

Then $\mathscr{F}$ is a fundamental region for $\Gamma(S_0)/\Gamma(S_0) \cap G$. Let $H_0 \in \mathfrak{H}$. There is a unimodular $U_0 \in \Gamma(O)$ such that $H_0[U_0]$ is reduced. By definition therefore $S_0\{U_0\}$ is reduced. By theorem 5 therefore $S_0\{U_0\} = S_0\{U_j\}$ for some j, U_j being one of the set $U_1, \ldots, U_\lambda$. This means that $U_0 U_j^{-1} \in \Gamma(S_0)$. Therefore $H_0[U_0 U_j^{-1}] \in \mathfrak{H}$. But since $H_0[U_0] \in \mathscr{R}$, it means $H_0[U_0 U_j^{-1}] \in \mathfrak{H}_j \subset \mathscr{F}$. This means that the images of $\mathscr{F}$ by $\Gamma(S_0)$ cover $\mathfrak{H}$ without gaps. Let $\mathscr{F}$ and $\mathscr{F}[V]$ for $V \in \Gamma(S_0)$ have non empty intersection. There exists then $H \in \mathscr{F}$ with $H[V]$ in $\mathscr{F}$. By definition of $\mathscr{F}$ this means that for some U_k, U_l in the set of reducing unimodular matrices $H[U_k]$ and $H[VU_l]$ are in $\mathscr{R}$. By properties of $\mathscr{R}$, U_k and VU_l belong to a finite set determined uniquely by m, $\mathscr{D}$ and $NH = NS_0$. Since U_k are finite in number there exist finitely many V which are determined independently of H. This means that $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}[V]$ for $V \in \Gamma(S_0)$ is non empty only for finitely many V. One can again prove that the boundary of $\mathscr{F}$ relative to $\mathfrak{H}$ is the same as the intersection of $\mathfrak{H}$ with the boundary of $\mathscr{R}[U_k^{-1}]$. Since $\mathfrak{H}$ is connected we deduce

Theorem 6. *The unit group $\Gamma(S_0)$ is finitely generated.*

The unit group $\Gamma(S_0)$ defined as above depends on the order chosen in $\mathscr{D}$. In order to obtain a theorem for an arbitrary order let $A \to A^\sigma$ be an involution of $\mathscr{A}$ which has the same effect on $\mathscr{K}$, the centre of $\mathscr{A}$, as the involution $A \to \tilde{A}$. There exists therefore $F \in \mathscr{A}$ such that

$$A^\sigma = F^{-1}\tilde{A}F\,, \quad \tilde{F} = \eta F, \eta = \pm 1 \tag{59}$$

for all A in $\mathscr{A}$. Let $S^\sigma = \varepsilon S$, $\varepsilon = \pm 1$ be non singular in $\mathscr{A}$. Let $\Gamma_\sigma(S)$ be the unit group of S relative to the order O obtained from extending o. Because of (59)

$$FS = T = \varepsilon\eta\tilde{T}\,.$$

If $U \in \Gamma_\sigma(S)$ then $\tilde{U}(FS)U = FS$. On the otherhand if $U \in \Gamma(FS)$ then $U \in \Gamma_\sigma(S)$. This means from theorem 6 that $\Gamma_\sigma(S)$ is finitely generated.

On the other hand let O' be any order in $\mathscr{A}$. There exists then a rational integer p such that $p\,O' \subset O$. Let $S = \varepsilon\tilde{S}$ and $\Gamma(S, O')$ the unit group of S relative to O'. Let Γ_1 be the subgroup of $\Gamma(S, O')$ consisting of U with $U \equiv E \pmod{pO'}$. This is clearly of finite index in $\Gamma(S, O')$. But $O \bmod pO'$ is finite. Therefore Γ_1 and $\Gamma(S, O)$ are commensurable. Using theorem 5 and the foregoing remarks we have

Theorem 7. *If $A \to A^\sigma$ is any involution of $\mathscr{A}$, O' any order of $\mathscr{A}$ and $S = \varepsilon S^\sigma$ a non singular element of $\mathscr{A}$, the unit group $\Gamma(S, O')$ of unimodular matrices U relative to O' satisfying $U^\sigma S U = S$, is finitely generated.*

§ 8. Convergence of an integral

Let $n \geqq 1$ be an integer and consider in the algebra $\bar{\mathscr{A}}_{2n} = \mathfrak{M}_{2n}(\bar{\mathfrak{D}})$ the matrix

$$J_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -\varepsilon E & 0 \end{pmatrix}$$

where E is the unit matrix of order h over $\bar{D}$, $\varepsilon = \pm 1$ and we take $\varepsilon = 1$ if the involution is of the second kind. Clearly

$$-J_\varepsilon = \varepsilon \tilde{J}_\varepsilon = \varepsilon J_\varepsilon^* .$$

The orthogonal group $\Omega(J_\varepsilon)$ of J_ε is called the *symplectic group* in $\bar{\mathscr{A}}_{2n}$. If $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ is in $\Omega(J_\varepsilon)$ then

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{A} C = \varepsilon \tilde{C} A,\ \tilde{B} D = \varepsilon \tilde{D} B,\ \tilde{A} D - \varepsilon \tilde{C} B = E \\ A \tilde{B} = \varepsilon B \tilde{A},\ C \tilde{D} = \varepsilon D \tilde{C},\ A \tilde{D} - \varepsilon B \tilde{C} = E . \end{array}\right. \tag{60}$$

By the results of § 6 the representation space $\mathfrak{H}$ of J_ε consists of matrices

$$H_0 = H_0^* > 0 \text{ with } H_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ B_0^* & C_0 \end{pmatrix} \text{ satisfying}$$

$$H_0 J_\varepsilon \tilde{H}_0 = J_\varepsilon .$$

Because of (60) we have the Jacobi transform

$$H_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & A_0^{-1} B_0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \tag{61}$$

where $A_0 = A_0^* > 0$ and $-A_0^{-1} B_0 = X = \varepsilon \tilde{X}$. Conversely if X and Y are elements in $\bar{\mathscr{A}}_n = \mathfrak{M}_n(\bar{\mathfrak{D}})$ with $X = \varepsilon \tilde{X}$, $Y = Y^* > 0$ then the matrix

$$H_0 = \begin{pmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{Y} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & -X \\ 0 & E \end{bmatrix}, \tag{62}$$

because of (60), lies in $\mathfrak{H}$. We have thus a parametrical representation of the $\mathfrak{H}$ space. The $\mathfrak{H}$ space has the dimension

$$hn(2n - \varepsilon) + n(2hn + r_1 - r_2)$$

in case of involutions of the first kind and

$$\frac{nf}{2}(2hnf + r_1 - r_2)$$

in case of involutions of the second kind, $(K : \Gamma) = h$.

Let Q be the matrix defined in (44). Let us extend the centre by adjoining $\eta = \sqrt{-\varepsilon Q^2}$. This is an n-rowed matrix with $\sqrt{\pm\varepsilon}$ in the diagonals. Put

$$Z = X + Y Q \eta \tag{63}$$

where $X = \varepsilon\bar{X}$ and $Y = Y^* > 0$ are in $\mathscr{A}_n = \mathfrak{M}_n(\mathscr{D})$. The set of these Z we call the *generalized upper half plane* $\mathscr{E}$. If for every $H_0 \in \mathfrak{H}$ we put $Z = -A_0^{-1}B_0 + A_0^{-1}Q\eta$ then $Z \in \mathscr{E}$. On the other hand if $Z \in \mathscr{E}$ and we put H_0 equal to the right side of (62) we get an element of $\mathfrak{H}$. The mapping $H_0 \to Z$ is one-one both ways. In fact $\mathscr{E}$ is analytically homeomorphic to $\mathfrak{H}$.

Let $m \geqq n$ be an integer and S be a matrix in $\mathscr{A}_m = \mathfrak{M}_m(\mathscr{D})$ with $S = \varepsilon\bar{S}$ and non singular. Let $\mathfrak{M}$ be a modul of matrices of m rows and n columns over $\mathscr{D}$ with o_n as a right order and o_m as a left order, o_a for an integer a denoting the ring of a-rowed matrices over o. Let us assume that this modul $\mathfrak{M}$ has maximal rank namely mng. Let H be a matrix in the $\mathfrak{H}$ space of S and B an arbitrary matrix with m rows and n columns and with elements in $\bar{\mathscr{D}}$. Let $Z \in \mathscr{E} = \mathscr{E}_n$ (meaning X and Y have n rows). We define the *theta series*

$$f(S, H, Z, B, \mathfrak{M}) = \sum_{G \in \mathfrak{M}} e^{\pi i \sigma(S(G+B)X + iH[G+B]Y)} \tag{64}$$

This is the *theta series associated with* S. We shall now prove

$$|f(S, H, Z, B, \mathfrak{M})| \leqq c \prod_{k=1}^{m} (1 + N_0 h_k^{-n/2}) \prod_{l=1}^{n} (1 + N_0 y_l^{-m/2}) \tag{65}$$

where $H = (h_{kl})$, $Y = (y_{kl})$ and N_0, as usual, denotes the regular norm. $c > 0$ is a constant depending on S, B, and $\mathfrak{M}$, $H \in \mathscr{R}_0^{(m)}$ and $Y \in \mathscr{R}_0^{(n)}$.

In order to prove this we first consider the simpler series with $n = 1$

$$f_0(S, H, y, b, \mathfrak{M}_1) = \sum_{q \in \mathfrak{M}_1} e^{-\pi\sigma(H[q+b]y)}$$

where $y > 0$ is an arbitrary positive element of $\mathscr{R}_0^{(1)}$, b an arbitrary m rowed column over $\bar{\mathscr{D}}$, and $\mathfrak{M}_1$ a modul of m rowed columns with o_m and o_1 as left and right orders and with rank mg. Let $q_1, \ldots, q_{mg}$ be a basis of the modul $\mathfrak{M}_1$ over the ring of rational integers so that every q in $\mathfrak{M}_1$ has the form $q = \sum_{k=1}^{mg} a_k q_k$, a_k rational integers. This means

$$\sigma(H[q + b]y) \geqq c_1 \sum_{k=1}^{mg} a_k^2 \sigma(H[q_k]y) .$$

Using the wellknown inequality for ordinary theta series, we obtain

$$f_0(S, H, y, b, \mathfrak{M}_1) \leqq c_2 \prod_{k=1}^{mg} (1 + \sigma(H[q_k]y)^{-1/2}) . \tag{66}$$

Let $q_k = \begin{pmatrix} q_{k1} \\ \vdots \\ q_{km} \end{pmatrix}$ with q_{kl} in $\bar{\mathscr{D}}$. These are finitely many and fixed. If $H = (h_{kl})$ then

$$\sigma(H[q_k]y) \geqq c_3 \sum_{l=1}^{m} \sigma(h_k[q_{kl}]y)$$

using (66) and the arithmetic-geometric inequality, we obtain

$$f_0(S, H, y, b, \mathfrak{M}_1) \leqq c_4 \prod_{k=1}^{m} (1 + N_0 h_k^{-1/2}) (1 + N_0 y^{-m/2}) .$$

Here c_1, c_2, c_3, c_4 are constants depending on $\mathfrak{M}$, S and b.

From this it is easy to obtain (65); for, we have only to consider H and Y as diagonal matrices.

Let us now assume that all the elements of B are *in* $\mathscr{D}$. Consider the units U of S with $UB - B \in \mathfrak{M}$. They form a group which is of finite index in $\Gamma(S)$. This is seen as follows. Denote this group by $\Gamma_B(S)$. Let p be a rational integer such that $pB \in \mathfrak{M}$ and consider the units U of S with $U \equiv E \pmod{p\mathfrak{o}_m}$. Then $UB - B \in \mathfrak{M}$. These units form a subgroup of finite index in $\Gamma(S)$ and are contained in $\Gamma_B(S)$. There exists therefore a fundamental domain for $\Gamma_B(S)$ in $\mathfrak{H}$. Clearly

$$f(S, H[U], Z, B, \mathfrak{M}) = f(S, H, Z, B, \mathfrak{M})$$

for $U \in \Gamma_B(S)$. Therefore there is meaning in considering the integral

$$\int_{\mathscr{F}_B} f(S, H, Z, B, \mathfrak{M})\, d\omega_0$$

with the volume element $d\omega_0$ in the $\mathfrak{H}$ space. The following theorem is of importance for the analytic theory of quadratic forms over division algebras and for the study of the Zeta functions.

Theorem 8. $\int_{\mathscr{F}_B} f(S, H, Z, B, \mathfrak{M})\, d\omega$ *is convergent and equals*

$$\sum_G \int_{\mathscr{F}_B} e^{\pi i \sigma(S\{G+B\}X + iH[G+B]Y)}\, d\omega$$

provided $m > 2n - \varepsilon$ *if the involution is of the first kind and* $m > 2n$ *if the involution is of the second kind. If however* $S\{x\}$ *is not a zero form this holds even with* $m > \frac{2n-\varepsilon}{2}$ *and* $m > n$ *respectively when* $n = 1$.

Proof. Because of the absolute convergence of the series defined by $f(S, H, \ldots)$, the invariance of the volume measure $d\omega$ under the transformations $S \to S\{L\}$, $H \to H[L]$, L any non singular matrix in $\mathscr{A}_m$, and the finiteness of the number of classes of S, it is enough to prove from (65) the convergence of

$$c_1 \int_{R_c} \prod_{k=1}^{m} (1 + N_0 h_k^{-n/2})\, d\omega \tag{67}$$

where c_1 and c are two constants dependi.., on m, D, $N_0 S$ and n and $\mathscr{R}_c$ is the Siegel domain defined in § 5. If the integral (67) is convergent under the conditions stated in the theorem, it follows from the propertes of $\mathscr{R}_c$ that $\int_{\mathscr{F}_B} f(S, H, \ldots)\, d\omega$ converges uniformly in every compact subset of $\mathscr{F}_B$ which proves that integration and summation can be interchanged.

We shall now prove that the integral (67) converges under the conditions of the theorem. There is no loss in generality if we assume that the elements of S are in $\mathfrak{o}$.

The constants $c_2, c_3, \ldots$ below depend only on $c_1, c, m, \mathscr{D}, N_0 S, n$ and $\mathfrak{M}$.

From (35) it follows that we can write $H = F^* F$ and $S = \bar{F} D_1 F$ where $F \in \mathscr{A}$ and D_1 a diagonal matrix depending only on $\mathscr{D}$ and S. If $D_1 = [d_1, \ldots, d_m]$,

then

$$h_{kl} = \sum_t f_{tk}^* f_{tl}, \quad F = (f_{kl})$$
$$s_{kl} = \sum_t f_{tk}^* d_t f_{tl}.$$

This gives

$$\operatorname{abs} s_{kl} \leqq c_2 \sum_t \operatorname{abs} f_{tk} \operatorname{abs} f_{tl} \leqq c_3 \Big(\sum_t \sigma(f_{tk}^* f_{tk})\Big)^{1/2} \Big(\sum_t \sigma(f_{tl}^* f_{tl})\Big)^{1/2}$$

we have therefore

$$(68) \qquad 0 \leqq \operatorname{abs} s_{kl} \leqq c_3 (\sigma(h_k)\, \sigma(h_l))^{1/2}.$$

Since S is non-singular and its elements are in o, there exists for each k, l_k such that $s_{k l_k} \neq 0$ and so

$$(69) \qquad 1 \leqq \operatorname{abs} s_{k l_k} \leqq c_3 (\sigma(h_k)\, \sigma(h_{l_k}))^{1/2}.$$

If we write H as

$$H = \begin{pmatrix} H^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & H^{(a)} \end{pmatrix}$$

in the notation of § 6 and write $h_k^{(a)}$ as the k-th diagonal element of $H^{(a)}$ then $h_k^{(a)} = (h_{kpq}^{(a)})$ is a matrix of f or $2f$ rows, $f^2 = (\mathscr{D} : \mathscr{K})$. Denoting the diagonal elements of this by $h_{kp}^{(a)}$ we see that for fixed k they are all of the same order of magnitude. Thus from (69) we get

$$h_{kp}^{(a)} h_{l_k p}^{(a)} \geqq c_4.$$

Consider now the integers $1, 2, \ldots, k$ and $l_1, \ldots, l_k$. Of the latter at least one is $\leqq m - k + 1$. Hence

$$h_{kp}^{(a)} h_{m-k+1,p}^{(a)} \geqq c_5$$

for all k, p, a. Suppose for each a there is a g_a, $0 \leqq g_a \leqq \dfrac{m}{2}$ with

$$(70) \qquad \begin{cases} h_{kp}^{(a)} h_{m-k,p}^{(a)} \geqq c_7, & g_a < k < m - g_a \\ h_{g_a p}^{(a)} h_{m-g_a,p}^{(a)} < c_7 \end{cases}$$

for a c_7 to be chosen presently. Now $\sigma(h_k) \leqq c_6 h_{kp}^{(a)}$ and so

$$\sigma(h_{g_a})\, \sigma(h_{m-g_a}) \leqq c_6^2 h_{g_a p}^{(a)} h_{m-g_a p}^{(a)}.$$

From (70) we get

$$\sigma(h_{g_a})\, \sigma(h_{m-g_a}) < c_6^2 c_7$$

using (69) we get

$$0 \leqq \operatorname{abs} s_{g_a, m-g_a} < c_3 c_6 c_7^{1/2}.$$

Choose now c_7 so that $c_3 c_6 c_7^{1/2} < g^{1/g}$. Then

$$0 \leqq \operatorname{abs} s_{g_a, m-g_a} < g^{1/2g}.$$

But if $s_{kl} \neq 0$ is in o then $(\operatorname{abs} s_{kl})^2 \geqq g$. Thus $s_{g_a m-g_a} = 0$. From the fact that $H \in \mathscr{R}_c$ and the inequality (69) we get

$$(71) \qquad s_{kl}^{(a)} = 0,\ k \leqq g_a,\ l \leqq m - g_a.$$

We therefore obtain a decomposition of $S^{(a)}$ given in (48). We obtain, as in [8]

$$h_{kp}^{(a)} \leqq c_8 \quad k \leqq g_a$$
$$h_{kp}^{(a)}, (h_{kp}^{(a)})^{-1} \leqq c_8 \quad g_a < k < m - g_a . \tag{72}$$

We now consider the integral in (67) and insert for $d\omega$ the expressions in (54) and (55). Because of (72) the elements of $H_2^{(k)}, \widetilde{H_2^{(k)}}, A_2^{(k)}, L_1^{(k)}, \widetilde{L_1^{(k)}}$ are all bounded by c_9 in absolute value.

Let the involution be of the first kind. Because of the remarks above, it is enough to prove the convergence of

$$\int \prod_{k=1}^{m} (1 + N_0 h_k^{-n/2}) \prod_{k=1}^{r_1+r_2+r_3} |H_1^{(k)}|^{\lambda_k} \, dv_1 \tag{73}$$

over the domain in $\mathscr{R}_c$ in which (72) is satisfied. We now observe that the matrices $H_1^{(k)}$ are real, complex or quaternion matrices. Further each element of $H_1^{(k)}$ is a 2-rowed real or complex matrix if $k \leqq r_1 + r_2$, and is just a real quaternion if $k > r_1 + r_2$ and all of these being given by their regular representations. Since the elements in the diagonal for any diagonal element of $H_1^{(k)}$ are all of the same order of magnitude we see that for proving the convergence of (73) it is enough to prove the convergence of

$$\int \prod_{k=1}^{r_1+r_2+r_3} \prod_{l=1}^{g_k} (t_l^{(k)\mu_{kl}} \, dt_l^{(k)})$$

where

$$0 < t_l^{(k)} \leqq c_{10} t_{l+1}^{(k)}$$

for all l and k and

$$\mu_{kl} = \begin{cases} 4m - 4n - 8l + 2\varepsilon + 3, & r_1 < k \leqq r_1 + r_2 \\ 2m - 2n - 4l + 1 \ + \varepsilon & \text{otherwise} . \end{cases}$$

If we introduce new variables $s_l^{(k)}$ with

$$t_l^{(k)} = s_l^{(k)} s_{l+1}^{(k)} \ldots s_{g_k}^{(k)}, \; l = 1, \ldots, g_k$$

for every k, then for proving our theorem, it is enough to prove the convergence of integrals of the type

$$\int \prod_{l=1}^{g_k} s_l^{(k)\nu_{kl}} \frac{ds_1^{(k)} \ldots ds_{g_k}^{(k)}}{s_1^{(k)} \ldots s_{g_k}^{(k)}} \tag{74}$$

where the integration is over

$$0 \leqq s_l^{(k)} \leqq c_{11}$$

and the ν_{kl} are given by

$$\nu_{kl} = \begin{cases} 2l(2m - 2n - 2l + \varepsilon), & r_1 < k \leqq r_1 + r_2 \\ (2m - 2n - 2l + \varepsilon) & \text{otherwise} . \end{cases}$$

For convergence $\nu_{kl} > 0$. Thus it is enough that

$$\nu_{kl} \geqq 2m - 2n - 2l + \varepsilon \geqq 2m - 2n - 2g_k + \varepsilon > 0 .$$

Because $g_k \leqq \frac{m}{2}$, it means that $m > 2n - \varepsilon$ provided at least one $g_k \neq 0$. If however $S\{x\}$ is not a zero form which means that all $g_k = 0$, then $m > \frac{2n-\varepsilon}{2}$.

In the case of involutions of the second kind one proceeds in exactly the same way and obtains integrals of the type (74) with

$$\nu_{kl} = \begin{cases} lf^2(m-n-l), & r_1 < l \leqq r_1 + r_2 + r_3 \\ \frac{lf^2}{2}(m-n-l) & \text{otherwise}. \end{cases}$$

This means that $\nu_{kl} \geqq \frac{lf^2}{2}(m - n - g_k) > 0$. Thus $m > 2n$ if at least one $g_k \neq 0$. If $S\{x\}$ is not a zero form then all $g_k = 0$ and then $m > n$ suffices.

Our theorem is completely proved.

We deduce

Corollary. $\int\limits_{\mathfrak{F}_B} d\omega$ converges for $m \geqq 1$.

This is proved at once by putting $n = 0$ and taking $f(s, \ldots) = 1$.

We remark that if $S\{x\}$ is not a zero form, all g_k are zero. Inequalities (72) mean that all the $h_{kp}^{(a)}$ are bounded. This means that *the fundamental region is compact*. One can establish the converse also.

In order to study later the zeta function of quadratic forms we prove the following theorem.

Let $\mathfrak{D}$ be the involutorial algebra considered in this section and let $\mathfrak{G}$ be a fundamental region in the space of positive elements of $\overline{\mathfrak{D}}$ for the units of o. This space is again a symmetric riemannian space with the metric $ds^2 = \sigma(\xi^{-1}d\xi\,\xi^{-1}d\xi)$. Let $[d\xi]$ be the invariant volume element under this metric. Let s be a complex variable $s = \sigma + it$. We have

Theorem 9. *For* $\sigma > \frac{m}{2}$ *the integral* $\int\limits_{\mathfrak{G}} (N_0\xi)^s \int\limits_{\mathfrak{F}_B} (a + f_0(S, H, \xi, b, \mathfrak{M}_1))\, d\omega\, [d\xi]$ *defines an analytic function of* s, $f_0(S, H, \ldots)$ *being the function*

$$f_0(S, H, \xi, b, \mathfrak{M}_1) = \sum_{g \in \mathfrak{M}_1,\, S(g+b) \neq 0} e^{\pi i \sigma(S[g+b]\zeta + iH[g+b]\xi)}$$

$\zeta \in \overline{\mathfrak{D}}$ *with* $\xi = \varepsilon\zeta$, $a = -1$ *if* $b = 0$ *and* $= 0$ *otherwise.*

Proof. Split $\mathfrak{G}$ up into $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$ where $\mathfrak{G}_1$ is that part of $\mathfrak{G}$ with $N_0\xi \geqq 1$ and $\mathfrak{G}_2$ with $N_0\xi \leqq 1$. If we use (65) with $n = 1$ we see that

$$\int\limits_{\mathfrak{G}_1} (N_0\xi)^\sigma \int\limits_{\mathfrak{F}_B} (f_0)\, d\omega\, [d\xi] \leqq \int\limits_{\mathfrak{G}_1} (N_0\xi)^{\sigma - m/2} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathfrak{F}_B} \left\{ a + \prod_{k=1}^{m} (1 + N_0 h_k^{-1/2}) \right\} d\omega\, [d\xi].$$

From theorem 8 and corollary, the inside integral is finite and we have only to consider

$$\int\limits_{\mathfrak{G}_1} (N_0\xi)^{\sigma - m/2} [d\xi].$$

But going over to the norm surface one sees that it converges if $\sigma > \frac{m}{2}$. (Note that the norm surfaces intersection with $\mathfrak{G}_2$ is a compact set from theorem 3 corollary.)

The second integral $\int\limits_{\mathfrak{G}_1} (N\xi)^s \int\limits_{\mathfrak{F}_\theta} (a + f_0)\, d\omega [d\xi]$ actually defines an entire function.

§ 9. Units in *p*-adic algebras

Let k be a p-adic field, that is a discretely valued complete field of characteristic zero with finite residue field. Let o be the ring of integers in k and π a generator of the prime ideal in o. Let p be the characteristic of the residue field and $po = (\pi^{e_0})$, $e_0 \geqq 1$. Let $\mathfrak{D}$ be a division algebra with k as centre Π the maximal order in $\mathfrak{D}$ relative to o and Π a generator of the unique two sided prime ideal in D. Let $(\pi) = (\Pi^e)$, $e \geqq 1$. Let $q = \left[\frac{ee_0}{p-1}\right]$, $q \geqq 0$. Let $\mathscr{A}_n = \mathfrak{M}_n(\mathfrak{D})$ be the algebra of n-rowed square matrices over $\mathfrak{D}$. Denote by O_n the maximal order in $\mathscr{A}_n$ consisting of matrices with elements in O. A unit of O_n is a matrix α of n rows with elements in O whose inverse α^{-1} also has the same property. The units of O_n form a group $\Gamma(O_n)$. If we endow o and O with the usual topology, namely the one in which a fundamental system of neighbourhoods of the zero element are given by powers of the maximal ideal, then o, O and O_n are compact topological rings. $\Gamma(O_n)$ then is a compact topological group.

Let G be a subgroup of $\Gamma(O_n)$. For any rational integer $m \geqq 0$ let us denote by G_m the group of matrices α in G with

$$\alpha \equiv 1 \; (\mathrm{mod}\, \Pi^m)\,.$$

1 is the unit matrix in O_n and the above congruence means that the elements of the matrices $\Pi^{-m}(\alpha - 1)$ and $(\alpha - 1)\Pi^{-m}$ are in O. Clearly G_m is a normal subgroup of G and G/G_m is finite since the residue field is finite.

Let $m \geqq 1$ and $\alpha \in G_m$. Then $\alpha = 1 + \Pi^m v$ where $v \in O_n$. Now

$$\alpha^p = 1 + p\,\Pi^m v + \binom{p}{2} (\Pi^m v)^2 + \cdots + (\Pi^m v)^p\,.$$

$(\Pi^m v)^l = \Pi^{ml} v_l$ for some $v_l \in O_n$. Also since $\binom{p}{l} \equiv 0 \pmod p$ for $1 < l < p$ we see that

$$\binom{p}{l} (\Pi^m v)^l \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, \Pi^{ml + ee_0})\,.$$

Let $p = u\Pi^{ee_0}$ for some unit $u \in O$ and let $m > q = \left[\frac{ee_0}{p-1}\right]$. Then $mp = m + m(p-1) > m + q(p-1) \geqq m + ee_0$. Thus

$$\alpha^p \equiv 1 + u\Pi^{m + ee_0} v \; (\mathrm{mod}\, \Pi^{m + ee_0 + 1})\,.$$

Thus $\alpha^p \in G_{m + ee_0}$. It is again clear that if $\alpha \in G_m$ but not in G_{m+1} then $v \not\equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, \Pi)$ and since u is a unit, $\alpha^p \notin G_{m + ee_0 + 1}$.

Let now α_1 and α_2 be elements of G_m but not G_{m+1}, $m > q$ as before. Then α_1^p and α_2^p are in $G_{m + ee_0}$ but not in $G_{m + ee_0 + 1}$. Suppose however that

$$\alpha_1^p \equiv \alpha_2^p \; (\mathrm{mod}\, \Pi^{m + ee_0 + 1}) \tag{75}$$

which means $\alpha_1^p \alpha_2^{-p}$ is an element of $G_{m + ee_0 + 1}$. Put $\alpha_i = 1 + \Pi^m v_i$ $v_i \not\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\, \Pi)$, $i = 1, 2$. Then (75) gives

$$u\Pi^{m + ee_0}(v_1 - v_2) \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, \Pi^{m + ee_0 + 1})$$

since u is a unit, it follows that $v_1 \equiv v_2 \pmod{\Pi}$ which means that $\alpha_1\alpha_2^{-1} \in G_{m+1}$. We therefore see that if $m > q$, the mapping $\alpha \to \alpha^p$ of G_m/G_{m+1} into G_{m+ee_0}/G_{m+ee_0+1} is an *isomorphism into*.

Let $\alpha = 1 + \Pi^m v$, $v \not\equiv 0 \pmod{\Pi}$ so that α defines an element of G_m/G_{m+1} different from the identity. Then $\alpha^{-1} = 1 - \Pi^m v \pmod{\Pi^{m+1}}$. Let now $\alpha_1, \alpha_2 \in G_m$. Then by above remark

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1} \equiv 1 \pmod{\Pi^{m+1}}$$

which shows that G_m/G_{m+1} is an abelian group. Also if $m > q$ this shows that G_m/G_{m+1} is an abelian group of type $(p, p, \ldots)$. We have therefore the

Theorem 10. *Let G be a subgroup of $\Gamma(O_n)$. For all $m > q$, where q is a fixed integer independent of G and n, the groups G_m/G_{m+1} are abelian of type $(p, p, \ldots)$ and are isomorphic to a subgroup of G_{m+ee_0}/G_{m+ee_0+1}.*

We shall call a subgroup G of $\Gamma(O_n)$ a *J-group* if for *all large m, G_m/G_{m+1} is isomorphic to G_{m+ee_0}/G_{m+ee_0+1}.*

Theorem 10 shows that for G to be a *J-group* it is enough that for all large m (certainly $>q$), G_m/G_{m+1} and G_{m+ee_0}/G_{m+ee_0+1} have the same order.

We shall now prove the

Theorem 11. *A J-group G is topologically finitely generated in the sense that there exist finitely many elements $v_1, \ldots, v_\mu$ of G such that every element of G can be written as a convergent product (in the topology of $\Gamma(O_n)$) of $v_1, \ldots, v_\mu$ and their powers.*

Proof. Since G/G_m is a finite group for every m, G_m is also a J-group. (In fact every subgroup H of G of finite index in G is also a J-group.) It is therefore enough to prove theorem for some G_m. G being a J-group there exists n_0 such that for all $n > n_0$, G_n/G_{n-1} and G_{n+ee_0}/G_{n+ee_0+1} are isomorphic. Let m be an integer $m > \max(n_0, q)$. We shall prove the theorem for G_m. Let $\{v_{kl}\}$, $l = 1, \ldots, t_k$; $k = 0, 1, \ldots, ee_0 - 1$ be a set of generators of G_{m+k}/G_{m+k+1}. Then every α in G_m can be written as

$$\alpha \equiv \prod_{k=0}^{ee_0-1}\left(\prod_{l=1}^{t_k} v_{kl}^{\lambda_{kl}}\right) \pmod{\Pi^{m+ee_0}} \tag{76}$$

where $0 \leqq \lambda_{kl} < p$ are integers mod p. Denote the right side of (76) by α_1. Then $\alpha_1^{-1}\alpha \equiv 1 \pmod{\Pi^{m+ee_0}}$. By theorem 10 and the fact that G_m is a J-group it follows that $v_{01}^p, \ldots, v_{0t_1}^p$ form a set of generators of G_{m+ee_0}/G_{m+ee_0+1}. Hence

$$\alpha_1^{-1}\alpha \equiv \prod_{k=0}^{ee_0-1}\left(\prod_{l=1}^{t_k} v_{kl}^{p\mu_{kl}}\right) \pmod{\Pi^{m+2ee_0}}.$$

If the right side of the above congruence is α_2, then $\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha \equiv 1 \pmod{\Pi^{m+2ee_0}}$. Repeating this we find

$$\alpha_r^{-1}\alpha_{r-1}^{-1}\ldots\alpha_1^{-1}\alpha \equiv \prod_{k=0}^{ee_0-1}\left(\prod_{l=1}^{t_k} v_{kl}^{p^r\nu_{kl}}\right) = \alpha_{r+1} \pmod{\Pi^{m+(r+1)ee_0}}.$$

Clearly $\alpha_{r+1} \to 1$ as $r \to \infty$, 1 being unit element of G. Thus

$$\alpha = \lim_{r\to\infty} \alpha_1 \ldots \alpha_r.$$

This proves the theorem.

It is possible to introduce the notion of J-group even in the additive group O_n.

We now prove the

Theorem 12. *The group $\Gamma(O_n)$ of units of O_n is a J-group and hence is topologically finitely generated.*

Proof. According to theorem 11 it is enough to show that for all large m the mapping $\alpha \to \alpha^p$ of G_m/G_{m+1} into G_{m+ee_0}/G_{m+ee_0+1} is actually *onto*. Here $G = \Gamma(O_n)$.

Let $m > q = \left[\frac{ee_0}{p-1}\right]$. Let

$$\alpha \equiv 1 + \Pi^{m+ee_0}v (\mathrm{mod}\, \Pi^{m+ee_0+1})$$

$v \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, \Pi)$ be an element of G_{m+ee_0}. Let as before $p = u\Pi^{ee_0}$, u being a unit in O. Let $u\Pi^{m+ee_0} = \Pi^{m+ee_0}u_1$, for a unit u_1 in O. Put

$$\beta \equiv 1 + \Pi^m u_1^{-1} v (\mathrm{mod}\, \Pi^{m+1}) .$$

Then β is an element of G_m but not of G_{m+1}. Also

$$\begin{aligned}\beta^p &\equiv 1 + p\Pi^m u_1^{-1} v (\mathrm{mod}\, \Pi^{m+ee_0+1}) \\ &\equiv 1 + u\Pi^{m+ee_0}u_1^{-1}v = \alpha (\mathrm{mod}\, \Pi^{m+ee_0+1}) .\end{aligned}$$

This means that every $\alpha \in G_{m+ee_0}/G_{m+ee_0+1}$ is β^p for some β in G_m/G_{m+1}. Our theorem is completely proved.

Theorem 11 was first proved by O. F. G. Schilling [12]. It is the analogue, for p-adic algebras, of Siegel's generalization of Dirichlet's unit theorem given in § 5. We shall now obtain a p-adic analogue of Theorem 6.

Let $\mathfrak{D}$ be an involutorial division algebra over k. Let k be the fixed field of the involution. By the results of Albert and Jacobson either $\mathfrak{D} = k$ or a quaternion division algebra over k if the involution is of the first kind and $\mathfrak{D} = k(\sqrt{\lambda})$ is a quadratic extension of k if the involution is of the second kind. Let $S = \varepsilon\tilde{S}$, $\varepsilon = \pm 1$ be a non singular element of $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{D})$, $x \to \bar{x}$ being the involution in $\mathfrak{D}$. As before let O_n be the maximal order in $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{D})$ extending the maximal order in $\mathfrak{D}$. Let $\Gamma(S)$ be the group of units of S, that is the group of matrices $U \in O_n$ with $\tilde{U}SU = S$. $\Gamma(S)$ is a subgroup of $\Gamma(O_n)$ defined before. We shall prove

Theorem 13. *$\Gamma(S)$ is a J-group and is topologically finitely generated.*

Proof. Let $N_0(2S)$ denote the regular norm over k. Let for any integer $m > 0$, $A_m(S)$ denote the number of incongruent solutions of the congruence

$$\tilde{U}SU \equiv S (\mathrm{mod}\, \Pi^m)$$

U integral in O_n. Let Π^b be the highest power of Π dividing $N_0(2S)$ and let $a > 2b$. Let $\tilde{U}SU = S (\mathrm{mod}\, \Pi^a)$ for some integral U and let $U_1 = U + Y\Pi^{a-b}$ be a solution of $\tilde{U}_1 S U_1 \equiv S (\mathrm{mod}\, \Pi^{a+1})$. Then one has

$$S - \tilde{U}SU \equiv \tilde{\Pi}^{a-b}\tilde{Y}SU + \varepsilon\tilde{U}SY\Pi^{a-b} (\mathrm{mod}\, \Pi^{a+1}) .$$

Since the elementary divisor theorem holds in O_n one can proceed, as in Siegel [17] and show that

$$A_{a+1}(S) = cA_a(S) \tag{77}$$

where c is given by

$$c = \begin{cases} (N_0 \Pi)^{n(n-\varepsilon)/2} & \mathfrak{D} = k \\ (N_0 \Pi)^{n(2n+\varepsilon)} & \mathfrak{D} \neq k \\ (N_0 \Pi)^{n^2} & \mathfrak{D} = k(\sqrt{\lambda}) \,. \end{cases}$$

Here n is even if $\varepsilon = -1$ and $\mathfrak{D} = k$. We see that given $m > 2b$ and any solution U_m of $\tilde{U}_m S U_m \equiv S(\bmod \Pi^m)$, there exists $U_{m+1} \equiv U_m(\bmod \Pi^{m-b})$ with

$$\tilde{U}_{m+1} S U_{m+1} \equiv S(\bmod \Pi^{m+1}) \,.$$

If $n_0 > m$ then $U_{n_0} = (U_{n_0} - U_{n_0-1}) + (U_{n_0-1} - U_{n_0-2}) + \cdots + (U_{m+1} - U_m) + U_m$. This shows that $\lim\limits_{m \to \infty} U_m$ is a unit of S. Therefore the order of $\Gamma(S)/\Gamma_m(S)$ is precisely $A_m(S)$. Now (77) means that $\Gamma_m(S)/\Gamma_{m+1}(S)$ for all large m is independent of m as far as its order is concerned. (In fact they are all isomorphic.) This proves that $\Gamma(S)$ is a J-group and our theorem is proved.

In certain cases it can happen that $\Gamma_m(S)/\Gamma_{m+1}(S)$ is cyclic for all $m > q$, $q \geqq 0$. In this case $\Gamma_1(S)$ is a "cyclic" group in the sense that every $\alpha \in \Gamma_1(S)$ can be written as β^λ where λ is a rational p-adic integer. For instance let k be the rational p-adic field and $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Let $p > 3$. Then $q = 0$. By theorem 13, $\Gamma_m(S)/\Gamma_{m+1}(S)$ has order p and so is cyclic. If therefore β is an element of $\Gamma_1(S)$ which generates $\Gamma_1(S)/\Gamma_2(S)$, then by the foregoing theorems it follows any $\alpha \in \Gamma_1(S)$ can be written as

$$\alpha = \beta^{\lambda_0 + \lambda_1 p + \cdots}$$

$0 \leqq \lambda_i < p$. On the other hand β^μ where μ is a p-adic integer lies in $\Gamma_1(S)$. Thus $\Gamma_1(S)$ consists of β^λ for all p-adic integers λ.

A similar thing happens when we study the units of binary quadratic forms over p-adic fields. This is related to the solution of Pell's equation in p-adic integers. We shall report about this elsewhere.

Another example of a J-group is the following. Let S and T be two non singular matrices satisfying $S = \varepsilon \tilde{S}$, $T = \varepsilon \tilde{T}$, $\varepsilon = \pm 1$ and of m and $n \leqq m$ rows respectively. Let $\tilde{C} S C = T$ be an integral (that is with elements in O) representation of T by S. Denote by $\Gamma(S, C)$ the subgroup of $\Gamma(S)$ consisting of U with $UC = C$. We have

Theorem 14. *$\Gamma(S, C)$ is a J-group.*

Proof. Let us assume that $\tilde{C} S C = T$ is a primitive representation, that is that C is a matrix which can be completed to a unimodular matrix $U = (CA)$. Then

$$(\widetilde{CA})\, S(CA) = \begin{pmatrix} T & Q \\ \tilde{Q} & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} E & T^{-1}Q \\ 0 & E \end{Bmatrix}$$

where $H = R - \tilde{Q} T^{-1} Q$. If $UC = C$ then $S\{U(CA)\} = S\{C, UA\}$. But $UA = CF + AW$ for integral F and unimodular W. Therefore

$$\begin{pmatrix} T & Q \\ \tilde{Q} & R \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} E & F \\ 0 & W \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} T & Q \\ \tilde{Q} & R \end{pmatrix}$$

which means that $H = H\{W\}$ and $T^{-1}Q = F + T^{-1}QW$. Thus W is a unit of H satisfying

$$T^{-1}Q(E - W) = F, \text{ integral}.$$

This shows that $\Gamma(S, C)$ is isomorphic to a subgroup of finite index of $\Gamma(H)$. By theorem 13 therefore $\Gamma(S, C)$ is a J-group.

If $\bar{C}SC = T$ is not a primitive representation write $C = C_1P$ where P is non singular integral and C_1 is primitive. $\Gamma(S, C) = \Gamma(S, C_1)$ and the same argument as above goes through.

One can extend this theorem to the case when T is not necessarily non singular. We then have to consider only those C which have rank n.

§ 10. The modular group

Let now $\mathfrak{D}$ be an involutorial division algebra which, unlike in the last sections, may also be a field. Let $\overline{\mathfrak{D}}$ and $\overline{\mathscr{A}} = \mathfrak{M}_n(\overline{\mathfrak{D}})$ be defined as before. If $\mathfrak{D} = k$, the matrix V_i defined in (30) has to be taken as

$$V_i = \begin{cases} 1\,, & i \leq r_1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & i > r_1 \end{cases}$$

Q is again defined as before and $\eta^2 = -\varepsilon Q^2$, $Q^4 = E$. The generalised upper half plane $\mathscr{E} = \mathscr{E}_n$ consists of matrices $Z = X + YQ\eta$ with $X = \varepsilon\hat{X}$, $Y^* = Y > 0$ in $\overline{\mathscr{A}}$. It is to be noticed that since in $\overline{\mathscr{A}}$ the two involutions $B_0 \to \bar{B}_0$ and $B_0 \to B_0^*$ are extensions of the involutions in $\overline{\mathfrak{D}}$ the matrix Q can actually be taken as a diagonal matrix each element in the diagonal being denoted by Q itself. Thus in case $n = 1$, the upper half plane $\mathscr{E}_1$ is the set of $z = x + yQ\eta$, $x = \varepsilon\tilde{x}$, $y^* = y > 0$ in $\overline{\mathfrak{D}}$. The centre $\mathscr{K}$ is represented as an algebra of ng-rowed square matrices. We may extend $\mathscr{K}$ by adjoining to it the element (matrix) $\eta = -\varepsilon Q^2$. The algebra can now be extended by this extension of the centre. Z will now be represented by the matrix

$$Z = \begin{pmatrix} X & YQ \\ YQ\eta^2 & X \end{pmatrix} \tag{78}$$

from which it follows that

$$Z' = X' + (Q'YQ^{-1}\eta^2)Q\eta\,. \tag{79}$$

By means of the matrix M of § 3 we get

$$Z^* = MZ'M^{-1}, \quad \hat{Z} = Q^{-1}Z^*Q\,. \tag{80}$$

These have to be understood only in the sense of (78). If we put $\overline{Z} = X - YQ\eta$ we obtain the formula

$$\hat{Z} = \varepsilon\overline{Z}\,. \tag{81}$$

Let $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ be a matrix satisfying

$$\hat{F}J_\varepsilon F = aJ_\varepsilon \tag{82}$$

where $a \neq 0$ is a real number. If $a = 1$, F is in $\Omega(\varepsilon)$ the orthogonal group of J_ε.

If $Z \in \mathscr{E}$ then for F satisfying (82) it can be shown that $N_0(CZ + D) \neq 0$ where the norm N_0 has to be taken with representation (78) for Z in the extended algebra. For, it is clear that one has only to prove $N_0(CZ + D) \neq 0$ in case $N_0 C \neq 0$. In this case we are reduced to showing that $N_0(Z + T) \neq 0$ for $T = \varepsilon \tilde{T}$ in $\mathscr{A}$. Thus we have to show that $N_0 Z \neq 0$ for $Z \in \mathscr{E}_n$. This follows from the expression (78) for Z. The set of matrices (82) can be represented in the space $\mathscr{E}_n$ by means of the linear transformation

$$Z \to (AZ + B)(CZ + D)^{-1}. \tag{83}$$

If $Z_1 = F\langle Z\rangle = X_1 + Y_1 Q\eta = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ with F satisfying (82) then we deduce from the fact that $Y = \frac{1}{2}(Z - \bar{Z})Q^{-1}\eta^{-1}$ the equation

$$Y_1^{-1} = a^{-1} Y^{-1}[\tilde{Z}\tilde{C} + \tilde{D}] \tag{84}$$

which can also be written as

$$Y_1^{-1} = a^{-1}(Y^{-1}[\varepsilon X\tilde{C} + \tilde{D}] + \widetilde{Y[C^*]}). \tag{85}$$

Let o be an order in $\mathscr{D}$ and o_n, o_{2n} the extended orders in $\mathscr{D}_n = \mathfrak{M}_n(\mathscr{D})$ and $\mathscr{D}_{2n} = \mathfrak{M}_{2n}(\mathscr{D})$. The group $\mathscr{M}_n$ of matrices F in o_{2n} satisfying

$$\tilde{F} J_\varepsilon F = J_\varepsilon \tag{86}$$

is called the *modular group of degree n* over $\mathscr{D}$. If $n = 1$, it is called the modular group over $\mathscr{D}$. From § 8 it follows that $\mathscr{M}_n$ is a discréte subgroup of the orthogonal group $\Omega(\varepsilon)$ of J_ε.

Two n-rowed matrices C and D with elements in D are said to be a *symmetric pair* if

$$C\tilde{D} = \varepsilon D\tilde{C} \tag{87}$$

and the matrix (CD) of n rows and $2n$ columns has the maximum rank. If C, D have elements in o we call C, D an *integral pair*. It is not hard to see that every integral pair (CD) can be completed to an integral matrix $F = \begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix}$ satisfying (82). We say that two integral pairs $(C_1 D_1)$ and $(C_2 D_2)$ are *equivalent* if there exists a non singular P in $\mathscr{D}$ and a modular matrix F such that

$$P(C_1 D_1) = (C_2 D_2) F$$

one can prove, by using methods similar to [2] and [6] that there exist only finitely many inequivalent classes of integral pairs.

Let now Z be an element of $\mathscr{E}$ and let (CD) run through all integral pairs (CD). The function $f(Y) = N_0(Y^{-1}[\varepsilon X\tilde{C} + \tilde{D}] + Y[Q\tilde{C}])$ then attains a minimum. To prove this put

$$Y_1 = Y^{-1}[\varepsilon X\tilde{C} + \tilde{D}] + Y[Q\tilde{C}].$$

There exists a rational integer t such that $t\tilde{A}$ is integral for every integral A. Choose A such that $Y_1[A]$ is in $\mathscr{R}_0$. From theorem 2, $N_0 A$ is bounded. If we take $t\tilde{A}(CD)$ instead of (CD) we see that in the above equation we have $t^2 Y_1[A] \in \mathscr{R}_0$. So it is enough to prove our statement under the assumption that $Y_1 \in \mathscr{R}_0$.

Let c_l and d_l be respectively the l-th columns of $\tilde{C}$ and $\hat{D}$. Then

$$a_l = Y^{-1}[\varepsilon X c_l + d_l] + Y[Qc_l] \tag{88}$$

where a_l is the l-th diagonal element of Y_1. Since Y is fixed there exists μ_1 depending only on Y such that

$$0 < \mu_1 \leq \sigma(a_1)\,.$$

Also for μ_2 depending on n and the algebra $\mathcal{D}$, $0 < \sigma(a_l) \leq \mu_2\,\sigma(a_{l+1})$. Let μ be a large real number so that $N_0 Y_1 < \mu$. We then have

$$\mu_1^n \leq \sigma(a_1)\cdots\sigma(a_n) \leq \mu_3$$

μ_3 depending on μ and μ_1. Therefore

$$\sigma(a_l) \leq \mu_4$$

for all l. From (88) we have

$$\sigma(Y^{-1}[\varepsilon X c_l + d_l]) \leq \mu_4, \; \sigma(Y[Qc_l]) \leq \mu_4\,.$$

Since c_l and d_l have bounded denominators and $Y > 0$, it follows that there are only finitely many c_l and d_l satisfying the above inequalities.

Let $(C_1 D_1), \ldots, (C_\lambda D_\lambda)$ be a complete set of representatives of classes of integral pairs. Complete $(C_j D_j)$ to a matrix

$$F_j = \begin{pmatrix} * & * \\ C_j & D_j \end{pmatrix}$$

satisfying (82) with rational integral a_i which is chosen to be positive and smallest. Consider the complex of matrices

$$\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{\lambda} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \tilde{U}^{-1} \end{pmatrix} F_i M \tag{89}$$

where U runs through all unimodular matrices in O_n, M through all modular matrices in $\mathcal{M}_n$. What we have seen above amounts to the following: Given $Z \in \mathcal{S}$ there exists a matrix F in the complex $\mathcal{K}$ such that if $Z_F = F\langle Z\rangle = X_F + Y_F Q\eta$ then 1) $N_0 Y_F^{-1}$ is minimum and Y_F is in the reduced space $\mathcal{R}$ of § 5. Let t be a rational integer such that for all matrices $A_1, \ldots, A_\mu$ of § 4, tA^{-1}, $t\tilde{A}$, $t\tilde{A}^{-1}$ are integral matrices. Consider the complex of matrices

$$\mathcal{K}_0 = \bigcup_{i=1}^{\mu} \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & t\tilde{A}_i^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{K}\,. \tag{90}$$

We can transform Z_F by $\begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & t\tilde{A}_i^{-1} \end{pmatrix}$ where A_i is so chosen that $Y_F[A_i]$ is in the Siegel domain $\mathcal{R}_0$. Let us denote the set of points obtained in this way by $\mathcal{F}_0$. Then $\mathcal{F}_0$ has the following properties: If $Z = X + YQ\eta \in \mathcal{F}_0$ then 1) $Y \in \mathcal{R}_0$ and 2) there exists an integral matrix A belonging to the finite set of theorem 2 such that if $Z_1 = tA^{-1}Z\tilde{A}^{-1}$ then for *every* integral pair (CD)

$$N_0(\tilde{Z}_1\tilde{C} + \hat{D})^*(\tilde{Z}_1\tilde{C} + \hat{D}) \geq 1\,. \tag{91}$$

Restoring the value of Z_1 and using the fact that the matrices A are finite in number and independent of Z we see that for $Z \in \mathcal{F}_0$ and for every symmetric

pair (CD) with $(CD)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & t\tilde{A}^{-1}\end{pmatrix}$ integral

$$N_0(\bar{Z}\bar{C} + \bar{D})(CZ + D) \geqq c_0 \tag{92}$$

where c_0 is a constant depending on the division algebra $\mathfrak{D}$ and the integer n.

We shall consider the point set $\mathfrak{F}_0$ more closely. Since (92) holds for every integral pair (CD) we may choose

$$C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & E_{n-1}\end{pmatrix}$$

where c and d are in o with $c\tilde{\bar{d}} = \varepsilon\, d\bar{c}$. Let the first diagonal element of Z be $x + yQ\eta$ where, as everywhere Q and η of (44) and (63) are considered as diagonal matrices with Q and η in the diagonals respectively. We then get from (92), using (85),

$$c_0 N_0 y^{-1} \leqq N_0(y^{-1}[\varepsilon x\bar{c} + \tilde{\bar{d}}] + y[Q\bar{c}])\,. \tag{93}$$

Let us first consider the case where $\mathfrak{D}$ is not a field with one infinite prime spot or a definite quaternion algebra with Γ as centre. In this case y will be a matrix all of whose characteristic roots, since $y \in \mathfrak{R}_0$, will be of the same order of magnitude. Put $c = 1$. Then $d = \varepsilon\tilde{\bar{d}}$. Let $\delta_1, \ldots, \delta_g$ be a minimal base of o over the rational integers then

$$\varepsilon x = \sum_i x_i \delta_i\,, \quad x_i \text{ real}$$

$$d = \sum_i d_i \delta_i\,, \quad d_i \text{ rational integers}\,.$$

Choose now d_i so that $|x_i + d_i| \leqq \frac{1}{2}$ for all i. If ω_0 is the smallest and ω the largest eigenvalue of y then from (93) we get, with c, d as above

$$c_0 N_0 y^{-1} \leqq \omega_0^{-g}\,(\sigma[\varepsilon x + \tilde{\bar{d}}])^g + \omega^g\,\sigma([Q])^g.$$

But ω_0 and ω are of the same order of magnitude and the quantities inside the brackets are majorised by quantities independent of Z. This means

$$N_0 y > c_1\,.$$

Since y is the first diagonal element of Y which is in $\mathfrak{R}_0$, it follows that $Y > c_2 E$ for a constant c_2 depending only on n and $\mathfrak{D}$.

Let now $\mathfrak{D}$ be a field $\mathfrak{K}$ with one infinite prime spot so that $\mathfrak{K} = \Gamma$ or $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0$ an imaginary quadratic field over Γ. Denote by $\mathfrak{D}_0$ the definite quaternion algebra with Γ as centre. If $\mathfrak{D} = \Gamma$ or $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0$ we take $y^{-1}[\varepsilon xc + d] + y[Qc]$ as a definite quadratic form in the variables c, d which take rational integral values. If $\mathfrak{D} = \mathfrak{K}_0$ we consider $y^{-1}[\varepsilon xc + d] + y[Qc]$ as a hermitian form in the variables c, d which run through integers of k if the involution is of the second kind and over the integers of $\mathfrak{K}_0$ if the involution is of the first kind. In every case the determinant of the form is unity and by the results of MINKOWSKI and HUMBERT there exist c, d not both zero such that

$$y^{-1}[\varepsilon xc + d] + y[Qc] \leqq c_2$$

where c_2 is an absolute constant. This again proves that $Y > c_2 E$.

From the form of the complexes $\mathscr{X}_0$ and $\mathscr{X}$ it follows that there exists an integer (rational) $r > 0$ such that $\mathscr{X}$ and $\mathscr{X}_0$ are contained in the set of integral matrices F with

$$\bar{F} J_\varepsilon F = s J_\varepsilon, \quad 1 \leq s \leq r \tag{94}$$

r being an integer determined by n and the order o. We have now the following

Theorem 15. *There exists a constant $c_0 > 0$ determined by n and the order o such that for every $Z \in \mathscr{E}$ there exists an integral F satisfying (94) with $\dot{F}\langle Z\rangle = Z_0 = X_0 + Y_0 Q \eta$ having the properties*

1) $Y_0 > c_0 E$

2) $-\frac{1}{2} \leq x_{pq}^{(i)} < \frac{1}{2}$

where $X_0 = X_{01}\delta_1 + \cdots + X_{0g}\delta_g$, $X_{0i} = (x_{pq}^{(i)})$.

The construction of a fundamental region F, for $\mathscr{M}_n$ in $\mathscr{E}$ is of minor importance. If two matrices F_1, F_2 satisfying (94) are called equivalent if $F_1 = FF_2$ for $F \in \mathscr{M}_n$ then the matrices of (94) fall into a finite number of classes. Let a set of representatives be $F_1, \ldots, F_u$. One then sees that a fundamental region F is contained in the union of images of the set defined by theorem 15 by means of $F_1^{-1}, \ldots, F_u^{-1}$.

In the symmetric riemannian space $\mathscr{E}$ one has the definite metric

$$ds^2 = \sigma(\varepsilon Q^2 Y^{-1} \cdot dZ \cdot Q^{-1} Y^{-1} \cdot dZ \cdot Q^{-1}) \tag{95}$$

which is invariant under the transformations $Z \to F\langle Z\rangle$, $F \in \Omega(\varepsilon)$. We obtain

$$ds^2 = \sigma(\varepsilon Q^2 Y^{-1} \cdot dX \cdot Q^{-1} \cdot Y^{-1} \cdot dX \cdot Q^{-1}) + \sigma(Y^{-1} \cdot dY \cdot Y^{-1} \cdot dY).$$

We make a change of variables $Y \to Y^{-1}$ in $Z = X + YQ\eta$. Then $dY = -Y\,dY^{-1}\,Y$. The volume element dv in the above metric with X and Y^{-1} as parameters is, upto a constant, given by

$$dv = \left(\prod_{k=1}^{g} |Y^{(k)}|^{-\lambda_k} dX^{(k)}\right)[dY^{-1}]$$

$[dY^{-1}]$ being the volume measure in the metric $\sigma(Y \cdot dY^{-1} \cdot Y \cdot dY^{-1})$, Y and X being written in terms of the representation by the normal basis and $\lambda_k > 0$ are rational numbers except when $\mathscr{D} = k$, the involution is of the first kind, $\varepsilon = -1$ and $n = 1$ when $\lambda_k = 0$ for all k.

It is now trivial to see that

$$\int_{\mathscr{F}} dv < \infty. \tag{96}$$

It is enough, because of invariance of volume element, to prove (96) with $\mathscr{F}$ replaced by the domain of theorem 15. In this case the $X^{(k)}$ are all bounded and the integral extended over Y by theorem 4 converges if $\lambda_k > 0$. In case all $\lambda_k = 0$ it is known that the integral, for this exceptional case diverges.

We now consider the following special case which is of importance for the theory of modular functions over division algebras. *Let k be totally real and $\mathscr{K}$, if it is not equal to k, totally complex. Also $\varepsilon = 1$ if $\mathscr{D} = k$ or $\mathscr{D}$ is an involutorial algebra of the second kind. If $\mathscr{D}$ is a quaternion division algebra of the first kind then $\mathscr{D}$ is totally definite if $\varepsilon = 1$ and totally indefinite if $\varepsilon = -1$.*

1) Let $\mathcal{D} = k$ and $\varepsilon = 1$ and the involution be of the first kind. $\Omega(\varepsilon)$ is now the symplectic group over the direct sum of $h = (k : \Gamma)$ real fields. If we write Z in the representation by the normal basis, then

$$Z = \begin{pmatrix} Z^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & Z^{(h)} \end{pmatrix}, Z^{(l)} = X^{(l)} + Y^{(l)}\eta .$$

With $X^{(l)} = X^{(l)\prime}$, $Y^{(l)\prime} = Y^{(l)} > 0$. This space $\mathcal{E}$ is now the product of h Siegel upper half planes and so a Cartan space of type III. The modular group is the Hilbert-Siegel modular group.

2) Let $\mathcal{D}$ be a definite quaternion algebra over k, $\varepsilon = 1$. The symplectic group Ω is the group of quaternion matrices M over the direct sum of $h = (k : \Gamma)$ real quaternion division algebras with

$$M' J M = J , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Let us, for simplicity, take $h = 1$. Using the wellknown 2-rowed representation of real quaternions by complex matrices one sees that Ω is isomorphic to the group (product h times if $h > 1$) of complex matrices $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ with

$$\bar{M}' \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad E = E_{2n} .$$

The representation space of this group is the space of complex matrices

$$Z = \begin{pmatrix} Z^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & Z^{(h)} \end{pmatrix}$$

with $\dfrac{Z^{(l)} - \overline{Z^{(l)\prime}}}{2i} > 0$ and $Z^{(l)\prime}\, Z^{(l)} = -E$, $l = 1, \ldots, h$. Thus $\mathcal{E}$ is equivalent to a product h times of Cartan's symmetric space of type II.

3) Let $\varepsilon = -1$ and $\mathcal{D}$ a totally indefinite quaternion algebra. Again, for simplicity, we take $h = (k : \Gamma) = 1$. The space $\mathcal{E}$ is the space of complex matrices $Z = X + i\,Y Q$ where X and Y are $2n$-rowed real matrices $Y' = Y > 0$ and $-X = Q^{-1} X' Q$,

$$Q = \begin{pmatrix} J & & \\ & \ddots & \\ & & J \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Thus $X Q^{-1}$ is real symmetric. The space $\mathcal{E}$ for $h \geqq 1$ is again a product of h Siegel upper half planes so of type III in the sense of Cartan.

4) Let $\mathcal{D}$ be an algebra of the second kind. Again if $(\mathcal{K} : k) = 2$, $(k : \Gamma) = h = 1$ then the space $\mathcal{E}$ is the space of complex matrices Z of nf rows, $Z = X + Y\eta$ where X and Y are hermitian matrices and $Y > 0$. Hence in case $h > 1$ the space $\mathcal{E}$ is a product h times of the space considered by H. Braun with nf for n. Braun's case corresponds to $f = 1$ and $h = 1$. Thus $\mathcal{E}$ comes under Cartan symmetric space of type I.

Thus in every case the generalized upper half plane is a product of Cartan symmetric spaces of type I, II and III. It is to be *noted*, however, that the

spaces of type I obtained above are a special case of Cartan's with square matrices instead of rectangular matrices as in his case. In order to obtain these and also to give examples of discontinuous groups we proceed as follows. We consider only the non-commutative case first.

Let $\mathfrak{D}$ be a quaternion division algebra with totally real centre k. Let $x \to \bar{x}$ (conjugate quaternion) be the involution in $\mathfrak{D}$. Let $(k : \Gamma) = h$. Let $\mathfrak{D}$ be definite at $q > 0$ infinite prime spots of k. Let S be a non singular matrix in $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{D})$ with $S = \bar{S}$. Let S be definite at the q infinite prime spots at which $\mathfrak{D}$ is ramified and let $0 < h-q < h$. Since at each of the infinite prime spots at which $\mathfrak{D}$ is unramified, S is equivalent to the unit matrix the orthogonal group $\Omega(S)$ of S has the representation space $\mathscr{E}$ which is a product of $h-q$ Siegel upper half planes. Let $\Gamma(S)$ be the unit group of S. It has in $\mathscr{E}$ a discontinuous representation and because of the remarks following immediately the corollary to theorem 8 and $q > 1$ it follows that the fundamental region is compact.

Let k be a totally real field and $\mathscr{K}$ a totally imaginary quadratic extension of k. Let S be a hermitian matrix over $\mathscr{K}$ and let it be definite at q of the real infinite prime spots of k, $0 < h-q < h = (k : \Gamma)$. Following wellknown methods, the group $\Gamma(S)$ has a representation in the product of the spaces

$$E - Z^{(l)'}\, \overline{Z^{(l)}} > 0, l = 1, \ldots, h-q$$

where $Z^{(l)}$ is a complex matrix of p rows and q columns, $(p_1, q_1), \ldots$ being the system of signatures of S. This space $\mathscr{E}$ is a bounded domain type of I of Cartan. It is equivalent to an unbounded domain only in case $p = q$ for all $l = 1, \ldots, h-q$. Under the conditions on q the fundamental region of $\Gamma(S)$ is compact.

§ 11. Bilinear forms

Let $\mathfrak{D}$ be a division algebra of finite rank over Γ and $\mathfrak{D}^{-1}$ the anti-isomorphic algebra of $\mathfrak{D}$. Put $\mathscr{A} = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}^{-1}$ be the direct sum so that $\mathscr{A}$ is semi-simple. Any element of $\mathscr{A}$ is denoted

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \alpha_1 \in \mathfrak{D}, \alpha_2 \in \mathfrak{D}^{-1}.$$

Let us denote by $\sim$ the (1, 1) mapping of $\mathfrak{D}$ on $\mathfrak{D}^{-1}$ and vice versa. For $\alpha \in \mathscr{A}$ put

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}_1 \end{pmatrix}$$

then $\alpha \to \tilde{\alpha}$ is an involution of $\mathscr{A}$. If $\mathscr{A}_m = \mathfrak{M}_m(\mathscr{A})$, the involution in $\mathscr{A}$ can be extended to $\mathscr{A}_m$ in an obvious way. An element $S \in \mathscr{A}_m$ is symmetric if and only if

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_1 \end{pmatrix}.$$

Extend Γ to $\bar{\Gamma}$ the real number field $\bar{\mathscr{A}}_m$ is the direct sum of 2 semi simple algebras $\bar{\mathfrak{D}}_m$ and $\bar{\mathfrak{D}}_m^{-1}$. Let γ_1 and γ_2 be the matrices associated with these as γ

in § 3, was associated with $\mathfrak{D}$. Put $\gamma_1\gamma_1' = M_1$, $\gamma_2\gamma_2' = M_2$. Define for S in $\mathscr{A}_m$, S' by

$$S' = \begin{pmatrix} S_1' & 0 \\ 0 & S_2' \end{pmatrix}$$

then

$$S^* = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1' & 0 \\ 0 & S_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1^{-1} & 0 \\ 0 & M_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^* & 0 \\ 0 & S_2^* \end{pmatrix} \tag{97}$$

where S_1^* and S_2^* are defined as in § 3. But

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma_2^{-1} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

splits into a direct sum of matrices and because $\mathscr{A}_m = \mathfrak{D}_m + \mathfrak{D}_m^{-1}$ we see that

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & M_0' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_2' & 0 \\ 0 & S_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0^{-1} & 0 \\ 0 & M_0'^{-1} \end{pmatrix} \tag{98}$$

where $M_0 = \gamma_1\gamma_2'$, the matrices S_1, S_2 are all in their regular representations. From (97) and (98) we get

$$S = Q^{-1}S^*Q,\ Q = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1\gamma_2^{-1} \\ \gamma_2\gamma_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{99}$$

Let now $S = \tilde{S}$ be a symmetric element of $\mathscr{A}_m$. Let it be non singular. The *orthogonal group* of S, $\Omega(S)$ in $\mathscr{A}_m$ is the set of $V = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$ with

$$\tilde{V}SV = S\,, \quad N_0 V_1 = \pm 1\,.$$

$\Omega(S)$ is therefore equivalent to the group of elements of $\mathfrak{D}_m$ of norm ± 1. Since S can always be written in the form $\tilde{C}C$ for $C \in \mathscr{A}_m$, it follows that the representation space of the orthogonal group is the set of matrices $H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}$. $H_1 \in \mathfrak{D}_m$, $H_2 \in \mathfrak{D}_m^{-1}$, $H_1 > 0$, $H_2 > 0$, $N_0 H_1 = 1$, and satisfying

$$HS^{-1}\tilde{H} = S^*.$$

It is obvious that given H, we can determine H_2 uniquely. As before this $\mathfrak{H}$ space has the metric $ds^2 = \sigma(H_1^{-1}\,dH_1 H_1^{-1}\,dH_1)$.

Let o_1 be an order in $\mathfrak{D}$, o_2 the corresponding order in $\mathfrak{D}^{-1}$. Let O_1, O_2 the extended orders in $\mathfrak{D}_m$ and $\mathfrak{D}_m^{-1}$. It is clear what we mean by a unit in $\mathscr{A}_m$. Two symmetric non singular elements S and T in $\mathscr{A}_m$ are *equivalent* if there is a unit U with $\tilde{U}SU = T$. It is clear that for given N_0S_1, $S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_1 \end{pmatrix}$, there exist but finitely many classes of equivalent matrices which are integral.

Let $\Gamma(S)$ be the unit group of S, namely the group of $U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$ with $U_i \in O_i$, $i = 1, 2$ such that $\tilde{U}_2 S_1 U_1 = S_1$. This is isomorphic to a subgroup of finite index of the group of units $\Gamma(O_1)$. For, since U_1 determines U_2 uniquely $U_2 = S_1 U_1^{-1} S_1^{-1}$. Let q be a rational integer such that qS_1 and qS_1^{-1} are integral. Consider the units $U_1 \in \Gamma(O_1)$ such that $U_1 \equiv E(\bmod q^2)$. They form in $\Gamma(O_1)$ a subgroup of finite index. For every such U_1 the U_2 determined by the above equation is integral. Thus there exists in the $\mathfrak{H}$ space of S a fundamental region $\mathscr{F}$ for $\Gamma(S)$.

Let n be an integer and put $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, $E = E_n$. Let $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$ so that $J \in \bar{\mathscr{A}}_{2n}$. The orthogonal group of J is called the symplectic group of $\bar{\mathscr{A}}_{2n}$. The representation space for this orthogonal group Ω is the space of $H_1 > 0$ in $\bar{\mathscr{D}}_{2n}$

$$H_1 = \begin{pmatrix} Y_1^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{Y}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & -X_1 \\ 0 & E \end{bmatrix} \tag{100}$$

with $N_0 Y_1 = N_0 \hat{Y}_2$, $Y_1 > 0$ and X_1 arbitrary. Put $Z = X + i Y Q$ where

$$Z = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} Q\,.$$

Q being given by (99). This gives the generalized upper half plane. The modular group is the unit group of J.

Let $S = \tilde{S}$ be a non singular element of $\mathscr{A}_m$. For any matrix $G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$ where G_1 and G_2 are matrices with m rows and n columns in $\mathscr{D}$ and $\mathscr{D}^{-1}$ respectively define $\hat{G} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{G}_1 \end{pmatrix}$, $\hat{G}_2$, $\hat{G}_1$ having n rows and m columns. Put $S\{G\} = \hat{G} S G = \begin{pmatrix} \tilde{G}_2 S_1 G_1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$. If T is symmetric in $\mathscr{A}_n$ we say that S *represents* T if there is a G with elements in o_1 and o_2 respectively such that $S\{G\} = T$. Let $H \in \mathfrak{H}$. We define the theta series

$$f(S, H, Z) = \sum_{\substack{G_1 \in o_1 \\ G_2 \in o_2}} e^{\pi i \sigma(S\{G\} X + i H[G] Y)} \tag{101}$$

where $\sigma(P)$ for $P \in \mathscr{A}_n$ means $\sigma(P_1) + \sigma(P_2)$ with $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$. In the special case $n = 1$ and $g = 1$ we see that $y_2 = y_1$, $\tilde{x}_1 = x_1$ and we have the theta series

$$f(S, H, Z) = \sum_{u, v} e^{2 \pi i u' S_1 v x_1 - y_1 (H_1[u] + H_1^{-1}[S_1'][v])}$$

where u and v run through m rowed columns of rational integers, $H_1 > 0$. The special case $S_1 = E_m$ is given by Siegel.

Using the volume element dv in the $\mathfrak{H}$ space we have

Theorem 16. *The integral* $\int_F f(S, H, Z)\, dv$ *converges and equals*

$$\sum_G \int_F e^{\pi i \sigma(S\{G\} X + i H[G] Y)}\, dv$$

provided $m > n$.

The proof proceeds on the same lines as for theorem 7. The other analogues of theorem 8 follow easily.

References

[1] Albert, A. A.: Involutorial simple algebras and real Riemann matrices. Ann. Math. **36**, 886—964 (1935).

[2] Braun, H.: Hermitian modular functions. I. Ann. Math. **50**, 827—855 (1949).

[3] Deuring, M.: Algebren. Ergebnisse. Berlin 1934.

[4] Hasse, H.: Zahlentheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1949.

[5] Humbert, P.: Théorie de la réduction des formes quadratiques définies positives dans un corps algébrique K fini. Comment. Math. Helv. **12**, 263—306 (1940).

[6] Klingen, H.: Eisensteinreihen zur Hilbertschen Modulgruppe n-ten Grades. Nachr. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen 1960, p. 87—104.
[7] Minkowski, H.: Geometrie der Zahlen. Chelsea Reprint 1953.
[8] Ramanathan, K. G.: Units of quadratic forms. Ann. Math. **56**, 1—10 (1952).
[9] Ramanathan, K. G.: Units of fixed points in involutorial algebras. Proc. Intern. Symposium on Algebraic Number theory. Tokyo 1956, p. 103—106.
[10] Ramanathan, K. G.: Quadratic forms over involutorial division algebras. J. Ind. Math. Soc. **20**, 227—257 (1956).
[11] Ramanathan, K. G.: Zeta functions of quadratic forms. (To appear.)
[12] Schilling, O. F. G.: Units in p-adic algebras. Am. J. Math. **61**, 883—896 (1939).
[13] Siegel, C. L.: Einheiten quadratischer Formen. Abhandl. math. Seminar hamburg. Univ. **13**, 209—239 (1940).
[14] Siegel, C. L.: Discontinuous groups. Ann. Math. **44**, 674—689 (1943).
[15] Siegel, C. L.: Symplectic geometry. Am. J. Math. **65**, 1—86 (1943).
[16] Siegel, C. L.: Die Modulgruppe in einer einfachen involutorischen Algebra. Festschr. Gött. Akademie d. Wiss. (1951) p. 157—167.
[17] Siegel, C. L.: Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie. II. Math. Ann. **124**, 364—387 (1952).
[18] Siegel, C. L.: Functions of Several Complex variables. Notes of lectures at Princeton. 1950.
[19] Siegel, C. L.: Zur Reduktionstheorie quadratischer Formen. Math. Soc. Japan. 1959.
[20] Weyl, H.: Fundamental domains for lattice groups in division algebras. Festschrift to A. Speiser. Zürich 1945.

(Received October 31, 1960)

NASTOLD, H.-J.
Math. Annalen 143, 333—343 (1961)

Zur Serreschen Multiplizitätstheorie in der arithmetischen Geometrie

Von
HANS-JOACHIM NASTOLD in Heidelberg

Einleitung

In der Multiplizitätstheorie der algebraischen Geometrie wird jeder Komponente P des Durchschnitts zweier Untervarietäten V, W etwa einer affinen Varietät X eine nichtnegative ganze Zahl $i(V \cdot W | P)$ als Vielfachheit zugeordnet, so daß das mit Hilfe dieser *Schnittzahlen* definierte *Schnittprodukt* $V \cdot W = \sum_{P \text{ Komp. } V \cap W} i(V \cdot W | P) \cdot P$, das durch Linearität auf alle Zyklen von X fortgesetzt wird, eine Reihe von kennzeichnenden Eigenschaften besitzt (Assoziativität u. a., s. [10] und [7]).

Gehört zur affinen Varietät X der affine Ring $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ als Koordinatenring, ein über dem Konstantenkörper endlich erzeugter Ring, so gehören zu den Untervarietäten $V, W \subset X$ Primideale $\mathfrak{p}_V, \mathfrak{p}_W \subset R$ und zum Durchschnitt $V \cap W$ das Radikal des Summenideals $\mathfrak{p}_V + \mathfrak{p}_W$. Einer Komponente P von $V \cap W$ entspricht dann als zugehöriges Primideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_P$ ein minimales Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}_V + \mathfrak{p}_W$. Interessiert man sich nur für die Schnittzahl $i(V \cdot W | P)$, also die Vielfachheit des Schnittes von V und W in P, so kann man alles in dem in P lokalisierten affinen Ring $A = R_\mathfrak{p}$ ausdrücken. Mit $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_V A$, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_W A \subset A$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} A$ ist $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ $\mathfrak{m}$-primär, d. h. $A/\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ ist von endlicher Länge (abgekürzt v. e. L.).

Wir setzen $i(V \cdot W | P) = \chi^A(A/\mathfrak{p}_1, A/\mathfrak{p}_2)$ und stehen also vor der Aufgabe, für Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subset A$ mit $A/\mathfrak{p}_1 \otimes_A A/\mathfrak{p}_2$ v. e. L. eine Zahl $\chi^A(A/\mathfrak{p}_1, A/\mathfrak{p}_2)$ zu bestimmen. A ist dabei ein geometrischer lokaler Ring, der noch als *regulär* angenommen wird, denn nur für die auf X einfachen P kann eine obigen Forderungen genügende Schnittzahl definiert werden. P einfach auf X ist aber mit $A = R_\mathfrak{p}$ regulär gleichbedeutend (s. etwa [4]). J. P. SERRE gab in [9] für $\chi^A(A/\mathfrak{p}_1, A/\mathfrak{p}_2)$ die folgende Definition an:

(1) $$\chi^A(A/\mathfrak{p}_1, A/\mathfrak{p}_2) = \sum_i (-1)^i \, \mathrm{l}(\mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{p}_1, A/\mathfrak{p}_2)) .$$

l bedeutet dabei die Länge. Sie ist endlich, da $\mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{p}_1, A/\mathfrak{p}_2)$ ein endlich erzeugter $\mathrm{Tor}_0^A(A/\mathfrak{p}_1, A/\mathfrak{p}_2) = A/\mathfrak{p}_1 \otimes_A A/\mathfrak{p}_2$-Modul ist. Der letztere Ring ist jedoch artinsch. Nach AUSLANDER-BUCHSBAUM [1] und SERRE [8], [9], chap. IV,

ist die Regularität von A gleichbedeutend mit der Endlichkeit der globalen homologischen Dimension von A: $\mathrm{gl\,hd}A = n < \infty$, d. h. jeder A-Modul M besitzt eine projektive (freie) Auflösung der Form

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 .$$

Nach Definition der Funktoren $\mathrm{Tor}_i^A(\ ,\ )$ ist dann $\mathrm{Tor}_i^A(\ ,\ ) = 0$ für $i > n$. Obige Summe ist somit wohl definiert. SERRE [8], chap. V, konnte zeigen, daß die wie in (1) definierte Schnittzahl $i(V \cdot W | P) = \chi^A(A/\mathfrak{p}_1, A/\mathfrak{p}_2)$ mit der in der algebraischen Geometrie üblichen [10], [7] übereinstimmt. Ferner ist

$$\chi^A(A/\mathfrak{p}_1, A/\mathfrak{p}_2) = \sum_i (-1)^i \, \mathrm{l}(\mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{p}_1, A/\mathfrak{p}_2)) = \mathrm{l}(A/\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2) - [\ldots], \text{wo } [\ldots] \geqq 0,$$

und $= 0$ genau dann, wenn $A/\mathfrak{p}_i$ Cohen-Macaulay-Moduln sind und $\dim \mathfrak{p}_1 + \dim \mathfrak{p}_2 = \dim A$ ist. Letztere Bedingung gibt also an, wann $\chi(A/\mathfrak{p}_1, A/\mathfrak{p}_2) = \mathrm{l}(A/\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2)$ (Gröbners Multiplizitätsdefinition).

Die Serresche Definition (1) ist jedoch nicht nur für geometrische, sondern für beliebige reguläre lokale Ringe A, die nicht notwendig einen Konstantenkörper k enthalten, sinnvoll. Sie liefert somit eine *Vielfachheit auch für die arithmetische Geometrie* etwa im Sinne von NAGATA [5] oder GROTHENDIECK. Etwas allgemeiner als in (1) seien *A regulär, lokal* und *M, N endlich erzeugte A-Moduln mit $M \otimes N$ v. e. L.* Dann ist

$$\chi^A(M, N) = \sum_i (-1)^i \, \mathrm{l}(\mathrm{Tor}_i^A(M, N)) \tag{2}$$

wohldefiniert. Da jeder endlich erzeugte Modul M eine Reihe von Untermoduln $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$, $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_i$ Primideale von A, besitzt und $\chi(\ ,\ )$ additiv ist, läßt sich $\chi(M, N)$ als Summe von Summanden $\chi(A/\mathfrak{p}_i, A/\mathfrak{q}_j)$ darstellen. Von $\chi(M, N)$ sind die folgenden grundlegenden Eigenschaften zu fordern: (i) $\chi(M, N) \geqq 0$, (ii) $\dim M + \dim N \leqq A$, (iii) $\dim M + \dim N < \dim A$ genau dann, wenn $\chi(M, N) = 0$. Hier ist $\dim M = \dim A/Ann(M)$[1]. (ii) geht dabei für $M = A/\mathfrak{p}_1$, $N = A/\mathfrak{p}_2$, $A = R_\mathfrak{p}$ mit den obigen Bezeichnungen in die bekannte Dimensionsungleichung $\dim V + \dim W \leqq \dim P + \dim X$ über, und (iii) besagt, daß, falls X singularitätenfrei ist, im Schnittprodukt $V \cdot W = \sum_{P\,\mathrm{Komp.}\,V \cap W} i(V \cdot W | P) \cdot P$ genau dann *alle* Komponenten P von $V \cap W$ mit von Null verschiedenem Koeffizienten vorkommen, wenn V und W sich *eigentlich schneiden*, d. h. wenn für jede solche Komponente P die Dimensionsgleichung $\dim V + \dim W = \dim P + \dim X$ besteht.

Der Nachweis der grundlegenden Eigenschaften (i)—(iii) bereitet die einzigen Schwierigkeiten beim Serreschen Aufbau der Multiplizitätstheorie. Die Rechenregeln (z. B. die Assoziativität) und weitergehende Eigenschaften des Schnittproduktes ergeben sich unter Verwendung des Kalküls der homologischen Algebra, wie SERRE in [9] z. T. ausführte, zwanglos. Ebenfalls in [9]

[1]) $Ann(M)$ bezeichnet den Annullator von M, die Menge derjenigen Elemente $a \in A$ mit $a \cdot M = 0$.

bewies SERRE (ii) für beliebige, (i) und (iii) für unverzweigte reguläre lokale Ringe, d. h. für $\chi(A) = \chi(A/\mathfrak{m})$ (charakteristikgleicher Fall) oder $0 = \chi(A) \neq \chi(A/\mathfrak{m}) = p$, $p \notin \mathfrak{m}^2$ (charakteristikungleicher unverzweigter Fall). Dabei bezeichnet χ die Charakteristik, $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A. Ob (i) und (iii) auch für verzweigte reguläre lokale Ringe gelten, ist noch offen.

Hauptzweck dieser Arbeit ist der Versuch, eine *Reduktion* anzugeben *des Falles eines verzweigten regulären lokalen Ringes auf den unverzweigten Fall.* Dazu stellen wir den ohne Einschränkung der Allgemeinheit kompletten verzweigten regulären lokalen Ring A als homomorphes Bild eines Potenzreihenringes B über einem kompletten diskreten Bewertungsring, also eines unverzweigten regulären lokalen Ringes, in der Form $0 \to B \cdot y \to B \xrightarrow{\varphi} A \to 0$, $y \notin \mathfrak{m}_B^2$, wo $\mathfrak{m}_B$ das maximale Ideal von B bedeutet, dar. $\mathfrak{P} \subset B$ sei Urbild bei φ eines Primideals aus A, es ist also $y \in \mathfrak{P}$. Dann gilt:

(i) *und* (iii) *sind gültig für den Ring A, also für beliebige reguläre lokale Ringe, wenn die folgende Vermutung für den Potenzreihenring B zutrifft: Es gibt ein Primideal $\mathfrak{p}' \subset B$, so daß $y \notin \mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}' + B \cdot y$ ist.* Für $\mathfrak{r}(\mathfrak{P}) = 2$ ist diese Vermutung gleichbedeutend mit der *eindeutigen Primfaktorzerlegung in A*, nach AUSLANDER-BUCHSBAUM [2] also richtig.

Im einzelnen geben wir in § 1 einen Überblick über die Serreschen Ergebnisse und Methoden, da diese noch nicht allgemein zugänglich sind. In § 2 wird die eben genannte Reduktion auf den unverzweigten Fall durchgeführt. § 3 zeigt Fälle auf, für die die obige Vermutung zutrifft. Insbesondere wird hier der Zusammenhang unserer Vermutung mit der eindeutigen Primfaktorzerlegung dargestellt. Schließlich geben wir in § 4 einen Ansatz zum Beweis unserer Vermutung mit Hilfe des Formenringes des Ringes B an.

§ 1. Die Serreschen Ergebnisse

a) (i)—(iii) sind richtig ohne die Voraussetzung der Regularität von A, wenn N von der Form $N = A/(x_1, \ldots, x_s)$ ist und $x_1, \ldots, x_s$ eine A-Folge bilden. Für einen regulären Ring A (allgemeiner für einen Cohen-Macaulay-Ring [9], chap. IV) der Dimension n ist letzteres genau dann der Fall, wenn $\dim N = n - s$. Es gibt dann nämlich Elemente $x_{s+1}, \ldots, x_n$, so daß $(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n)$ ein Definitionsideal ist. $x_1, \ldots, x_n$ bilden dann ein Parametersystem, also eine A-Folge. Dabei heißt $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{m}$ A-Folge, wenn die folgenden Sequenzen exakt sind: $0 \to A_{i-1} \xrightarrow{x_i} A_{i-1} \to A_i \to 0$, $i = 1, \ldots, s$, $A_0 = A$. $A_{i-1} \xrightarrow{x_i} A_{i-1}$ bedeutet die Multiplikation mit x_i. Es ist $A_{i-1} = A/(x_1, \ldots, x_{i-1})$.

Zum Beweis von (i)—(iii) unter obigen Voraussetzungen betrachtet man den *Koszulkomplex* $K^A(x_1, \ldots, x_n)$ bezüglich des Elementsystems $x_1, \ldots, x_s$: Für ein nur aus einem Element x bestehendes Elementsystem x ist $K_0^A(x) = K_1^A(x) = A$, $K_p^A(x) = \{0\}$ für $p > 1$ ($K_p^A(x)$ p-dimensionaler Bestandteil des Komplexes $K^A(x)$) und die Randabbildung d: $K_1(x) \to K_0(x)$ ist die Multi-

plikation mit x. Dann ist $K^A(x_1, \ldots, x_s) = K^A(x_1) \otimes K^A(x_2) \otimes \cdots \otimes K^A(x_s)$. $K^A(x_1, \ldots, x_s)$ ist der *Komplex der äußeren Algebra* von A bezüglich $(x_1, \ldots, x_s)$.

Hilfssatz 1: Ist $x_1, \ldots, x_s$ eine A-Folge, so bildet der Koszulkomplex $K^A(x_1, \ldots, x_s)$ eine freie Auflösung von $A/(x_1, \ldots, x_s) = N$:

$$0 \to K_s(x_1, \ldots, x_s) \to \cdots \to K_1(x_1, \ldots, x_s) \to K_0(x_1, \ldots, x_s) \to A/(x_1, \ldots, x_s) \to 0\,.$$

Daraus folgt $\mathrm{Tor}_i^A(M, N) \cong H_i(M \otimes K(x_1, \ldots, x_s))$ (i-te Homologiegruppe des Koszulkomplexes von M bezüglich $x_1, \ldots, x_s$).

Beweis: Induktion nach s [9], chap. IV.

Hilfssatz 2: Ist $M/(x_1, \ldots, x_s)M$ v. e. L., so ist die Länge $\mathrm{l}(M/(x_1, \ldots, x_s)^n M)$ für große n ein Polynom in n, das *Samuelsche Polynom* $P_{(x_1, \ldots, x_s)}(M, n)$. Es ist Grad $P = \dim M \leqq s$ und die s-te Differenz

$$\Delta^s P_{(x_1, \ldots, x_s)}(M, n) = \begin{cases} e(M, (x_1, \ldots, x_s)) & \text{für} \quad \dim M = s \\ 0 & \text{für} \quad \dim M < s\,. \end{cases}$$

$e(M, (x_1, \ldots, x_s))$ ist die *Multiplizität des Ideals* $(x_1, \ldots, x_s)$ *bezüglich des Moduls* M. Seiner Definition nach ist $e(M, (x_1, \ldots, x_s)) > 0$.

Beweis: Mit Hilfe des zur Filtrierung $(x_1, \ldots, x_s)^n M$ von M gehörigen assoziierten graduierten Moduls $G(M)$ und Hilberts charakteristischem Polynom für graduierte Moduln über Polynomringen [9], chap. II.

Hilfssatz 3: Die *Euler-Poincaré-Charakteristik*

$$\chi(M, x_1, \ldots, x_s) = \sum_i (-1)^i \,\mathrm{l}\big(H_i(M \otimes K(x_1, \ldots, x_s))\big) = \Delta^s P_{(x_1, \ldots, x_s)}(M, n)\,.$$

Beweis: Mit Spektralsequenz zu der folgenden Filtrierung des Koszulkomplexes $K = K^M(x_1, \ldots, x_s) = M \otimes K^A(x_1, \ldots, x_s)$ von M bezüglich $x_1, \ldots, x_s$: $K^{(i)} = \bigoplus_{p=0}^{s} K_p^{(i)}$, wo $K_p^{(i)} = (x_1, \ldots, x_s)^{i-p} K_p$ (man setzt $(x_1, \ldots, x_s)^j = A$ für $j < 0$). S. [9], chap. IV.

Aus den Hilfssätzen 1—3 erhält man nun sofort unsere Behauptungen (i) bis (iii): Nach Voraussetzung ist $M \otimes_A N = M \otimes_A A/(x_1, \ldots, x_s) \cong M/(x_1, \ldots, x_s)M$ v. e. L., nach Hilfssatz 2 also $\dim M \leqq s$. Nun ist aber $\dim N = n - s$, folglich $\dim M + \dim N \leqq n = \dim A$. Andererseits ist nach Hilfssatz 1, 2 und 3 $\chi(M, N) = \chi(M, A/(x_1, \ldots, x_s)) = \sum_i (-1)^i \mathrm{l}\big(H_i(M \otimes K(x_1, \ldots, x_s))\big)$

$$= \Delta^s P_{(x_1, \ldots, x_s)}(M, n) = \begin{cases} e(M, (x_1, \ldots, x_s)) & \text{für} \quad \dim M = s \\ 0 & \text{für} \quad \dim M < s\,, \end{cases} \quad \text{also stets} \geqq 0\,,$$

und $= 0$ genau dann, wenn $\dim M + \dim N < n = \dim A$.

b) Es genügt, sich beim Beweis von (i)—(iii) auf *komplette* reguläre lokale Ringe zu beschränken. Mit A ist nämlich auch seine Komplettierung $\hat{A}$ regulär, und $\hat{A}$ ist A-plat, d. h. der Funktor $M \to \hat{A} \otimes_A M \cong \hat{M}$ ist exakt (vgl. dazu [9],

chap. II). Daraus folgt $\mathrm{Tor}_i^{\hat{A}}(\hat{M}, \hat{N}) \cong \mathrm{Tor}_i^{\hat{A}}(M \otimes \hat{A}, N \otimes \hat{A}) \cong \mathrm{Tor}_i^A(M,N) \otimes \hat{A} \cong \widehat{\mathrm{Tor}_i^A(M,N)}$ ([9], chap. IV), und es gilt $\mathrm{l}(M) = \mathrm{l}(\hat{M})$ und $\dim M = \dim \hat{M}$. Ferner ist, falls $M \otimes_A N$ v. e. L. ist, auch $\hat{M} \otimes_{\hat{A}} \hat{N}$ v. e. L., denn es ist

$$\widehat{M \otimes_A N} \cong (M \otimes_A N) \otimes_A \hat{A} \cong M \otimes_A N \otimes_A (\hat{A} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}) \cong M \otimes_A (N \otimes_A \hat{A} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}) \cong$$
$$\cong M \otimes_A ((\hat{A} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}) \otimes_A N) \cong (M \otimes_A \hat{A}) \otimes_{\hat{A}} (\hat{A} \otimes_A N) \cong \hat{M} \otimes_{\hat{A}} \hat{N} .$$

c) Es genügt, sich beim Beweis von (i)—(iii) auf den Fall von Moduln der Form $M = A/\mathfrak{p}$, $N = A/\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ Primideale von A, zu beschränken. Jeder endlich erzeugte A-Modul M besitzt nämlich nach [9], chap. I eine Reihe von Untermoduln $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m = M$, $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_i$ Primideale von A, und $\chi(M, N)$ ist als Euler-Poincaré-Charakteristik auf Grund der langen exakten Sequenz der $\mathrm{Tor}_i^A(\ ,\ )$ additiv, d. h. für $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakt, $M \otimes_A N$ v. e. L., ist $M' \otimes_A N$ und $M'' \otimes_A N$ v. e. L. und $\chi(M, N) = \chi(M', N) + \chi(M'', N)$. Mit $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n = N$, $N_j/N_{j-1} \cong A/\mathfrak{q}_j$, $\mathfrak{q}_j$ Primideale in A, ist also $\chi(M, N) = \sum_{i,j} \chi(A/\mathfrak{p}_i, A/\mathfrak{q}_j)$.

d) (i)—(iii) sind richtig im *charakteristikgleichen Fall:* $\chi(A) = \chi(A/\mathfrak{m})$.

Beweis: O. B. d. A. ist A komplett und regulär, also nach Cohen (vgl. etwa [6]) freier Potenzreihenring über einem Körper $k \cong A/\mathfrak{m}$: $A \cong k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$. Zurückführung auf den in a) behandelten Fall mit Hilfe der folgenden

Assoziativformel: $\mathrm{Tor}_i^A(M, N) \cong \mathrm{Tor}_i^C(M \hat{\otimes}_k N, C/d)$, wo $M \hat{\otimes}_k N$ das vollständige Tensorprodukt (s. [9], chap. V), eine Komplettierung des gewöhnlichen Tensorproduktes $M \otimes_k N$, $C = A \hat{\otimes}_k A \cong k[\![X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]\!]$ und $d = (X_1 - Y_1, \ldots, X_n - Y_n)$ das Diagonalideal in C bedeuten. Vgl. dazu [9], chap. V. Es ist $0 \to d \to A \hat{\otimes}_k A \to A \to 0$ exakt. $X_1 - Y_1, \ldots, X_n - Y_n$ ist eine C-Folge, $(M \hat{\otimes}_k N) \otimes_C C/d \cong M \hat{\otimes}_k N / d \cdot M \hat{\otimes}_k N \cong M \otimes_A N$ ist v. e. L. und $\dim M \hat{\otimes}_k N = \dim M + \dim N$. Die obige Assoziativformel entspricht der in der Geometrie üblichen „Reduktion auf die Diagonale":

$$V \cap W \cong (V \times W) \cap \Delta \subset X \times X,\ \Delta = \text{Diagonale von } X \times X .$$

e) (i)—(iii) sind richtig im *charakteristikungleichen unverzweigten Fall:* $0 = \chi(A) \neq \chi(A/\mathfrak{m}) = p$, $p \notin \mathfrak{m}^2$.

Beweis: Wieder kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit A als komplett und regulär annehmen. Dann ist A freier Potenzreihenring über einem kompletten diskreten Bewertungsring r: $A \cong r[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$. Zufolge c) können wir M bzw. N von der Form $M = A/\mathfrak{p}$ bzw. $N = A/\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ Primideale von A, annehmen. π sei ein Primelement des diskreten Bewertungsringes r. Dann ist π entweder Nichtnullteiler von M bzw. N oder π annulliert M bzw. N. Man unterscheidet drei Fälle:

1. π ist Nichtnullteiler von M und N. Dann gilt wie in d) die Assoziativformel $\mathrm{Tor}_i^A(M, N) \cong \mathrm{Tor}_i^C(M \hat{\otimes}_r N, C/d)$, wo $C = A \hat{\otimes}_r A \cong r[\![X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]\!]$ und $d = (X_1 - Y_1, \ldots, X_n - Y_n)$ ist. $X_1 - Y_1, \ldots, X_n - Y_n$ ist

wieder eine C-Folge und $(M \hat{\otimes}_r N) \otimes_C C/d \cong M \otimes_A N$ ist v. e. L. Da π auch Nichtnullteiler von $M \hat{\otimes}_r N$ und mit $k = A/\mathfrak{m} \cong r/(\pi)$ $(M \hat{\otimes}_r N)/\pi \cdot (M \hat{\otimes}_r N) \cong$ $\cong (M/\pi \cdot M) \hat{\otimes}_k (N/\pi \cdot N)$ ist, gilt $\dim M \hat{\otimes}_r N = \dim M + \dim N - 1$. Mit $\dim A$ $= \dim r[X_1, \ldots, X_n] = n + 1$ ergibt sich dann die Behauptung.

2. π annulliert M und ist Nichtnullteiler von N. Allein unter der ersten Voraussetzung ist mit $k = r/(\pi)$ und $\underline{A} = A/(\pi) \cong k[X_1, \ldots, X_n]$ M ein $\underline{A}$-Modul, und man erhält eine spektrale Folge $\mathrm{Tor}_p^{\underline{A}}(M, \mathrm{Tor}_q^A(\underline{A}, N)) \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^A(M, N)$. Aus der exakten Folge $0 \to A \xrightarrow{\pi} A \to \underline{A} \to 0$ entnimmt man $\mathrm{Tor}_0^A(\underline{A}, N) = \underline{A} \otimes_A N \cong N/\pi \cdot N$, $\mathrm{Tor}_1^A(\underline{A}, N) = (0:\pi)_N = {}_\pi N$ (Menge der von π in N annullierten Elemente) und $\mathrm{Tor}_q^A(\underline{A}, N) = \{0\}$ für $q > 1$. Die spektrale Folge entartet somit zu einer exakten Folge, aus der man

$$(*) \qquad \chi^A(M, N) = \chi^{\underline{A}}(M, N/\pi \cdot N) - \chi^{\underline{A}}(M, {}_\pi N)$$

entnimmt. Da π hier Nichtnullteiler von N sein sollte, ist ${}_\pi N = 0$, also $\chi^A(M, N)$ $= \chi^{\underline{A}}(M, N/\pi \cdot N)$, womit eine Reduktion auf den Fall d) gewonnen ist. Auch ohne spektrale Folge ergibt sich hier wegen $\mathrm{Tor}_q^A(\underline{A}, N) = \{0\}$ für $q > 0$ direkt $\mathrm{Tor}_i^A(M, N) \cong \mathrm{Tor}_i^{\underline{A}}(M, N/\pi \cdot N)$.

3. π annulliert M und N. Hier liefert die Beziehung $(*)$ wegen ${}_\pi N = N/\pi \cdot N$ $= N$ $\chi^A(M, N) = 0$. Somit ist lediglich noch $\dim M + \dim N < n + 1$ nachzuweisen. M und N sind aber beides $\underline{A}$-Moduln, $M \otimes_{\underline{A}} N \cong M \otimes_A N$, also v. e. L., und $\dim \underline{A} = n$. Folglich ist $\dim M + \dim N \leqq n < n + 1 = \dim A$.

f) (ii) ist richtig für *beliebige reguläre lokale Ringe.*

Beweis: O. E. d. A. sei A komplett und verzweigt, d. h. $p \in \mathfrak{m}^2$. Dann ist A homomorphes Bild eines kompletten unverzweigten regulären lokalen Ringes B [6], S. 51, prop. 2: $A \cong B/(y)$. M, N können nun als B-Moduln aufgefaßt werden. y annulliert M und N, und $M \otimes_B N \cong M \otimes_A N$ ist v. e. L. Wie in e) Fall 3) ist $\chi^B(M, N) = 0$, woraus $\dim^B M + \dim^B N < \dim B$, also, da $\dim^B M$ $= \dim^A M$, $\dim^B N = \dim^A N$ ist, $\dim^A M + \dim^A N \leqq \dim B - 1 = \dim A$ folgt.

g) Für $M = A/\mathfrak{p}$, $N = A/\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ Primideale in A, also für den in der Definition des Schnittproduktes vorkommenden Fall, gilt: Unter der Voraussetzung, daß A unverzweigt ist, ist $\chi^A(M, N) \leqq \mathrm{l}(M \otimes_A N) = \mathrm{l}(A/\mathfrak{p} + \mathfrak{q})$, und Gleichheit besteht genau dann, wenn $A/\mathfrak{p}$ und $A/\mathfrak{q}$ Cohen-Macaulay-Moduln und $\dim M + \dim N = \dim A$ sind.

Beweis: Sind $M = A/\mathfrak{p}$, $N = A/\mathfrak{q}$ Cohen-Macaulay-Moduln und $\dim M +$ $+ \dim N = \dim A$, so sind nach Grothendieck [9], chap. V für $i > 0$ alle $\mathrm{Tor}_i^A(M, N) = 0$ *und umgekehrt.* Ist nun $\chi^A(M, N) = \mathrm{l}(M \otimes_A N) > 0$, so sind wir in einem der Fälle d), e) 1) oder 2). In jedem dieser Fälle lassen sich die $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$ durch i-te Homologiegruppen eines Koszulkomplexes ausdrücken. Für die Euler-Poincaré-Charakteristik eines solchen gilt aber: Es ist

$$\chi(M, x_1, \ldots, x_s) \leqq \mathrm{l}(M/(x_1, \ldots, x_s)M) = \mathrm{l}(H_0(M, x_1, \ldots, x_s)),$$

und Gleichheit besteht genau dann, wenn die $x_1, \ldots, x_s$ eine M-Folge bilden, also wenn für $i > 0$ alle $H_i(M, x_1, \ldots, x_s) = 0$ sind (s. [9], chap. IV, B) Theorem 2). Dann ergibt sich die Behauptung aber aus obigem Resultat von Grothendieck.

§ 2. Reduktion des Falles eines verzweigten regulären lokalen Ringes auf den unverzweigten Fall

A sei regulär und verzweigt, d. h. $0 = \chi(A) \neq \chi(A/\mathfrak{m}) = p$ und $p \in \mathfrak{m}^2$. O. E. d. A. sei $A = \hat{A}$ komplett. Nach COHEN (vgl. [6], chap. IV) gibt es einen (absolut) unverzweigten kompletten diskreten Bewertungsring r mit dem Restklassenkörper $A/\mathfrak{m}$ und einen Monomorphismus $0 \to r \to A$, so daß $A = r + \mathfrak{m}$. r ist ein Koeffizientenring von A. Ist $\dim A = n$, so gibt es n Elemente $x_1, \ldots, x_n$ mit $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$. Wir betrachten nun den freien Potenzreihenring $B = r[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ und den durch obigen Monomorphismus $r \to A$ und $X_i \to x_i$ definierten Epimorphismus $B \xrightarrow{\varphi} A \to 0$. B ist ein unverzweigter regulärer kompletter lokaler Ring der Dimension $n + 1$. Der Kern des Epimorphismus φ ist ein Primideal des Ranges 1, also, da B ein ZPE-Ring ist, ein Hauptideal $B \cdot y$. Da A regulär ist, ist $y \notin \mathfrak{m}_B^2$, y ist ein regulärer Parameter des Potenzreihenringes B (vgl. [9], chap. IV, D) prop. 18, Cor.). Wir haben somit die exakte Sequenz $0 \to B \cdot y \to B \to A \to 0$, $y \in \mathfrak{m}_B - \mathfrak{m}_B^2$.

M und N seien endlich erzeugte A-Moduln mit $M \otimes_A N$ v. e. L. Wir versuchen nun, die $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$ auszudrücken durch $\mathrm{Tor}_i^B(\ ,\ )$, also durch Torsionsmoduln in bezug auf den unverzweigten Ring B von passend gewählten B-Moduln. Dies leistet der

Hilfssatz: Gibt es zu dem A-Modul M einen B-Modul M', so daß y *Nichtnullteiler* von M' und $M \cong M' \otimes_B A = M' \otimes_B B/B \cdot y \cong M'/y \cdot M'$ ist, dann ist für einen beliebigen A-Modul N $\mathrm{Tor}_i^A(M, N) \cong \mathrm{Tor}_i^B(M', N)$.

Beweis: Es gilt die Assoziativformel $(X \otimes_B A) \otimes_A N \cong X \otimes_B N$ für beliebige B-Moduln X und A-Moduln N. Nun sei der Komplex X eine B-freie Auflösung des B-Moduls M': $\cdots \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M' \to 0$. Da $0 \to B \xrightarrow{y} B \to A \to 0$ eine B-freie Auflösung des B-Moduls A darstellt, sind für $i > 1$ alle $\mathrm{Tor}_i^B(M', A) = 0$. Andererseits liefert die Tensorierung über B der obigen exakten Sequenz mit M' die exakte Sequenz $0 = \mathrm{Tor}_1^B(M', B) \to \to \mathrm{Tor}_1^B(M', A) \to M' \xrightarrow{y} M'$. Da y Nichtnullteiler von M' sein sollte, ist auch $\mathrm{Tor}_1^B(M', A) = 0$. Da die Moduln $\mathrm{Tor}_i^B(M', A)$ gerade die i-ten Homologiemoduln des Komplexes $X \otimes_B A$ sind, ist letzterer also azyklisch, d. h. $X \otimes_B A$ bildet eine A-freie Auflösung des A-Moduls $M' \otimes_B A \cong M$: $\cdots \to X_n \otimes_B A \to \cdots \to X_1 \otimes_B A \to X_0 \otimes_B A \to M' \otimes_B A \to 0$. Es ist daher $\mathrm{Tor}_i^A(M' \otimes_B A, N) \cong \cong H_i((X \otimes_B A) \otimes_A N)$. Andererseits ist nach Wahl von X $\mathrm{Tor}_i^B(M, N) \cong \cong H_i(X \otimes_B N)$. Nun ist aber $(X \otimes_B A) \otimes_A N \cong X \otimes_B N$, folglich $\mathrm{Tor}_i^A(M, N) \cong \cong \mathrm{Tor}_i^A(M' \otimes_B A, N) \cong \mathrm{Tor}_i^B(M', N)$ w. z. z. w.

Kann man zu einem gegebenen A-Modul M einen B-Modul M' finden, so daß y Nichtnullteiler von M' und $M \cong M'/y \cdot M' \cong M' \otimes_B A$ ist, so liefert der obige Hilfssatz die gewünschte Reduktion des verzweigten Falles auf den unverzweigten Fall: Sind M, N endlich erzeugte A-Moduln und ist $M \otimes_A N$ v. e. L., ist ferner M' ein zu M gewählter B-Modul mit obigen Eigenschaften, so hat man in M' und N nun endlich erzeugte B-Moduln, für die ebenfalls $M' \otimes_B N \cong M' \otimes_B A \otimes_A N \cong M \otimes_A N$ ein B-Modul v. e. L. ist. Mit $\mathrm{Tor}_i^A(M, N) \cong \cong \mathrm{Tor}_i^B(M', N)$ ist die Reduktion dann geleistet. B ist ein unverzweigter

regulärer Ring. Es ist $\dim B = n + 1$, $\dim^A N = \dim^B N$ und $\dim^A M = \dim^B M = \dim^B M' - 1$, da $M \cong M'/y \cdot M'$ und y Nichtnullteiler von M' ist. $\dim^A M + \dim^A N = \dim A$ ist somit gleichbedeutend mit $\dim^B M' + \dim^B N = \dim B$.

Die offen gebliebene Frage nach der Existenz eines B-Moduls M' zu gegebenem A-Modul M mit den obigen Eigenschaften läßt sich noch etwas präzisieren: Zunächst genügt es nach § 1, c) sich auf A-Moduln M der Form $A/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ Primideal von A, zu beschränken. Der A-Modul M ist dann insbesondere monogen, d. h. von einem Element erzeugt. M ist dann auch aufgefaßt als B-Modul monogen, also $M = B \cdot m$, und wegen $M \cong M'/y \cdot M'$ ist mit $m' \in m$ $M' = B \cdot m' + y \cdot M'$. Da $y \in \mathfrak{m}_B = \operatorname{rad} B$, ist nach dem Lemma von NAKAYAMA [9], chap. I $M' = B \cdot m'$, also auch M' monogen, d. h. es ist $M' \cong B/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ Ideal von B. Nun soll y Nichtnullteiler von M' und $M \cong M'/y \cdot M'$ sein. Bezeichnen wir das Urbild von $\mathfrak{p}$ bei unserer epimorphen Abbildung $B \xrightarrow{\varphi} A$ mit $\mathfrak{P} = \overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{p})$, so ist $\mathfrak{P}$ Primideal in B und $y \in \mathfrak{P}$. Dann besagt die letztere Isomorphie $M = A/\mathfrak{p} \cong B/\mathfrak{P} \cong (B/\mathfrak{a})/y \cdot (B/\mathfrak{a}) \cong B/(\mathfrak{a} + B \cdot y)$, also $\mathfrak{P} = \mathfrak{a} + B \cdot y$. Die erste Bedingung „$y$ Nichtnullteiler von $M' \cong B/\mathfrak{a}$" besagt: y ist in keinem der zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primideale enthalten. Nun gibt es aber wegen $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{P}$ ein solches Primideal $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{P}$. Da $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{a}$, ist auch $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}' + B \cdot y$, und es ist $y \notin \mathfrak{p}'$. Es bleibt also die Frage, ob es zu einem Primideal $\mathfrak{P}$ von B, $y \in \mathfrak{P}$, ein Primideal $\mathfrak{p}'$ von B mit $y \notin \mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}' + B \cdot y$ gibt. Mit $M' = B/\mathfrak{p}'$ ist dann zu $M = A/\mathfrak{p}$ ein B-Modul mit den gewünschten Eigenschaften gefunden. Wir erhalten somit folgenden

Satz: *Die Euler-Poincaré-Charakteristik $\chi^A(M, N)$, wo M und N endlich erzeugte A-Moduln mit $M \otimes_A N$ v. e. L. sind, hat die in der Einleitung genannten für die Multiplizitätstheorie grundlegenden Eigenschaften* (i)—(iii) *für beliebige reguläre lokale Ringe A, wenn die folgende Vermutung zutrifft: Ist $B = r[X_1, \ldots, X_n]$ ein Potenzreihenring über einem kompletten diskreten Bewertungsring r und $y \in \mathfrak{m}_B - \mathfrak{m}_B^2$ ein regulärer Parameter von B, ist ferner $\mathfrak{P}$ ein Primideal von B mit $y \in \mathfrak{P}$, so gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}'$ von B mit den Eigenschaften $y \notin \mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}' + B \cdot y$.*

Auch die in § 1, g) *aufgeführte Aussage gilt dann für beliebige reguläre lokale Ringe A.*

§ 3. Richtigkeit unserer Vermutung in Spezialfällen

a) Ist y ein „guter regulärer Parameter", d. h. kann y als Variable einer Potenzreihendarstellung von $B = r[X_1, \ldots, X_n]$ gewählt werden, so ist unsere Vermutung richtig.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $B = r[Y_1, \ldots, Y_n] = r[Y_1, \ldots, Y_{n-1}][Y_n]$ mit $Y_n = y$. Mit $C = r[Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$ ist somit $B = C[y]$. Nun sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal von B, $y \in \mathfrak{P}$. Wir bilden $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{P} \cap C$. $\mathfrak{p}_1$ ist Primideal in C. Das Erweiterungsideal $\mathfrak{p}' = B \cdot \mathfrak{p}_1$ besitzt die gewünschten Eigenschaften: $y \notin \mathfrak{p}'$, denn $B \cdot \mathfrak{p}_1$ besteht gerade aus denjenigen Potenzreihen $\sum_{\nu \geq 0} b_\nu y^\nu$ in y, deren

sämtliche Koeffizienten $b_\nu \in \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{P} \cap C$, und $1 \notin \mathfrak{P}$. $\mathfrak{p}'$ ist Primideal: $B/\mathfrak{p}' \cong \cong C/\mathfrak{p}_1[y]$ ist nullteilerfrei. Schließlich ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}' + B\cdot y$. Mit $\sum\limits_{\nu \geq 0} b_\nu y^\nu \in \mathfrak{P}$ ist nämlich $b_0 = \sum\limits_{\nu \geq 0} b_\nu y^\nu - \sum\limits_{\nu \geq 1} b_\nu y^\nu = \sum\limits_{\nu \geq 0} b_\nu y^\nu - \left(\sum\limits_{\nu \geq 1} b_\nu y^{\nu-1}\right) y$ wegen $y \in \mathfrak{P}$ ebenfalls in $\mathfrak{P}$ enthalten, also $b_0 \in \mathfrak{P} \cap C = \mathfrak{p}_1$. Somit ist $\sum\limits_{\nu \geq 0} b_\nu y^\nu \in \mathfrak{p}' + B\cdot y$, also $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{p}' + B\cdot y$. Die umgekehrte Inklusion ist trivialerweise erfüllt.

Bemerkung: y ist genau dann ein „guter Parameter", wenn der Restklassenring $A \cong B/B\cdot y$ wieder ein Potenzreihenring, also unverzweigt, ist. Uns interessiert aber gerade der Fall eines verzweigten regulären Ringes A. y kann dann also *kein* „guter Parameter" sein.

b) Unsere Vermutung ist richtig für Primideale $\mathfrak{P}$ des Ranges 2. Es gilt nämlich der

Satz: *Für Primideale $\mathfrak{P}$ des Ranges 2 ist unsere Vermutung gleichbedeutend mit der eindeutigen Primfaktorzerlegung im Ring A. Letztere ist nach* Auslander-Buchsbaum [2] *in beliebigen regulären lokalen Ringen A gültig.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung in A unsere Vermutung für $\mathfrak{P}$ vom Range 2 folgt. Mit $\mathfrak{p} = \varphi(\mathfrak{P}) \subset A$ ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}) = 1$, folglich $\mathfrak{p}$ Hauptideal: $\mathfrak{p} = (t)$. $t' \in B$ sei ein Urbild von t: $\varphi(t') = t$. Dann ist t' irreduzibel. Aus einer echten Zerlegung von t' in irreduzible Faktoren, also Nichteinheiten aus $\mathfrak{m}_B$, würde man nämlich durch Anwendung des Homomorphismus φ eine entsprechende Zerlegung von t in Nichteinheiten aus $\mathfrak{m}_A$ erhalten, entgegen der Primidealeigenschaft von $\mathfrak{p} = (t)$. Da B eindeutige Primelementzerlegung besitzt, ist $\mathfrak{p}' = (t')$ prim. Ferner ist $\varphi(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}$, also, da $B\cdot y$ der Kern des Epimorphismus φ ist, $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}' + B\cdot y$. — Nun sei umgekehrt $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A des Ranges 1. Wir zeigen, daß aus unserer Vermutung folgt: $\mathfrak{p}$ ist Hauptideal. Dies ist aber mit der eindeutigen Primfaktorzerlegung in A gleichbedeutend. Sei $\mathfrak{P} = \overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{p}) \subset B$. $\mathfrak{P}$ ist ein Primideal vom Range 2. Nach unserer Vermutung gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}'$ von B mit $y \notin \mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}' + B\cdot y$. Da $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{P}$, ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}') = 1$. B besitzt eindeutige Primelementzerlegung, also ist $\mathfrak{p}'$ Hauptideal: $\mathfrak{p}' = (t')$. Aus $\varphi(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}$ folgt aber mit $\varphi(t') = t$ $\mathfrak{p} = (t)$ w. z. z. w.

c) Wird das Primideal $\mathfrak{p} = \varphi(\mathfrak{P}) \subset A$ von der richtigen Elementeanzahl erzeugt, d. h. gibt es für $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}) = s$ eine Darstellung der Gestalt $\mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_s)$, so ist unsere Vermutung für $\mathfrak{P}$ richtig.

Beweis: Mit $p_1', \ldots, p_s'$ als Urbildern der $p_1, \ldots, p_s$ ist $\mathfrak{P} = (p_1', \ldots, p_s', y)$. Nun ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{P}) = s + 1$, also (vgl. [9], chap. IV) $p_1', \ldots, p_s', y$ eine B-Folge (B ist regulär, also Cohen-Macaulay-Ring). Somit ist y Nichtnullteiler von $B/(p_1', \ldots, p_s')$, also in keinem der zu $(p_1', \ldots, p_s')$ assoziierten Primideale enthalten. Wegen $\mathfrak{P} \supset (p_1', \ldots, p_s')$ gibt es ein solches $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{P}$. Aus $\mathfrak{p}' \supset (p_1', \ldots, p_s')$ folgt dann aber auch $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}' + B\cdot y$ und $y \notin \mathfrak{p}'$, w. z. z. w.

Bemerkung: Offenbar ist die eine Hälfte der Aussage des Satzes unter b) in c) enthalten.

§ 4. Ansatz zum Beweis unserer Vermutung mit Hilfe des Formenringes

Wir gehen aus von § 3, a). Dort konnten wir unsere Vermutung beweisen für den Fall, daß y ein „guter regulärer Parameter" des Potenzreihenringes B war. Dies trifft jedoch gerade in dem uns interessierenden Fall nicht zu. Nun wird aber jeder reguläre Parameter eines regulären lokalen Ringes B im Formenring von B, dem Ring $G(B) = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{m}^\nu/\mathfrak{m}^{\nu+1}$, zu einem „guten Parameter", nämlich einer Polynomvariablen. Ist nämlich $y, y_1, \ldots, y_n$ ein reguläres Parametersystem von B, d. h. $\mathfrak{m}_B = (y, y_1, \ldots, y_n)$, $\dim B = n+1$, und bezeichnen wir die Anfangsformen der Elemente $x \in B$ mit $\dot{x} \in G(B)$ (ist $x \in \mathfrak{m}^\nu$, $\notin \mathfrak{m}^{\nu+1}$, so setzt man $\dot{x} = x + \mathfrak{m}^{\nu+1} \in \mathfrak{m}^\nu/\mathfrak{m}^{\nu+1}$), so bilden die Elemente $\dot{y}, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = G_1(B)$ ein Erzeugendensystem des Ringes $G(B)$ über $G_0(B) = B/\mathfrak{m} = k$: $G(B) = k[\dot{y}, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n]$. Nach KRULL [3] ist die Regularität von B gleichbedeutend damit, daß $G(B) = k[\dot{y}, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n]$ freier Polynomring in den Variablen $\dot{y}, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n$ über dem Restklassenkörper k ist. Für ein Ideal $\mathfrak{b} \subset B$ definiert man als *Leitideal* von $\mathfrak{b}$ das homogene Ideal $\dot{\mathfrak{b}} = (\{\dot{x} \mid x \in \mathfrak{b}\}) \subset G(B)$, das also erzeugt wird von den Anfangsformen aller Elemente des Ideals $\mathfrak{b}$. Ist nun $\mathfrak{P}$ das gegebene Primideal von B, $y \in \mathfrak{P}$, so gilt für das zugehörige Leitideal $\dot{\mathfrak{P}}$: $\dot{y} \in \dot{\mathfrak{P}}$. $\dot{\mathfrak{P}}$ ist nicht mehr notwendig ein Primideal in $G(B)$. Der in § 3, a) angewandte Prozeß liefert jedoch trotzdem ein homogenes Ideal $\mathfrak{a}' \subset G(B)$ mit den Eigenschaften: $\dot{y}$ ist Nichtnullteiler von $G(B)/\mathfrak{a}'$ und $\dot{\mathfrak{P}} = \mathfrak{a}' + G(B) \cdot \dot{y}$. Dazu hat man lediglich mit $H = k[\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n]$ und $G(B) = H[\dot{y}]$ $\mathfrak{a}' = G(B) \cdot (\dot{\mathfrak{P}} \cap H)$ zu setzen. Dann ergibt sich die zweite Eigenschaft wie in § 3, a). Zur ersten genügt es, zu bemerken, daß ein Polynom in $\dot{y}$ genau dann zu $\mathfrak{a}'$ gehört, wenn seine sämtlichen Koeffizienten zu $\dot{\mathfrak{P}} \cap H$ gehören. Die letztere Eigenschaft ist aber invariant gegenüber Multiplikation mit $\dot{y}$. Alles kommt nun darauf an, *ein Ideal* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{P}$ *von* B *so zu bestimmen, daß sein Leitideal* $\dot{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}'$ *wird.* Ist dies möglich, dann sind wir fertig. Nach KRULL [3], Satz 4 ist nämlich wegen „$\dot{y}$ Nichtnullteiler von $G(B)/\dot{\mathfrak{a}}$" auch „y Nichtnullteiler von $B/\mathfrak{a}$". Ebenfalls nach [3], Satz 12 ist wieder auf Grund der Nichtnullteilereigenschaft von $\dot{y}$ bezüglich $G(B)/\dot{\mathfrak{a}}$ mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + B \cdot y$ $\dot{\mathfrak{b}} = \dot{\mathfrak{a}} + G(B) \cdot \dot{y}$, also wegen $\dot{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}'$ $\dot{\mathfrak{P}} = \dot{\mathfrak{b}}$. Daraus folgt aber, da $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{a} + B \cdot y = \mathfrak{b}$, nach [3], Satz 3 $\mathfrak{P} = \mathfrak{b}$, d. h. $\mathfrak{P} = \mathfrak{a} + B \cdot y$. Da y Nichtnullteiler von $B/\mathfrak{a}$ ist, ist y in keinem der zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primideale enthalten. Es gibt aber ein solches $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{P}$. Für dieses gilt dann $y \notin \mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}' + B \cdot y$, w.z.z.w.

Literatur

[1] AUSLANDER, M., and D. BUCHSBAUM: Homological dimension in local rings. Trans. Am. Math. Soc. **84**, 390—405 (1957).

[2] AUSLANDER, M., and D. BUCHSBAUM: Unique factorization in regular local rings. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **45**, 733—734 (1959).

[3] KRULL, W.: Dimensionstheorie in Stellenringen. J. reine angew. Math. **179**, 204—226 (1938).

[4] LANG, S.: Introduction to algebraic geometry. New York 1958.
[5] NAGATA, M.: Algebraic geometry over Dedekind domains. I. Am. J. Math. 78, 78—116 (1956).
[6] SAMUEL, P.: Algèbre local. Paris 1953.
[7] SAMUEL, P.: Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie algébrique. Berlin 1955.
[8] SERRE, J. P.: Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens. Proc. Intern. Symposium on Algebraic Number Theory. Tokyo & Nikko 1956.
[9] SERRE, J. P.: Multiplicites d'intersection. Cours au Collège de France 1957—58 (vervielfältigt).
[10] WEIL, A.: Foundations of algebraic geometry. New York 1946.

(Eingegangen am 29. November 1960)

Körner, O.
Math. Annalen 143, 344—378 (1961)

Erweiterter Goldbach-Vinogradovscher Satz in beliebigen algebraischen Zahlkörpern

Von

Otto Körner in Marburg

Einleitung

In einer früheren Arbeit [3] bewies ich den Goldbach-Vinogradovschen Satz in einer Rademacherschen Verallgemeinerung [5] für reell-quadratische Zahlkörper mit Hilfe einer Methode der analytischen Zahlentheorie, die mit endlichen trigonometrischen Summen operiert und auf Vinogradov [9] und Siegel [7] zurückgeht. In der vorliegenden Arbeit benutze ich diese Methode, um den Goldbach-Vinogradovschen Satz auf beliebige algebraische Zahlkörper auszudehnen und in verschiedener Hinsicht zu verallgemeinern. Die Übertragung der Methode auf beliebige algebraische Zahlkörper bereitet keine wesentlichen Schwierigkeiten. Um aber bei höherem Körpergrad die Übersichtlichkeit des Beweisganges zu wahren, ersetze ich einige Abschätzungsverfahren, die ich für den reell-quadratischen Fall heranzog, durch erheblich einfachere. Ferner verschärfe ich das Hauptresultat (Satz 1) bezüglich des asymptotischen Verhaltens durch Angabe einer asymptotischen Reihenentwicklung.

Zur Formulierung unserer Aufgabe ist es zunächst nötig, einige Abkürzungen und Begriffe zu erklären. Der unseren Betrachtungen zugrunde liegende algebraische Zahlkörper K sei vom Grade n über dem Körper der rationalen Zahlen und befinde sich unter den n zueinander konjugierten Körpern $K^{(1)},\ldots,K^{(n)}$, wobei $n = n_1 + 2n_2$, $K^{(l)}$ reell für $l = 1,\ldots,n_1$ und $K^{(l)}, K^{(l+n_2)}$ konjugiert komplex zueinander für $l = n_1+1,\ldots,n_1+n_2$ seien. Ferner bezeichne D die Diskriminante, H die Klassenzahl, R den Regulator und w die Anzahl der Einheitswurzeln von K. Für eine Zahl γ aus K bedeute $\gamma^{(l)}$ die zu ihr konjugierte in $K^{(l)}$ und $N(\gamma)$ ihre Norm. γ heißt totalpositiv (in Symbolen: $\gamma \succ 0$), wenn $\gamma^{(l)} > 0$ für $l = 1,\ldots,n_1$ ist, und Primzahl, wenn das zugehörige Hauptideal (γ) ein Primideal von K ist. Wir setzen $e_l = 1$ für $l = 1,\ldots,n_1$ und $e_l = 2$ für $l = n_1+1,\ldots,n_2+n_1$, verwenden kleine deutsche Buchstaben für Ideale von K, verstehen unter $\varphi(\mathfrak{a})$ bzw. $\mu(\mathfrak{a})$ die Eulersche bzw. die Möbiussche Funktion für Ideale und weisen den Symbolen $N(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \mid \alpha$, $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ usw. die in der Zahlentheorie übliche Bedeutung zu.

Bei der Diskussion des reell-quadratischen Falles stellten wir uns die Aufgabe, die Anzahl der Darstellungen einer totalpositiven ganzen Zahl λ aus K als Summe von $r (r \geq 3)$ totalpositiven Primzahlen aus K in ihrer asymptotischen Größenordnung für $N(\lambda) \to \infty$ anzugeben. Diese Fragestellung wird nun in dreifacher Weise verallgemeinert.

Erstens betrachten wir nicht nur Zerlegungen von λ in Primzahlsummanden, sondern auch solche, bei denen Primideale, die nicht notwendig in der Hauptidealklasse liegen, eine Rolle spielen[1]). Hierzu definieren wir zu einem ganzen Ideal $\mathfrak{t} \neq (0)$ die Menge $\Omega(\mathfrak{t})$, bestehend aus allen totalpositiven Körperzahlen ω, für die $(\omega)\mathfrak{t}^{-1}$ ein Primideal von K ist, und fragen nach der Anzahl der Zerlegungen von λ in r Summanden aus $\Omega(\mathfrak{t})$[2]). So kommen die Primideale der durch $\mathfrak{t}^{-1}$ repräsentierten Idealklasse ins Spiel. Für $\mathfrak{t} = (1)$ ist $\Omega(\mathfrak{t})$ gerade die Menge aller totalpositiven Primzahlen von K.

Die beiden anderen Verallgemeinerungen, die schon von Rademacher [6] formuliert wurden, bestehen darin, daß die Zerlegungssummanden ω bestimmten Restklassen nach einem festen ganzen Ideal $\mathfrak{s}$ von K entnommen werden und jede Zerlegung mit einem komplexen Gewicht von absolutem Betrage 1, das sich aus verallgemeinerten Größencharakteren aufbaut, gezählt wird. Die komplexen Darstellungsgewichte sollen sich aus Funktionen $\Lambda_m(\gamma)$ $(m = 1, \ldots, r)$ zusammensetzen, die für alle Körperzahlen $\gamma \neq 0$ definiert sind durch

$$\Lambda_m(\gamma) = \prod_{l=1}^{n_1+n_2} |\gamma^{(l)}|^{i v_{ml}} \prod_{l=n_1+1}^{n_1+n_2} \left(\frac{\gamma^{(l)}}{|\gamma^{(l)}|}\right)^{w_{ml}} \qquad (m = 1, \ldots, r).$$

Hierbei seien die $v_{ml}(m = 1, \ldots, r; l = 1, \ldots, n_1 + n_2)$ beliebige reelle und die $w_{ml}(m = 1, \ldots, r; l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2)$ beliebige ganzrationale Zahlen. Diese Funktionen sind offenbar Verallgemeinerungen der Größencharaktere [1] von K, die man bei einer speziellen Wahl der v_{ml}, w_{ml} erhält.

Das Hauptproblem dieser Arbeit ist nun, den Ausdruck

$$A_r(\lambda) = \sum_{\omega_1, \ldots, \omega_r} \prod_{m=1}^{r} \Lambda_m(\omega_m) \tag{1}$$

für $r \geqq 3$, $\mathfrak{l} \mid \lambda$, $\lambda \succ 0$ und $N(\lambda) \to \infty$ asymptotisch auszuwerten. In (1) wird summiert über alle r-tupel $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ von Zahlen aus $\Omega(\mathfrak{t})$, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\omega_1 + \cdots + \omega_r = \lambda, \tag{2}$$

$$\omega_m \equiv \sigma_m \bmod \mathfrak{s} \qquad (m = 1, \ldots, r), \tag{3}$$

$$|\omega_m^{(l)}| < |\lambda^{(l)}| \qquad (m = 1, \ldots, r; l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2), \tag{4}$$

wobei $\mathfrak{s}$ ein fest gewähltes ganzes Ideal $\neq (0)$ von K und die σ_m feste ganze, zu $\mathfrak{s}$ teilerfremde Körperzahlen sind. Die Bedingung (4) fordern wir, um die Endlichkeit von $A_r(\lambda)$ für nicht-totalreelle Körper (d. h. $n_2 > 0$) zu sichern. Für totalreelle Körper ist $A_r(\lambda)$ immer endlich, da aus (2), $\lambda \succ 0$, $\omega_m \succ 0$

[1]) Diese Verallgemeinerung, die mir erst richtig der Idealtheorie algebraischer Zahlkörper angepaßt scheint, verdanke ich einer Anregung von Prof. C. L. Siegel.

[2]) Man kann allgemeiner Zerlegungen der Art $\lambda = \omega_1 + \cdots + \omega_r$ betrachten, wo ω_j aus $\Omega(\mathfrak{t}_j)$ $(j = 1, \ldots, r)$ und $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_r$ feste ganze Ideale $\neq (0)$ sind. Unsere Überlegungen müßten dann nur bei der Summation der singulären Reihe $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ (s. § 6) abgeändert werden. Obwohl sich auch hier $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ leicht summieren läßt, sehen wir von der Behandlung dieses Falles ab, da die Bedingungen für das Nichtverschwinden von $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ formal etwas unübersichtlich würden.

($m = 1, \ldots, r$) die Ungleichungen $0 < \omega_m^{(l)} < \lambda^{(l)}$ ($l = 1, \ldots, n$; $m = 1, \ldots, r$) resultieren[3]).

Das Hauptresultat unserer Untersuchungen ist

Satz 1. *Für alle totalpositiven ganzen Zahlen λ aus K gilt bei $r \geqq 3$ mit beliebigem natürlichen f für $N(\lambda) \to \infty$ die asymptotische Formel*

$$A_r(\lambda) = \frac{\sqrt{|D|}}{(4\pi)^{n_2}} \left(\frac{w}{2^{n_1 - n_2} R H}\right)^r \mathfrak{S}_r(\lambda) \prod_{m=1}^{r} \Lambda_m(\lambda) \sum_{k=0}^{f-1} \frac{b_k N(\lambda)^{r-1}}{(\log N(\lambda))^{r+k}} + O\left(\frac{N(\lambda)^{r-1}}{(\log N(\lambda))^{r+f}}\right),$$

wobei die O-Konstante nur von K, r, f, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und den nr Größen v_{ml}, w_{ml} abhängt,

$$b_k = i^k \prod_{m=1}^{r} \Delta_m(\mathfrak{t}) \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_r \geqq 0 \\ k_1 + \cdots + k_r = k}} \left(\sum_{l=1}^{n_1+n_2} e_l \frac{\partial}{\partial v_{1l}}\right)^{k_1} \cdots \left(\sum_{l=1}^{n_1+n_2} e_l \frac{\partial}{\partial v_{rl}}\right)^{k_r} \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{r} (\Delta_m(\mathfrak{t}))^{-1} \prod_{l=1}^{n_1} \frac{\prod_{m=1}^{r} \Gamma(1 + i v_{ml})}{\Gamma\left(r + i \sum_{m=1}^{r} v_{ml}\right)} \times$$

$$\times \prod_{l=n_1+1}^{n_1+n_2} \int_0^\infty \prod_{m=1}^{r} \left(\int_0^1 J_{w_{ml}}(zu) u^{1+iv_{ml}} du\right) J_{\sum_{m=1}^{r} w_{ml}}(z) z\, dz,$$

$$\Delta_m(\mathfrak{t}) = N(\mathfrak{t})^{\frac{i}{n} \sum_{l=1}^{n_1+n_2} v_{ml}} \quad (m = 1, \ldots, r)$$

und $J_v(z)$ die v-te Besselsche Funktion ist[4]). *Speziell wird für $v_{ml} = w_{ml} = 0$* ($m = 1, \ldots, r$; $n_1 + 1 \leqq l \leqq n_1 + n_2$):

$$\int_0^\infty \prod_{m=1}^{r} \left(\int_0^1 J_{w_{ml}}(zu) u^{1+iv_{ml}} du\right) J_{\sum_{m=1}^{r} w_{ml}}(z) z\, dz \tag{5}$$
$$= \frac{2r}{r+1} \int_0^\infty J_1^{r+1}(z) \frac{dz}{z^r} > 0.$$

---

[3]) Es gibt natürlich viele andere Möglichkeiten, die Endlichkeit von $A_r(\lambda)$ zu erzwingen. Die Bedingung (4) ist aber besonders einfach.

Andere mögliche Verallgemeinerungen unseres Problems, die sich ohne weiteres mit unserer Methode bewältigen lassen, erhält man, wenn man das Ideal $\mathfrak{s}$ in (3) vom Index m abhängig macht und die Forderung der Totalpositivität an λ und die ω_m durch beliebige andere Vorzeichenbedingungen für die reellen Konjugierten dieser Zahlen ersetzt.

[4]) Der Differentialoperator $\left(\sum_{j=1}^{s} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^m$ (a_j komplex, m ganzrational $\geqq 0$) ist rekursiv erklärt durch:

$$\left(\sum_{j=1}^{s} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^0 F(x_1, \ldots, x_s) = F(x_1, \ldots, x_s),$$

$$\left(\sum_{j=1}^{s} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{m+1} F(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{j=1}^{s} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{j=1}^{s} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^m F(x_1, \ldots, x_s).$$

Ferner werden leere Summen gleich Null und leere Produkte gleich Eins gesetzt.

Unter $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ verstehen wir die zu unserem additiven Problem gehörige „singuläre Reihe", deren Eigenschaften sich wie folgt formulieren lassen. Sei $\mathfrak{l}$ das Produkt aller verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}$ von K mit $N(\mathfrak{p}) = 2$, oder falls keine solchen $\mathfrak{p}$ in K vorhanden sind, sei $\mathfrak{l} = (1)$. Es werde $\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{l}}{(\mathfrak{l}, \mathfrak{s})}$ gesetzt und mit g die Anzahl der Primidealteiler von $\mathfrak{L}$ bezeichnet. Wenn

$$(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = 1\,, \tag{6}$$

$$\lambda \equiv \sum_{m=1}^{r} \sigma_m \bmod \mathfrak{s}\,, \tag{7}$$

$$\mathfrak{t} \mid \lambda \tag{8}$$

und

$$\text{entweder } \mathfrak{L} \mid r,\ \mathfrak{L} \mid \frac{\lambda}{\mathfrak{t}} \text{ oder } (\mathfrak{L}, r) = 1,\ \left(\mathfrak{L}, \frac{\lambda}{\mathfrak{t}}\right) = 1 \tag{9}$$

ist, so gilt:

$$\mathfrak{S}_r(\lambda) = \frac{2^r N(\mathfrak{s})}{N(\mathfrak{t})^{r-1}\varphi^r(\mathfrak{s})}\, C_r \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{s} \\ \mathfrak{p} \mid \lambda \mathfrak{t}^{-1},\ N(\mathfrak{p}) > 2}} \frac{(N(\mathfrak{p}) - 1)^r + (-1)^r (N(\mathfrak{p}) - 1)}{(N(\mathfrak{p}) - 1)^r - (-1)^r} \times$$

$$\times \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{s} \\ N(\mathfrak{p}) > 2}} \frac{(N(\mathfrak{p}) - 1)^r}{(N(\mathfrak{p}) - 1)^r - (-1)^r}\,,$$

wobei

$$C_r = \prod_{N(\mathfrak{p}) > 2} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p}) - 1}\right)^r\right)$$

gesetzt ist und die Produkte über alle Primideale $\mathfrak{p}$ von K mit den angegebenen Bedingungen erstreckt werden. Offenbar gibt es in diesem Falle zwei positive, nur von K, r, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ abhängige Konstanten c_1, c_2 mit

$$c_1 < \mathfrak{S}_r(\lambda) < c_2\,.$$

Ist mindestens eine von den Bedingungen (6) bis (9) nicht erfüllt, so verschwindet $\mathfrak{S}_r(\lambda)$[5].

Ist $n_2 = 0$, $\mathfrak{t} = (1)$ und $\Lambda_m(\gamma)$ $(m = 1, \ldots, r)$ Größencharakter mod $\mathfrak{s}$, so erhalten wir aus Satz 1 bei $f = 1$ ein Ergebnis von Rademacher [6] für totalreelle Körper, das er mit Hilfe einer verallgemeinerten Riemannschen Vermutung ableitete. Für $n_2 > 0$ ist unsere Problemstellung etwas anders als in jener Rademacherschen Arbeit [6], aber wie dort treten Schwierigkeiten beim Nachweis des Nichtverschwindens gewisser Terme im Hauptglied der asymptotischen Formel auf. Kritisch sind nämlich die Integrale (5), deren Nichtverschwinden wir nur im Fall $v_{ml} = w_{ml} = 0$ $(m = 1, \ldots, r;\ n_1 + 1 \leq l \leq n_1 + n_2)$ zeigen.

Nennt man alle ganzen Zahlen λ aus K, für die $(\mathfrak{l}, \lambda) = 1$ ist, ungerade, so folgt aus Satz 1 für $r = 3$, $f = 1$, $\mathfrak{t} = \mathfrak{s} = (1)$ und $v_{ml} = w_{ml} = 0$ $(m = 1, \ldots, r;$ $l = 1, \ldots, n_1 + n_2)$ das

[5]) Ist mindestens eine der Bedingungen (6) bis (8) nicht erfüllt, so ergeben elementare zahlentheoretische Überlegungen $A_r(\lambda) = 0$, was in diesem Falle mehr besagt als Satz 1.

Korollar zu Satz 1. *Es existiert eine nur von K abhängige positive Konstante A_0 derart, daß jede ungerade totalpositive Körperzahl λ mit $N(\lambda) > A_0$ sich als Summe dreier totalpositiver Primzahlen aus K darstellen läßt.*

Dies ist offenbar das Analogon des Goldbach-Vinogradovschen Satzes.

Einige der folgenden Bezeichnungen sind der Arbeit [8] entlehnt. Sei E die Menge aller Punkte $\xi = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)})$, deren Koordinaten $\xi^{(l)}$ folgende Eigenschaften besitzen: $\xi^{(l)}$ ist reell für $l = 1, \ldots, n_1$; $\xi^{(l)}$ und $\xi^{(l+n_2)}$ sind zueinander konjugiert komplex für $l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$. Jede Zahl γ aus K fassen wir als Punkt von E auf, indem wir mit den n Konjugierten von γ den Punkt $\gamma = (\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)})$ bilden. Auf E werden folgende Funktionen definiert:

$$S(\xi) = \sum_{l=1}^{n} \xi^{(l)}, \; N(\xi) = \prod_{l=1}^{n} \xi^{(l)}.$$

Entsprechend werde (wie bei Spur und Norm) auch der Definitionsbereich der Funktionen $\Lambda_m(\gamma)$ $(m = 1, \ldots, r)$ ausgedehnt auf die Menge aller Punkte ξ aus E mit $N(\xi) \neq 0$. Der Raum E ist umkehrbar eindeutig auf den reellen n-dimensionalen euklidischen Raum E^* bezogen, wenn jedem Punkt ξ aus E folgender Punkt ξ^* mit den Koordinaten $\xi^{*(l)}$ zugeordnet wird:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \xi^{*(l)} &= \xi^{(l)} && (l = 1, \ldots, n_1), \\ \xi^{*(l)} &= \operatorname{Re} \xi^{(l)} && \\ \xi^{*(l+n_2)} &= \operatorname{Im} \xi^{(l)} && (l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2). \end{aligned}$$

Wenn im folgenden Symbole für Punkte oder Teilmengen von E mit einem Stern versehen sind, so sollen damit immer die Bilder der Größen aus E in E^* bei der Abbildung (10) bezeichnet werden. Für Punkte aus E verwenden wir kleine griechische Buchstaben ohne oberen Index. Relationen zwischen solchen Buchstaben stehen immer als Abkürzung für die n entsprechenden Relationen zwischen den zugehörigen Koordinaten — eine Ausnahme bilden hierbei $S(\xi)$, $N(\xi)$, $\Lambda_m(\xi)$. Beispielsweise bedeutet für zwei Punkte ξ und η die Ungleichung $|\xi| < |\eta|$, daß $|\xi^{(l)}| < |\eta^{(l)}|$ $(l = 1, \ldots, n)$ ist. Im folgenden werden Symbole für Mengenoperationen in ihrer üblichen Bedeutung verwendet, wobei der Deutlichkeit wegen bemerkt sei, daß mit Σ und $\cup$ die disjunkte Vereinigung und die Vereinigung schlechthin unterschieden werden und daß für zwei Mengen M_1, M_2 die Menge $M_1 - M_2$ die Menge aller Elemente sei, die in M_1 und nicht in M_2 liegen.

Es sei nun durchweg λ eine totalpositive ganze Zahl aus K, r und f feste natürliche Zahlen mit $r \geqq 3$, und die Größen $\mathfrak{t}, \mathfrak{s}, \sigma_m, v_{ml}, w_{ml}$ seien wie bei der voraufgegangenen Definition von $A_r(\lambda)$ erklärt. Ferner werden folgende Abkürzungen benutzt:

$$\begin{aligned} &\Theta = r + f + 2, \; \Theta_1 = (8n+4)\Theta + 8n^2 + n, \; \Theta_2 = (4n+2)\Theta + 4n^2 + n, \\ &\Theta_3 = 2\Theta + 2n, \; \Theta_4 = (4n+2)\Theta + 4n^2, \; \Theta_5 = (4n^3 + 6n^2 + 2n + 1)\Theta + 4n^4 + \\ &\qquad + 5n^3 + 1, \\ &A = \sqrt[n]{N(\lambda)}, \quad a = \log A, \quad h = A a^{-\Theta_1}, \quad t = a^{\Theta_1} \quad \text{für } N(\lambda) > 1. \end{aligned}$$

Sind B und C komplexwertige Funktionen gewisser Variablen und $C \geqq 0$, so bedeute

$$B = O(C) \text{ oder } B \ll C\,,$$

daß es eine Konstante k gibt mit

$$|B| \leqq kC\,.$$

Die O-Konstante k soll immer, falls nicht ausdrücklich etwas anderes verlangt wird, nur von $K, r, \mathfrak{f}, \mathfrak{t}, \mathfrak{s}$ und den nr Größen $v_{m\,l}$, $w_{m\,l}$ abhängen. Da sich fast alle Abschätzungen auf den Grenzübergang $A \to \infty$ beziehen, ist es im folgenden oft zweckmäßig, A als genügend groß anzunehmen — hierauf wird nicht immer besonders hingewiesen —, d. h. $A > A_0$, wo A_0 nur von $K, r, \mathfrak{f}, \mathfrak{t}, \mathfrak{s}$ und den nr Größen $v_{m\,l}$, $w_{m\,l}$ abhängt. Für eine reelle Zahl x bezeichne $[x]$ die größte ganzrationale Zahl $\leqq x$, und es sei

$$\{x\} = \begin{cases} x - [x] \text{ für } x - [x] \leqq \frac{1}{2}, \\ x - [x] - 1 \text{ für } x - [x] > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

§ 1. Formale Entwicklungen und Farey-Zerschneidung

Folgende trigonometrischen Summen, definiert für alle Punkte ξ aus E, werden eine große Rolle spielen:

$$T^{(m)}(\xi) = \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{D}(\mathfrak{t}) \\ \omega \equiv \sigma_m \bmod \mathfrak{s} \\ |\omega| < |\lambda|}} \Lambda_m(\omega) e^{2\pi i S(\omega\xi)} \qquad (m = 1, \ldots, r)\,.$$

Ist $\mathfrak{d}$ die Differente von K und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ eine fest gewählte Basis von $\mathfrak{d}^{-1}$, so definieren wir den zugehörigen Fundamentalbereich F in E als die Menge aller Punkte ξ aus E mit

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} u_j \mu_j\,, \quad 0 \leqq u_j < 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)\,.$$

Bei Einführung von $u_1, \ldots, u_n$ als Integrationsvariablen bestätigt man leicht die Formel

$$A_r(\lambda) = 2^{n_1} \sqrt{|D|} \int_{F^*} e^{-2\pi i S(\lambda\xi)} \prod_{m=1}^{r} T^{(m)}(\xi)\, d\xi^*\,, \tag{11}$$

wobei $d\xi^* = d\xi^{*(1)} \cdots d\xi^{*(n)}$ sei.

Das Integrationsgebiet F^* wird nun mit Hilfe der von Siegel [8] verallgemeinerten Farey-Zerschneidung unterteilt. Für eine Zahl γ aus K sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\gamma$ der Nenner von $\gamma\mathfrak{d}$, d. h. $\mathfrak{a} = (1, \gamma\mathfrak{d})^{-1}$, und B_γ sei die Menge aller Punkte ξ aus E mit

$$N(\operatorname{Max}(h\,|\xi - \gamma|, t^{-1})) \leqq N(\mathfrak{a})^{-1}\,.$$

Offenbar ist B_γ leer, wenn $N(\mathfrak{a}) > t^n$ ist. Unmittelbar aus der Definition von B_γ folgt

Hilfssatz 1. *Ist $N(\mathfrak{a}) \leqq t^n$, so enthält B_γ die Menge aller Punkte ξ aus E mit*

$$|\xi - \gamma| \leqq (ht)^{-1} \tag{12}$$

und ist enthalten in der Menge aller Punkte ξ aus E mit

$$|\xi - \gamma| \leqq h^{-1} t^{n-1}\,. \tag{13}$$

Ist ferner ξ ein Punkt aus E, der nicht in B_γ liegt, so gilt

$$\max_{l=1,\ldots,n} |\xi^{(l)} - \gamma^{(l)}| > h^{-1} N(\mathfrak{a})^{-1/n}. \tag{14}$$

Es sei V die Vereinigungsmenge aller B_γ, wenn γ alle Zahlen aus K durchläuft. Von SIEGEL [8, Lemma 5 und 6] übernehmen wir die folgenden zwei Hilfssätze[6]):

Hilfssatz 2. *Sind γ_1 und γ_2 zwei verschiedene Zahlen aus K, so haben B_{γ_1} und B_{γ_2} keinen Punkt gemeinsam.*

Hilfssatz 3. *Ist ξ ein Punkt aus E, der nicht in V liegt, so gibt es eine ganze Körperzahl α und eine Zahl η aus $\mathfrak{d}^{-1}$ derart, daß*

$$|\alpha\xi - \eta| < h^{-1},\ 0 < |\alpha| \leqq h, \tag{15}$$

$$\mathrm{Max}(h\,|\alpha\xi - \eta|, |\alpha|) \geqq |D|^{-1/2}, \tag{16}$$

$$\mathrm{Max}(|\alpha^{(1)}|, \ldots, |\alpha^{(n)}|) > t, \tag{17}$$

$$N((\alpha, \eta\mathfrak{d})) \leqq |D|^{1/2}. \tag{18}$$

Zwei Punkte ξ_1, ξ_2 aus E sollen kongruent mod $\mathfrak{d}^{-1}$ heißen, wenn es eine Zahl τ aus $\mathfrak{d}^{-1}$ gibt mit $\xi_1 - \xi_2 = \tau$. Jeder Punkt aus E ist dann mod $\mathfrak{d}^{-1}$ genau einem Punkt von F kongruent. In der Menge aller Körperzahlen γ mit $N(\mathfrak{a}_\gamma) \leqq$ $\leqq t^n$ werde ein festes Restsystem mod $\mathfrak{d}^{-1}$ gewählt und mit Γ bezeichnet. Es sei

$$B = \sum_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma.$$

Nach Hilfssatz 2 ist der Durchschnitt

$$F \cap V = \sum_{\beta\in K} F \cap B_\beta = \sum_{\gamma\in\Gamma} \Big(\sum_{\mathfrak{d}^{-1}|\tau} F \cap B_{\gamma+\tau}\Big).$$

Die Gebiete $F \cap B_{\gamma+\tau}$ gehen durch die Translation $\xi + \tau \to \xi$ in die ihnen punktweise mod $\mathfrak{d}^{-1}$ kongruenten Gebiete $F_\tau \cap B_\gamma$ über, wobei F_τ das Bild von F bei dieser Translation sei. Da F Fundamentalbereich für die durch die Zahlen aus $\mathfrak{d}^{-1}$ definierte Translationsgruppe ist, so ist

$$\bigcup_{\mathfrak{d}^{-1}|\tau} (F_\tau \cap B_\gamma) = \Big(\sum_{\mathfrak{d}^{-1}|\tau} F_\tau\Big) \cap B_\gamma = B_\gamma.$$

Beachtet man noch, daß $F \cap B_\beta$ nur für endlich viele β nicht leer ist, so erkennt man, daß $F \cap V$ und B in je endlich viele Stücke zerlegt werden, die paarweise kongruent sind. Setzt man

$$G = F - V,\ \text{d. h. } F = F \cap V + G,$$

so folgt also aus (11) wegen der Invarianz des Integranden gegenüber Translationen aus $\mathfrak{d}^{-1}$:

$$\begin{aligned} A_r(\lambda) = {} & 2^{r_2}\sqrt{|D|} \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{B_\gamma^*} e^{-2\pi i S(\lambda\xi)} \prod_{m=1}^{r} T^{(m)}(\xi)\, d\xi^* \\ & + 2^{r_2}\sqrt{|D|} \int_{G^*} e^{-2\pi i S(\lambda\xi)} \prod_{m=1}^{r} T^{(m)}(\xi)\, d\xi^*. \end{aligned} \tag{19}$$

---

[6]) Diese Sätze sind bei SIEGEL [8] zwar für andere Parameter t und h ausgesprochen, aber aus ihren Beweisen ersieht man sofort, daß sie auch für unseren Fall richtig sind.

Der Beweis von Satz 1 läuft nun wie folgt weiter: In § 2 bis § 4 befassen wir uns mit der Abschätzung von $T^{(m)}(\xi)$ in G. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist Satz 2. In § 5 leiten wir eine Approximation für $T^{(m)}(\xi)$ in den B_γ her, die in Satz 3 formuliert ist. § 6 ist der Summation der singulären Reihe $\mathfrak{S}_r(\lambda)$, die später im Hauptglied der asymptotischen Formel für $A_r(\lambda)$ auftreten wird, gewidmet. In § 7 benutzen wir die über $T^{(m)}(\xi)$ und $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ erhaltenen Aussagen, um die Integrale in (19) auszuwerten und damit den Beweis des Hauptsatzes abzuschließen.

§ 2. Vorbereitungen zur Abschätzung von $T^{(m)}(\xi)$

Zunächst werden einige bekannte Tatsachen über Einheiten zusammengestellt. Ist $\mathfrak{b}$ ein ganzes Ideal von K, so heißt eine Zahl ε aus K *Einheit* mod $\mathfrak{b}$, wenn ε eine Einheit, totalpositiv und kongruent 1 mod$\mathfrak{b}$ ist. Zwei Zahlen β und γ aus K nennen wir *assoziiert* mod$\mathfrak{b}$, wenn es eine Einheit ε mod$\mathfrak{b}$ gibt mit $\gamma = \varepsilon\beta$. Sei $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n_1+n_2-1}$ eine zu jedem $\mathfrak{b}$ fest gewählte Basis der Abelschen Gruppe $\mathfrak{E}_\mathfrak{b}$ aller Einheiten mod$\mathfrak{b}$ derart, daß η_0 die endliche Untergruppe der Ordnung $w_\mathfrak{b}$, bestehend aus allen Einheitswurzeln in $\mathfrak{E}_\mathfrak{b}$ und jedes $\eta_j (j = 1, \ldots, n_1 + n_2 - 1)$ eine unendliche zyklische Untergruppe von $\mathfrak{E}_\mathfrak{b}$ erzeugt. Dann gilt

Hilfssatz 4. *Zu jeder Zahl $\gamma \neq 0$ aus K gibt es genau eine* mod$\mathfrak{b}$ *assoziierte Zahl γ_1 mit:*

$$0 \leqq \arg \gamma^{(1)} < \frac{2\pi}{w_\mathfrak{b}}, \quad \left|\frac{\gamma_1}{\sqrt[n]{|N(\gamma_1)|}}\right| = \prod_{j=1}^{n_1+n_2-1} |\eta_j|^{q_j}, \tag{20}$$

wobei die $q_j (j = 1, \ldots, n_1 + n_2 - 1)$ reelle Zahlen mit $0 \leqq q_j < 1$ sind.

Beweis [2, S. 156]: Für $n_1 + n_2 - 1 = 0$ ist Hilfssatz 4 trivial. Für $n_1 + n_2 - - 1 > 0$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\log \left|\frac{\gamma^{(l)}}{\sqrt[n]{|N(\gamma)|}}\right| = \sum_{j=1}^{n_1+n_2-1} q_j \log |\eta_j^{(l)}| \qquad (l = 1, \ldots, n_1 + n_2 - 1)$$

in den Unbekannten q_j bekanntlich eine nicht verschwindende Determinante und deshalb eine durch γ eindeutig bestimmte Lösung. Ersetzt man γ durch $\varepsilon\gamma$, wo ε ein geeignet gewähltes Produkt von Potenzen der $\eta_j (j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n_1 + n_2 - 1)$ ist, so läßt sich immer erreichen, daß $0 \leqq \arg \varepsilon^{(1)}\gamma^{(1)} < \frac{2\pi}{w_\mathfrak{b}}$, $0 \leqq q_j < 1 (j = 1, \ldots, n_1 + n_2 - 1)$ wird, und durch diese Bedingungen ist ε eindeutig bestimmt. q.e.d.

Eine Körperzahl γ_1, die (20) erfüllt, nennen wir *normiert* mod$\mathfrak{b}$.

Da $A_r(\varepsilon\lambda) = \prod_{m=1}^{r} A_m(\varepsilon) A_r(\lambda)$ für jede Einheit ε mod$\mathfrak{s}$ gilt, genügt es, Satz 1 wegen $\left|\prod_{m=1}^{r} A_m(\varepsilon)\right| = 1$ und Hilfssatz 4 für mod $\mathfrak{s}$ normierte λ zu beweisen. λ sei also für das weitere als normiert mod$\mathfrak{s}$ vorausgesetzt. Aus (20) folgt die für spätere Überlegungen nützliche Abschätzung: Es gibt zwei nur von K und $\mathfrak{s}$ abhängige Konstanten $c_3, c_4 (0 < c_3 \leqq 1, c_4 \geqq 1)$ mit

$$c_3 |N(\gamma)|^{1/n} \leqq |\gamma| \leqq c_4 |N(\gamma)|^{1/n} \tag{21}$$

für alle mods und mod (1) normierten Körperzahlen γ; insbesondere ist also

$$c_3 A \leqq |\lambda| \leqq c_4 A \,.$$

Hilfssatz 5. *Seien γ, ϱ zwei Körperzahlen $\neq 0$. Dann gibt es höchstens*

$$O\left(\left(\log\left|N\left(\frac{\varrho}{\gamma}\right)\right|\right)^{n_1+n_2-1}+1\right)$$

zu γ mod (1) *assoziierte Körperzahlen γ_1 mit $|\gamma_1| < |\varrho|$.*

Beweis: Für $n_1+n_2-1=0$ ist Hilfssatz 5 trivial. Für $n_1+n_2-1>0$ schließen wir wie folgt: Sind γ_1 und γ_2 zwei zu γ mod (1) assoziierte Zahlen mit $|\gamma_1| < |\varrho|$, $|\gamma_2| < |\varrho|$, so gibt es ganzrationale Zahlen $q_j (j=1,\ldots,n_1+n_2-1)$ mit

$$\log\left|\frac{\gamma_2^{(l)}}{\gamma_1^{(l)}}\right| = \sum_{j=1}^{n_1+n_2-1} q_j \log|\eta_j^{(l)}| \quad (l=1,\ldots,n_1+n_2-1)\,, \tag{22}$$

wobei die Zahlen $\eta_j (j=1,\ldots,n_1+n_2-1)$ die in Hilfssatz 4 auftretenden Einheiten für $\mathfrak{b}=(1)$ seien. Aus

$$\left|\frac{\gamma_2^{(l)}}{\gamma_1^{(l)}}\right| = \frac{|\gamma_2^{(l)}|}{|N(\gamma)|}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}|\gamma_1^{(j)}| < \left|N\left(\frac{\varrho}{\gamma}\right)\right| \qquad (l=1,\ldots,n)$$

und der dazu analogen Abschätzung $\left|\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right| < \left|N\left(\frac{\varrho}{\gamma}\right)\right|$ folgt mit (22):

$$q_j \ll \log\left|N\left(\frac{\varrho}{\gamma}\right)\right| \qquad (j=1,\ldots,n_1+n_2-1)\,.$$

Da die Anzahl der zu γ mod (1) assoziierten Zahlen γ_1 mit $|\gamma_1| < |\varrho|$ höchstens gleich der Anzahl aller solcher (n_1+n_2-1)-tupel $(q_1,\ldots,q_{n_1+n_2-1})$ ist, ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Zu einem ganzen Ideal $\mathfrak{b}$ aus K definieren wir die Summen

$$T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi) = \sum_{\substack{\mathfrak{t}\mathfrak{b}|\beta\\ \beta\equiv\sigma_m \bmod \mathfrak{s}\\ \beta\succ 0,\,|\beta|<|\lambda|}} \Lambda_m(\beta)\, e^{2\pi i S(\beta\xi)} \qquad (m=1,\ldots,r)\,.$$

Ihre Bedeutung zeigt sich in

Hilfssatz 6. *Sei $\mathfrak{h}$ das Produkt aller Primideale $\mathfrak{p}$ von K mit $N(\mathfrak{p}) \leqq A^{n/2}$. Dann gilt*

$$T^{(m)}(\xi) = \sum_{1|\mathfrak{b}|\mathfrak{h}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi) + O(A^{n/2} a^{n-1}) \qquad (m=1,\ldots,r)\,.$$

Beweis:

$$\sum_{1|\mathfrak{b}|\mathfrak{h}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi) = \sum_{\substack{\mathfrak{t}|\beta\\ \beta\equiv\sigma_m \bmod \mathfrak{s}\\ \beta\succ 0,\,|\beta|<|\lambda|}} \Lambda_m(\beta)\, e^{2\pi i S(\beta\xi)} \sum_{1|\mathfrak{b}|(\beta\mathfrak{t}^{-1},\mathfrak{h})} \mu(\mathfrak{b})$$

$$= \sum_{\substack{\mathfrak{t}|\beta,\,(\beta\mathfrak{t}^{-1},\mathfrak{h})=1\\ \beta\equiv\sigma_m \bmod \mathfrak{s}\\ \beta\succ 0,\,|\beta|<|\lambda|}} \Lambda_m(\beta)\, e^{2\pi i S(\beta\xi)} = T^{(m)}(\xi) + O\left(1 + \sum_{\substack{\omega\in\Omega(\mathfrak{t})\\ |\omega|<|\lambda|\\ N(\omega)\leqq N(\mathfrak{t})A^{n/2}}} 1\right).$$

Da es nach Hilfssatz 5 zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ von K höchstens $O(a^{n-1})$ Zahlen $\omega\in\Omega(\mathfrak{t})$ gibt mit $(\omega)\mathfrak{t}^{-1}=\mathfrak{p}$, $|\omega|<|\lambda|$, so ist unser eben erhaltenes Restglied

$$\ll \sum_{\substack{1|\mathfrak{b}\\ N(\mathfrak{b})\leqq A^{n/2}}} a^{n-1} \ll A^{n/2} a^{n-1}\,. \qquad \text{q.e.d.}$$

Für die weitere Untersuchung der Summen $T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi)$ empfiehlt es sich, in K die Idealklassen im engeren Sinne zu betrachten, d. h. wir nennen zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von K äquivalent im engeren Sinne (in Symbolen $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$), wenn eine totalpositive Zahl $\varkappa$ aus K existiert derart, daß $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = (\varkappa)$ ist. Fordert man noch, daß $\varkappa$ mod (1) normiert ist, was nach Hilfssatz 4 stets erreicht werden kann, so ist $\varkappa$ eindeutig durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmt. In jeder Klasse äquivalenter Ideale werde ein festes ganzes Ideal $\mathfrak{c}$ gewählt und die Gesamtheit dieser Ideale $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. $\mathfrak{M}$ ist also eine nur von K (und unserer Festsetzung) abhängige Idealmenge mit $O(1)$ Elementen. Nach dieser Festsetzung gibt es zu jedem Ideal $\mathfrak{b} \neq (0)$ von K genau ein $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{b} \sim \mathfrak{c}^{-1}$ und damit genau eine totalpositive, mod (1) normierte Zahl $\varkappa$ aus K mit $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = (\varkappa)$. Umgekehrt ist auch $\mathfrak{b}$ durch das Paar $\mathfrak{c}, \varkappa$ eindeutig bestimmt. Diese eineindeutige Zuordnung des Paares $\mathfrak{c}, \varkappa$ zu $\mathfrak{b}$ wollen wir durch die Symbole

$$\mathfrak{c} = p(\mathfrak{b}), \varkappa = q(\mathfrak{b})$$

ausdrücken. Somit haben wir für jedes ganze Ideal $\mathfrak{b} \neq (0)$:

$$T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi) = \sum_{\substack{(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \mid \varrho \\ \varrho \equiv \sigma_m \varkappa^{-1} \bmod (\mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{c})^{-1} \\ |\varrho| < |\lambda \varkappa^{-1}|, \varrho \succ 0}} \Lambda_m(\varkappa\varrho)\, e^{2\pi i S(\varkappa\varrho\xi)}, \tag{23}$$

wobei $\mathfrak{c} = p(\mathfrak{t}\mathfrak{s}\mathfrak{b}), \varkappa = q(\mathfrak{t}\mathfrak{s}\mathfrak{b})$. Für spätere Anwendungen sei noch notiert (s. (42)), daß für ganze $\mathfrak{b}$ die Zahl $\varkappa = q(\mathfrak{t}\mathfrak{s}\mathfrak{b})$ ganz ist.

Von den Inversen aller Ideale $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{M}$ werde nun je eine Basis $\tau_1, \ldots, \tau_n$ fest ausgewählt (in Symbolen: $[\tau_1, \ldots, \tau_n] = \mathfrak{c}^{-1}$). Sei β eine Zahl aus K und $[\tau_1, \ldots, \tau_n] = \mathfrak{c}^{-1}$, $\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}$. Dann gibt es ganzrationale Zahlen $a_j (j = 1, \ldots, n)$ mit

$$S(\tau_j \beta\xi) = a_j + d_j, \; d_j = \{S(\tau_j \beta\xi)\} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Mit der zu $\tau_1, \ldots, \tau_n$ komplementären Basis $\iota_1, \ldots, \iota_n$ — d. h.

$$S(\tau_j \iota_k) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases} \qquad (j, k = 1, \ldots, n)$$

— definieren wir

$$\nu = \nu(\beta, \mathfrak{c}) = \sum_{j=1}^{n} a_j \iota_j,$$

$$\zeta = \zeta(\beta, \mathfrak{c}) = \sum_{j=1}^{n} d_j \iota_j. \tag{24}$$

Nach Konstruktion gilt

$$\beta\xi = \nu + \zeta, \quad \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1} \mid \nu. \tag{25}$$

Hilfssatz 7. *Für jedes ganze Ideal $\mathfrak{b}$ von K mit $1 \leq N(\mathfrak{b}) \leq A^n$ gilt*

$$T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi) \ll X_{\mathfrak{c}}(\varkappa),$$

wobei

$$X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) = \left(\frac{A}{\sqrt[n]{|N(\varkappa)|}}\right)^{n-1} \operatorname{Min}\left(\frac{A}{\sqrt[n]{|N(\varkappa)|}}, \frac{a^n}{|\zeta^{(1)}|}, \ldots, \frac{a^n}{|\zeta^{(n)}|}\right) \tag{26}$$

und $\mathfrak{c} = p(\mathfrak{t}\mathfrak{s}\mathfrak{b}), \varkappa = q(\mathfrak{t}\mathfrak{s}\mathfrak{b}), \zeta = \zeta(\varkappa, \mathfrak{c})$ *sei.*

Beweis: Sei $[\tau_1, \ldots, \tau_n] = \mathfrak{c}^{-1}$, $d_j = \{S(\tau_j \varkappa \xi\}$, $\mathfrak{S}_0$ die Menge aller Punkte τ aus E mit $|\tau| < |\lambda \varkappa^{-1}|$, $\tau > 0$ und $\mathfrak{S}_j$ die Menge aller Punkte τ mit $|\tau - \tau_j| < < |\lambda \varkappa^{-1}|$, $\tau - \tau_j > 0 (j = 1, \ldots, n)$[7]. Dann gilt nach (23):

$$T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi)\, e^{2\pi i S(\varkappa \tau_j \xi)} = \sum_{\substack{(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \mid \varrho \\ \varrho \equiv \sigma_m \varkappa^{-1} \bmod (\mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{c})^{-1} \\ \varrho \in \mathfrak{S}_j}} \Lambda_m(\varkappa(\varrho - \tau_j))\, e^{2\pi i S(\varkappa \varrho \xi)}$$

$$(27) \qquad = \sum_{\substack{(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \mid \varrho \\ \varrho \equiv \sigma_m \varkappa^{-1} \bmod (\mathfrak{t}\mathfrak{b}\mathfrak{c})^{-1} \\ \varrho \in \mathfrak{S}_0}} \Lambda_m(\varkappa(\varrho - \tau_j))\, e^{2\pi i S(\varkappa \varrho \xi)} + O\Bigg(\sum_{\substack{(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \mid \varrho \\ \varrho \in \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}_j + \mathfrak{S}_j - \mathfrak{S}_0}} 1\Bigg)$$

$$= T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi) + O\Bigg(\sum_{\substack{(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \mid \varrho \\ \varrho \in \mathfrak{S}_0}} |\Lambda_m(\varrho) - \Lambda_m(\varrho - \tau_j)| + \sum_{\substack{(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \mid \varrho \\ \varrho \in \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}_j + \mathfrak{S}_j - \mathfrak{S}_0}} 1\Bigg).$$

Da die Punkte ϱ^* mit $(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \mid \varrho$ in E^* ein Gitter des Maschenvolumens $2^{-n_2} \sqrt{|D|} \times N(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1}$ bilden, ist die Anzahl dieser Punkte in $\mathfrak{S}_0^* - \mathfrak{S}_j^* + \mathfrak{S}_j^* - \mathfrak{S}_0^*$ höchstens von der Größenordnung des $(n-1)$-dimensionalen Volumens der Randfläche von $\mathfrak{S}_0^*$, also folgt mit (21):

$$(28) \qquad \sum_{\substack{(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \mid \varrho \\ \varrho \in \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}_j + \mathfrak{S}_j - \mathfrak{S}}} 1 \ll \left(\frac{A}{\sqrt[n]{N(\varkappa)}}\right)^{n-1}.$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf Real- und Imaginärteil von $\Lambda_m(\varrho)$ angewandt, ergibt für $\varrho \in \mathfrak{S}_0$ und $\underset{l=1,\ldots,n}{\mathrm{Min}} \; |\varrho^{(l)}|\, |\tau_j^{(l)}|^{-1} \geqq 2$:

$$(29) \qquad \begin{aligned} |\Lambda_m(\varrho) - \Lambda_m(\varrho - \tau_j)| &\ll \sum_{l=1}^{n_1+n_2} \frac{|\tau_j^{(l)}|}{|\varrho^{(l)}| - |\tau_j^{(l)}|} \ll \\ &\ll \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{|\varrho^{(l)}|} \ll \left(\frac{A}{\sqrt[n]{N(\varkappa)}}\right)^{n-1} \frac{1}{N(\varrho)}. \end{aligned}$$

Da es zu einem Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ von K nach Hilfssatz 5 höchstens

$$O\left(\log^{n-1} N\left(\frac{\lambda}{\varkappa \mathfrak{a}}\right) + 1\right)$$

Körperzahlen ϱ mit $\varrho \in \mathfrak{S}_0$, $(\varrho) = \mathfrak{a}$ gibt, folgt mit (29):

$$\sum_{\substack{(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \mid \varrho \\ \varrho \in \mathfrak{S}_0}} |\Lambda_m(\varrho) - \Lambda_m(\varrho - \tau_j)| \ll \sum_{\substack{(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \mid \varrho \\ \varrho \in \mathfrak{S}_0}} \left(\frac{A}{\sqrt[n]{N(\varkappa)}}\right)^{n-1} \frac{1}{N(\varrho)} + \sum_{\substack{(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \mid \varrho \\ \varrho \in \mathfrak{S}_0 \\ \mathrm{Min}\, |\varrho^{(l)}|\, |\tau_j^{(l)}|^{-1} < 2}} 1 \ll$$

$$(30) \qquad \begin{aligned} &\ll \left(\frac{A}{\sqrt[n]{N(\varkappa)}}\right)^{n-1} \sum_{\substack{(\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \mid \mathfrak{a} \\ 0 < N(\mathfrak{a}) < A^n}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})} \left(\log^{n-1} N\left(\frac{\lambda}{\varkappa \mathfrak{a}}\right) + 1\right) + \\ &+ \left(\frac{A}{\sqrt[n]{N(\varkappa)}}\right)^{n-1} \ll \left(\frac{A}{\sqrt[n]{N(\varkappa)}}\right)^{n-1} a^n. \end{aligned}$$

Aus (27), (28), (30) und der trivialen, aus Gitterpunktsbetrachtungen ersicht-

---

[7]) $\tau > 0$ bedeute $\tau^{(l)} > 0$ für $l = 1, \ldots, n_1$.

lichen Abschätzung

$$|T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi)| \leqq \sum_{\substack{(\mathfrak{c}\mathfrak{s})^{-1} | \varrho \\ \varrho \in \mathfrak{S}_0}} 1 \ll \frac{A^n}{N(\varkappa)}$$

folgt schließlich

$$T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi) \ll \left(\frac{A}{\sqrt[n]{N(\varkappa)}}\right)^{n-1} \operatorname{Min}\left(\frac{A}{\sqrt[n]{N(\varkappa)}}, \frac{a^n}{|e^{2\pi i d_1} - 1|}, \ldots, \frac{a^n}{|e^{2\pi i d_n} - 1|}\right) \ll$$

$$\ll \left(\frac{A}{\sqrt[n]{N(\varkappa)}}\right)^{n-1} \operatorname{Min}\left(\frac{A}{\sqrt[n]{N(\varkappa)}}, \frac{a^n}{|d_1|}, \ldots, \frac{a^n}{|d_n|}\right).$$

Hieraus erhalten wir mit der nach (24) gültigen Abschätzung

$$|\zeta| \ll \operatorname{Max}(|d_1|, \ldots, |d_n|)$$

die Behauptung des Hilfssatzes 7.

In diesem und den beiden nächsten Paragraphen setzen wir voraus, daß ξ beliebig, aber fest aus G gewählt sei. α und η seien die nach Hilfssatz 3 zu ξ existierenden Zahlen.

Hilfssatz 8. *Sei L eine positive reelle Zahl, ψ ein Punkt aus E mit positiv reellen Koordinaten, seien $g_1, \ldots, g_n$ ganzrationale Zahlen und $\mathfrak{c}$ ein Ideal aus $\mathfrak{M}$. Ferner sei $\mathfrak{B}$ eine Menge von ganzen Zahlen β aus K, die folgende Bedingungen erfüllen:*

$$g_l - \frac{1}{2} \leqq 4|D|^{1/n}|\alpha^{(l)}|\zeta^{*(l)}(\beta, \mathfrak{c}) < g_l + \frac{1}{2} \qquad (l = 1, \ldots, n)\,, \tag{31}$$

$$|\beta^{*(l)}| \leqq L \qquad (l = 1, \ldots, n)\,, \tag{32}$$

$$|\zeta(\beta, \mathfrak{c})| \leqq \psi\,. \tag{33}$$

Ist $|\alpha^{(l)}| < |D|^{-1/2}$ für genau k Indizes $l(0 \leqq k \leqq n-1$ wegen (17)), J_1 die Menge dieser Indizes und J_2 die Menge aller l mit $l \notin J_1$, $1 \leqq l \leqq n$, so gilt für die Anzahl $Z(L, \psi)$ aller β aus $\mathfrak{B}$ die Abschätzung

$$Z(L, \psi) \ll \left(\frac{La}{h} + 1\right)^k \prod_{l \in J_1} (h\psi^{(l)} + 1) \prod_{l \in J_2} \left(\frac{La}{|\alpha^{(l)}|} + 1\right).$$

Beweis: Durch (32) wird in E^* ein n-dimensionaler abgeschlossener Würfel P^* der Kantenlänge $2L$ definiert. Jede Kante von P^* teilen wir in s gleiche Teile, wobei $s = 1 + [Lah^{-1}]$ sei. Dadurch wird P^* in s^n verschiedene Würfel P_0^* der Kantenlänge $2Ls^{-1}$ zerlegt. Bezeichne $Z(P_0)$ die Anzahl der β aus $\mathfrak{B}$, die in einem abgeschlossenen P_0 liegen. Dann ist offenbar

$$Z(L, \psi) \leqq s^n \operatorname{Max}_{P_0} Z(P_0)\,. \tag{34}$$

Sei β_1 eines von diesen β aus P_0. Setzt man

$$\delta = \alpha\xi - \eta,\; \zeta_1 = \zeta(\beta_1, \mathfrak{c}),\; \nu = \nu(\beta, \mathfrak{c}),\; \nu_1 = \nu(\beta_1, \mathfrak{c})$$

und

$$\varrho = \alpha(\nu - \nu_1) - \eta(\beta - \beta_1)\,,$$

so erhält man nach (25):

$$\varrho = \delta(\beta - \beta_1) - \alpha(\zeta - \zeta_1) \tag{35}$$

und nach (31):

$$|\alpha(\zeta - \zeta_1)| < \frac{1}{2}\,|D|^{-1/n} \tag{36}$$

und nach (15) ergibt sich für genügend großes A.

$$|\delta(\beta - \beta_1)| < h^{-1} 4 L s^{-1} < \frac{1}{2}\,|D|^{-1/n}.$$

Hieraus folgt mit (35) und (36):

$$|\varrho| < |D|^{-1/n}.$$

Also ist $\varrho = 0$, da $\mathfrak{d}^{-1} \mid \varrho$. Somit gilt

$$\delta(\beta - \beta_1) = \alpha(\zeta - \zeta_1), \tag{37}$$

$$\eta(\beta - \beta_1) = \alpha(\nu - \nu_1). \tag{38}$$

Aus (38) folgt, daß α ein Teiler von $(\beta - \beta_1)\,\eta\,\mathfrak{d}$ ist. Nach (18) existiert dann eine nur von K abhängige natürliche Zahl v mit $\alpha \mid v(\beta - \beta_1)$. Also ist $Z(P_0)$ höchstens gleich der Anzahl aller ganzen Zahlen $\varkappa$ aus K mit

$$|\varkappa| \leqq v \underset{\beta,\,\beta_1 \in P_0 \cap \mathfrak{B}}{\operatorname{Max}} \left|\frac{\beta - \beta_1}{\alpha}\right|.$$

Nun ist

$$\left|\frac{\beta^{(l)} - \beta_1^{(l)}}{\alpha^{(l)}}\right| \leqq \frac{4L}{s|\alpha^{(l)}|} \qquad (l = 1, \ldots, n)$$

und ferner nach (37), (33) und (16):

$$\left|\frac{\beta^{(l)} - \beta_1^{(l)}}{\alpha^{(l)}}\right| = \left|\frac{\zeta^{(l)} - \zeta_1^{(l)}}{\delta^{(l)}}\right| \leqq 2\,\psi^{(l)} h\,|D|^{1/2} \quad \text{für alle } l \in J_1.$$

Hieraus folgt mit Gitterpunktsüberlegungen in E^*:

$$Z(P_0) \ll \prod_{l \in J_1} (h\,\psi^{(l)} + 1) \prod_{l \in J_2} \left(\frac{L}{s|\alpha^{(l)}|} + 1\right). \tag{39}$$

Aus (15), (34) und (39) resultiert die Behauptung des Hilfssatzes 8.

Wir fügen noch hinzu, daß, falls $\mathfrak{B}$ nicht leer ist, nach (31) und (33) gilt

$$g_l \ll |\alpha^{(l)}|\,\psi^{(l)} + 1 \qquad (l = 1, \ldots, n). \tag{40}$$

Nach diesen Vorbereitungen zerlegen wir gemäß Hilfssatz 6 die Summe $T^{(m)}(\xi)$ wie folgt:

$$T^{(m)}(\xi) = S_1 + S_2 + O(A^{n/2} a^{n-1}), \tag{41}$$

wobei

$$S_1 = \sum_{\substack{1 \mid \mathfrak{b} \mid \mathfrak{d} \\ N(\mathfrak{b})^{1/n} \leqq A a^{-\Theta_2}}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi), \quad S_2 = \sum_{\substack{1 \mid \mathfrak{b} \mid \mathfrak{d} \\ A a^{-\Theta_2} < N(\mathfrak{b})^{1/n} < A}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi)$$

ist.

§ 3. Die Abschätzung von S_1 in G

Nach (23) und Hilfssatz 7 ergibt sich

$$\begin{aligned} |S_1| &= \left| \sum_{\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}} \sum_{\substack{\mathfrak{b} \sim (\mathfrak{t}\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \\ 1 \mid \mathfrak{b} \mid \mathfrak{d},\, N(\mathfrak{b})^{1/n} \leqq A a^{-\Theta_2}}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi) \right| \leqq \\ &\leqq \sum_{\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}} \sum_{\substack{1 \mid \mathfrak{b} \sim (\mathfrak{t}\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{-1} \\ N(\mathfrak{b})^{1/n} \leqq A a^{-\Theta_2}}} |T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi)| \ll \sum_{\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}} \left(\sum_{\varkappa \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{c}}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) \right). \end{aligned} \tag{42}$$

Hierbei sei $\mathfrak{N}_\mathfrak{c}$ die Menge aller ganzen, mod (1) normierten, totalpositiven $\varkappa$ aus K mit

$$N(\varkappa) \leq N(\mathfrak{t}\mathfrak{s}\mathfrak{c})\, A^n a^{-n\Theta_1}.$$

Hilfssatz 9. *Für alle* $\mathfrak{c}$ *aus* $\mathfrak{M}$ *und alle* $\varkappa$ *aus* $\mathfrak{N}_\mathfrak{c}$ *mit* $N(\varkappa) \leq t^n$ *gilt*

$$\operatorname*{Max}_{l=1,\ldots,n} |\zeta^{(l)}(\varkappa, \mathfrak{c})| > c_3 h^{-1}.$$

Beweis: Nach (25) ist $\xi = \frac{\nu}{\varkappa} + \frac{\zeta}{\varkappa}$. Da $\mathfrak{b}^{-1} \mid \nu$, also $\mathfrak{a}_{\nu/\varkappa} \mid \varkappa$ und ξ nicht in $B_{\nu/\varkappa}$ liegt, gilt nach (14):

$$\operatorname*{Max}_{l=1,\ldots,n} \left|\frac{\zeta^{(l)}}{\varkappa^{(l)}}\right| > h^{-1} N(\varkappa)^{-1/n},$$

woraus mit (21) die Behauptung des Hilfssatzes 9 resultiert.

Wie durch (42) nahegelegt wird, halten wir im folgenden das Ideal $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{M}$ fest. Wir haben

$$\begin{aligned}\sum_{\varkappa \in \mathfrak{N}_\mathfrak{c}} X_\mathfrak{c}(\varkappa) &\leq \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{N}_\mathfrak{c} \\ N(\varkappa) \leq t^n}} X_\mathfrak{c}(\varkappa) + \sum_s \Bigg(\sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{N}_\mathfrak{c} \\ 2^s \leq N(\varkappa)^{1/n} \leq 2^{s+1}}} X_\mathfrak{c}(\varkappa) \Bigg) \leq \\ &\leq Q + \sum_s Q_s . \end{aligned} \tag{43}$$

Hierbei laufe s jeweils über alle natürlichen Zahlen s mit

$$\frac{t}{2} < U \leq N(\mathfrak{t}\mathfrak{s}\mathfrak{c})^{1/n} A a^{-\Theta_1}, \tag{44}$$

wobei $U = 2^s$ sei, und es sei definiert

$$Q = \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{N}_\mathfrak{c} \\ N(\varkappa) \leq t^n}} X_\mathfrak{c}(\varkappa), \quad Q_s = \sum_{\varkappa \in \mathfrak{B}_s} X_\mathfrak{c}(\varkappa),$$

wobei $\mathfrak{B}_s$ die Menge aller ganzen $\varkappa$ aus K sei mit

$$c_3 U \leq |\varkappa| \leq 2 c_4 U .$$

Nach Hilfssatz 9 läßt sich Q folgendermaßen abschätzen:

$$Q < \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{N}_\mathfrak{c} \\ N(\varkappa) \leq t^n}} (A\, N(\varkappa)^{-1/n})^{n-1} a^n c_3^{-1} h \ll A^{n-1} a^n h t \ll A^n a^{-\Theta}. \tag{45}$$

Die Summe Q_s unterteilen wir in

$$Q_s = \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ \operatorname*{Max}_{l=1,\ldots,n} |\zeta^{(l)}(\varkappa, \mathfrak{c})| > U A^{-1} a^{\Theta+n}}} X_\mathfrak{c}(\varkappa) + \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ \operatorname*{Max}_{l=1,\ldots,n} |\zeta^{(l)}(\varkappa, \mathfrak{c})| \leq U A^{-1} a^{\Theta+n}}} X_\mathfrak{c}(\varkappa) = Q_s^{(1)} + Q_s^{(2)}.$$

Da $\mathfrak{B}_s$ höchstens $O(U^n)$ Elemente besitzt, ist nach (26):

$$Q_s^{(1)} \ll U^n A^n U^{-n} a^{n-(\Theta+n)} = A^n a^{-\Theta}.$$

Bei der Abschätzung von $Q_s^{(2)}$ benutzen wir Hilfssatz 8 in der Spezialisierung $L = 2c_4 U$, $\psi^{(l)} = U A^{-1} a^{\Theta+n}$ $(l = 1, \ldots, n)$. Die Indexmengen J_1, J_2 und die ganzrationalen Zahlen $k, g_1, \ldots, g_n$ mögen die in Hilfssatz 8 angegebene Bedeutung haben. Dann ist

$$|\alpha^{(l)}| < |D|^{-1/2} < (8\,\psi^{(l)}\, |D|^{1/n})^{-1} \qquad (l \in J_1),$$

also nach (31):

$$g_l = 0 \qquad (l \in J_1)\,.$$

Somit ist die Anzahl Z_1 der verschiedenen n-tupel $(g_1, \ldots, g_n)$ nach (40) höchstens

$$O\Bigl(\prod_{l\in J_2} (|\alpha^{(l)}|\, U A^{-1} a^{\Theta+n} + 1)\Bigr).$$

Deshalb ist nach Hilfssatz 8 und (26):

$$\begin{aligned} Q_s^{(2)} &\ll Z_1 \operatorname{Max} Z(2c_4 U,\, U A^{-1} a^{\Theta+n}) A^n U^{-n} \ll \\ &\ll \prod_{l\in J_2} (|\alpha^{(l)}|\, U A^{-1} a^{\Theta+n} + 1)(U a h^{-1} + 1)^k \prod_{l\in J_1} (h U A^{-1} a^{\Theta+n} + 1) \times \\ &\qquad \times \prod_{l\in J_2} (U a\, |\alpha^{(l)}|^{-1} + 1) A^n U^{-n} \\ &= (U a^{\Theta+n+1} + A a h^{-1} + h a^{\Theta+n} + A U^{-1})^k \prod_{l\in J_2} (U a^{\Theta+n+1} + |\alpha^{(l)}| a^{\Theta+n} + \\ &\qquad + A a\, |\alpha^{(l)}|^{-1} + A U^{-1})\,. \end{aligned}$$

Nach (15), (17) und (44) kann man weiter schließen:

$$Q_s^{(2)} \ll A^n (a^{-\Theta_2+\Theta+n+1} + a^{-\Theta_1+\Theta+n} + a^{-\Theta_2+1})^{k+1} a^{n-k-1} \ll A^n a^{-\Theta}\,.$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$Q_s \ll A^n a^{-\Theta}\,. \tag{46}$$

Bei Beachtung von $s \ll a$ folgt aus (42), (43), (45) und (46):

$$S_1 \ll A^n a^{1-\Theta}\,. \tag{47}$$

§ 4. Die Abschätzung von S_2 in G

Sei $\mathfrak{P}$ die Menge aller Primideale $\mathfrak{p}$ von K mit $a^{n\Theta_1} < N(\mathfrak{p}) \leqq A^{n/2}$ und $\mathfrak{Q}_k$ die Menge aller ganzen Ideale $\mathfrak{q}$, die $\mathfrak{b}$ teilen und genau k Primteiler mit Norm $> a^{n\Theta_1}$ besitzen. Dann wird

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} W_k, \qquad W_k = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{Q}_k \\ A a^{-\Theta_2} < N(\mathfrak{b})^{1/n} < A}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}^{(m)}(\xi)\,. \tag{48}$$

Hilfssatz 10. *Es ist $W_k = 0$ für $k \geqq a$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal aus $\mathfrak{Q}_k$ mit $N(\mathfrak{b}) < A^n$. Dann ist $a^{n\Theta_1 k} < A^n$, also $k < a$ und somit W_k für $k \geqq a$ leer.

Hilfssatz 11. *Für die Anzahl Z_2 aller Ideale $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{Q}_0$ mit $A a^{-\Theta_2} < N(\mathfrak{b})^{1/n} < A$ gilt*

$$Z_2 \ll A^n a^{-\Theta_1}\,.$$

Beweis: Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal aus $\mathfrak{Q}_0$ mit $A a^{-\Theta_2} < N(\mathfrak{b})^{1/n} < A$ und s die Anzahl seiner Primteiler. Dann ist

$$(a^{\Theta_1})^s > A a^{-\Theta_2}$$

und folglich für genügend großes A:

$$s > \frac{a - \Theta_2 \log a}{\Theta_1 \log a} > \frac{a}{2\Theta_1 \log a}\,.$$

Deshalb ist die Zahl $\tau(\mathfrak{b})$ der Teiler jedes solchen $\mathfrak{b}$:

$$\tau(\mathfrak{b}) = 2^s > 2^{\frac{a}{2\Theta_1 \log a}} = A^{\frac{\log 2}{2\Theta_1 \log a}} > A^{\frac{1}{3\Theta_1 \log a}} .$$

Mit der bekannten Abschätzung

$$\sum_{1|\mathfrak{b},\, N(\mathfrak{b}) < A} \tau(\mathfrak{b}) \ll A^n a$$

erhalten wir

$$Z_2 A^{\frac{1}{3\Theta_1 \log a}} \ll A^n a \ll A^n a^{-\Theta_1} A^{\frac{1}{3\Theta_1 \log a}} . \qquad \text{q.e.d.}$$

Nach Hilfssatz 7 und 11 haben wir somit für W_0:

$$W_0 \ll \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{Q}_0 \\ A a^{-\Theta_2} < N(\mathfrak{b})^{1/n} < A}} A^n N(\mathfrak{b})^{-1} < Z_2 a^{n\Theta_2} \ll A^n a^{n\Theta_2 - \Theta_1} \ll A^n a^{-\Theta} . \tag{49}$$

Weiterhin sei $k > 0$. Bildet man sämtliche Produkte $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}_{k-1}$, so entsteht jedes $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{Q}_k$ genau k-mal und im Falle $k > 1$ noch jedes Produkt $\mathfrak{p}^2\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{r} \in \mathfrak{Q}_{k-2}$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{r}$ genau einmal. Setzt man

$$V_k = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P},\, \mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}_{k-1} \\ A a^{-\Theta_2} < N(\mathfrak{p}\mathfrak{q})^{1/n} < A}} \mu(\mathfrak{q})\, T^{(\mathfrak{m})}_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(\xi) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

so folgt mit Hilfssatz 7:

$$\begin{aligned} |k W_k + V_k| &\leqq \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}} \sum_{\substack{1|\mathfrak{r} \\ A a^{-\Theta_2} < N(\mathfrak{p}^2\mathfrak{r})^{1/n} < A}} |T^{(\mathfrak{m})}_{\mathfrak{p}^2\mathfrak{r}}(\xi)| \ll \\ &\ll \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}} \sum_{\substack{1|\mathfrak{r} \\ 1 \leqq N(\mathfrak{r}) < A^n}} A^n N(\mathfrak{p})^{-2} N(\mathfrak{r})^{-1} \ll \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}} A^n a N(\mathfrak{p})^{-2} \ll A^n a^{1-n\Theta_2} , \end{aligned} \tag{50}$$

und es bleibt V_k abzuschätzen. Gemäß der Zerlegung

$$V_k = \sum_{\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}} V_{k,\mathfrak{c}} , \quad V_{k,\mathfrak{c}} = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P} \\ \mathfrak{p} \sim \mathfrak{c}\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{-1}}} \sum_{\substack{\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}_{k-1} \\ A a^{-\Theta_2} < N(\mathfrak{p}\mathfrak{q})^{1/n} < A}} \mu(\mathfrak{q})\, T^{(\mathfrak{m})}_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(\xi) \tag{51}$$

genügt es, $\mathfrak{p}$ auf die Klasse des festen Ideals $\mathfrak{c}\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{-1}$ zu beschränken. Nach den Überlegungen in § 2 gilt somit

$$V_{k,\mathfrak{c}} = \sum_{\varkappa, \mathfrak{q}} \mu(\mathfrak{q}) \sum_{\substack{\mathfrak{q}\mathfrak{c}\mathfrak{s} | \varrho \\ \varrho \equiv \sigma_{\mathfrak{m}} \varkappa^{-1} \bmod \mathfrak{s}\varkappa^{-1} \\ \varrho > 0,\, |\varrho| < |\lambda\varkappa^{-1}|}} \Lambda_{\mathfrak{m}}(\varkappa\varrho)\, e^{2\pi i S(\varkappa\varrho\xi)} .$$

Hierbei wird summiert über alle totalpositiven, mod (1) normierten Zahlen $\varkappa$ aus K mit $(\varkappa)\,\mathfrak{c}\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{-1} \in \mathfrak{P}$, und zu gegebenem $\varkappa$ durchläuft $\mathfrak{q}$ alle Ideale aus $\mathfrak{Q}_{k-1}$ mit

$$N(\mathfrak{q}) > A^n a^{-n\Theta_2} N(\varkappa\mathfrak{c}\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{-1})^{-1} .$$

Nun wird (vergleiche den analogen Schluß bei (43)):

$$V_{k,\mathfrak{c}} = \sum_{s} C_s , \quad |C_s| \leqq \sum_{\varkappa} \left| \sum_{\mathfrak{q}, \varrho} \mu(\mathfrak{q})\, \Lambda_{\mathfrak{m}}(\varrho)\, e^{2\pi i S(\varkappa\varrho\xi)} \right| . \tag{52}$$

Dabei läuft s über alle natürlichen Zahlen s mit

$$\frac{a^{\Theta_1}}{2} N(\mathfrak{c}\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{-1})^{-1/n} < U \leqq A^{1/2} N(\mathfrak{c}\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{-1})^{-1/n} , \; U = 2^s \tag{53}$$

und $\varkappa$ über alle Zahlen aus $(\mathfrak{c}\mathfrak{s})^{-1}$ mit $c_3 U \leqq |\varkappa| \leqq 2c_4 U$, und in der inneren Summe läuft $\mathfrak{q}$ über alle Ideale aus $\mathfrak{Q}_{k-1}$ mit Norm $> A^n a^{-n\Theta_1} N(\varkappa\mathfrak{c}\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{-1})^{-1}$, sowie ϱ über alle Körperzahlen mit $\mathfrak{q}\mathfrak{c}\mathfrak{s}|\varrho$, $\varrho \equiv \sigma_m \varkappa^{-1} \bmod \mathfrak{s}\varkappa^{-1}$, $\varrho > 0$, $|\varrho| < |\lambda\varkappa^{-1}|$. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$C_s^2 \ll U^n \sum_{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \varrho_1, \varrho_2} \left| \sum_{\varkappa} e^{2\pi i S(\varkappa(\varrho_1 - \varrho_2)\xi)} \right|. \tag{54}$$

Hierbei wird summiert über alle Quadrupel $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \varrho_1, \varrho_2)$ mit

$$\begin{aligned} &\mathfrak{q}_j \in \mathfrak{Q}_{k-1}, \quad N(\mathfrak{q}_j) > A^n a^{-n\Theta_1}(2c_4 U)^{-n} N(\mathfrak{c}\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{-1})^{-1}, \\ &\mathfrak{q}_j\mathfrak{c}\mathfrak{s} \mid \varrho_j, \quad 0 < |\varrho_j| < |\lambda|(c_3 U)^{-1} \qquad (j = 1, 2), \end{aligned} \tag{55}$$

und innen läuft $\varkappa$ über alle Körperzahlen mit $(\mathfrak{c}\mathfrak{s})^{-1} \mid \varkappa$, $\varkappa \equiv \sigma_m \varrho_j^{-1} \bmod \mathfrak{s}\varrho_j^{-1}$ und

$$c_3 U \leqq |\varkappa| \leqq 2c_4 U, |\varkappa| < |\lambda\varrho^{-1}|, |N(\varkappa)| > A^n a^{-n\Theta_1} N(\mathfrak{q}_j\mathfrak{c}\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{-1})^{-1} \qquad (j = 1, 2). \tag{56}$$

Sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller Punkte $\varkappa$ aus E, die (56) erfüllen. Dann hat $\mathfrak{S}^*$ ein n-dimensionales Volumen der Größenordnung $O(U^n)$, und seine Randfläche besitzt ein $(n-1)$-dimensionales Volumen der Größenordnung $O(U^{n-1})$. Dies wird benutzt beim Beweis des nun folgenden Hilfssatzes 12. Der Beweis geht völlig analog zu dem von Hilfssatz 7 und ist sogar etwas einfacher, da die Funktion Λ_m nicht auftritt.

Hilfssatz 12. *Seien ϱ_1, ϱ_2 zwei Körperzahlen, die* (55) *erfüllen, dann gilt für eine beliebige Körperzahl σ:*

$$\sum_{\varkappa} e^{2\pi i S(\varkappa\sigma\xi)} \ll Y_{\mathfrak{c}}(\sigma).$$

Dabei laufe $\varkappa$ in der linksstehenden Summe über alle Körperzahlen $\varkappa$ mit $(\mathfrak{c}\mathfrak{s})^{-1} \mid \varkappa$, $\varkappa \equiv \sigma_m \varrho_j^{-1} \bmod \mathfrak{s}\varrho_j^{-1}$ $(j = 1, 2)$, $\varkappa \in \mathfrak{S}$, *und es sei* $Y_{\mathfrak{c}}(\sigma) = U^{n-1} \operatorname{Min}(U, |\zeta^{(1)}|^{-1}, \ldots, |\zeta^{(n)}|^{-1})$ *mit* $\zeta = \zeta(\sigma, \mathfrak{c})$.

Hilfssatz 13. *Zu einer gegebenen Zahl σ aus K gilt für die Anzahl Z_3 aller verschiedenen Quadrupel* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \varrho_1, \varrho_2)$, *die den Bedingungen* (55) *und der Gleichung $\sigma = \varrho_1 - \varrho_2$ genügen,*

$$Z_3 \ll A^n a^{2n\Theta_1} U^{-n}.$$

Beweis: Die Anzahl der verschiedenen Paare (ϱ_1, ϱ_2), die (55) und $\sigma = \varrho_1 - \varrho_2$ befriedigen, ist wegen $\mathfrak{c}\mathfrak{s} \mid \varrho_j$, $|\varrho_j| < |\lambda| (c_3 U)^{-1}$ $(j = 1, 2)$ höchstens von der Größenordnung $O(A^n U^{-n})$. Zu gegebenem ϱ_j ist die Anzahl der $\mathfrak{q}_j$ höchstens $O(a^{n\Theta_1})$. Jedem solchen $\mathfrak{q}_j$ entspricht nämlich nach (55) eineindeutig ein ganzes Ideal $\mathfrak{u}$ mit $(\varrho_j) = \mathfrak{q}_j\mathfrak{c}\mathfrak{s}\mathfrak{u}$, und die Anzahl der verschiedenen $\mathfrak{u}$ ist wegen $N(\mathfrak{u}) = |N(\varrho_j)|\, N(\mathfrak{q}_j\mathfrak{c}\mathfrak{s})^{-1} \ll a^{n\Theta_1}$ höchstens $O(a^{n\Theta_1})$. Hieraus folgt die Behauptung des Hilfssatzes 13.

Nach (54), Hilfssatz 12 und 13 haben wir also

$$C_s^2 \ll A^n a^{2n\Theta_1} M_s, \quad M_s = \sum_{\sigma \in \mathfrak{C}_s} Y_{\mathfrak{c}}(\sigma), \tag{57}$$

wobei $\mathfrak{C}_s$ die Menge aller ganzen Körperzahlen σ sei mit

$$|\sigma| < W, \; W = 2 \max_{l=1,\ldots,n} |\lambda^{(l)}|(c_3 U)^{-1}. \tag{58}$$

Die Abschätzung von M_s verläuft nun analog zu der von Q_s in § 3. Wir zerlegen

$$M_s = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{C}_s \\ \operatorname{Max}_{l=1,\ldots,n} |\zeta^{(l)}(\sigma, c)| > a^{\Theta_4} U^{-1}}} Y_c(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{C}_s \\ \operatorname{Max}_{l=1,\ldots,n} |\zeta^{(l)}(\sigma, c)| \leq a^{\Theta_4} U^{-1}}} Y_c(\sigma) = M_s^{(1)} + M_s^{(2)}.$$

Da $\mathfrak{C}_s$ nach (58) höchstens $O(W^n)$ Elemente enthält, ist nach Definition von $Y_c(\sigma)$:

$$M_s^{(1)} \ll W^n U^n a^{-\Theta_4} \ll A^n a^{-\Theta_4} = A^n a^{-2n\Theta_3 - 2\Theta}.$$

Bei der Abschätzung von $M_s^{(2)}$ benutzen wir Hilfssatz 8 in der Spezialisierung $L = W$, $\psi^{(l)} = a^{\Theta_4} U^{-1} (l = 1, \ldots, n)$. Haben die Symbole $J_1, J_2, k, g_1, \ldots, g_n$ die in Hilfssatz 8 angegebene Bedeutung, so gilt $|\alpha^{(l)}| < |D|^{-1/2} < (8 \psi^{(l)} \times |D|^{1/n})^{-1}$ $(l \in J_1)$, also nach (31): $g_l = 0$ $(l \in J_1)$, und die Anzahl Z_4 der n-tupel $(g_1, \ldots, g_n)$ ist deshalb nach (40):

$$Z_4 \ll \prod_{l \in J_2} (|\alpha^{(l)}|\, a^{\Theta_4} U^{-1} + 1).$$

Hieraus folgt mit Hilfssatz 8, (15), (17), (53) und (58):

$$\begin{aligned} M_s^{(2)} &\ll Z_4 \operatorname{Max} Z(W, a^{\Theta_4} U^{-1}) U^n \\ &\ll \prod_{l \in J_2} (|\alpha^{(l)}| a^{\Theta_4} U^{-1} + 1) (W a h^{-1} + 1)^k (h a^{\Theta_4} U^{-1} + 1)^k \prod_{l \in J_2} (W a |\alpha^{(l)}|^{-1} + 1) U^n \\ &= (W a^{1+\Theta_4} + W U a h^{-1} + h a^{\Theta_4} + U)^k \prod_{l \in J_2} (W a^{1+\Theta_4} + |\alpha^{(l)}| a^{\Theta_4} + \\ &\qquad + W a |\alpha^{(l)}|^{-1} U + U) \\ &\ll A^n (a^{1+\Theta_4-\Theta_1} + a^{1-\Theta_2})^{k+1} a^{n-k-1} \ll A^n a^{-2n\Theta_3 - 2\Theta}. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$M_s \ll A^n a^{-2n\Theta_3 - 2\Theta}.$$

Hieraus folgt nach (57):

$$C_s \ll A^n a^{-\Theta},$$

und damit aus (51) und (52) wegen $s \ll a$:

$$V_k \ll A^n a^{1-\Theta}$$

und weiter aus (50):

$$W_k \ll \frac{1}{k} A^n a^{1-\Theta} \quad \text{für alle } k > 0. \tag{59}$$

Dann ergeben (48), Hilfssatz 10, (49) und (59):

$$S_2 \ll A^n a^{2-\Theta}. \tag{60}$$

Nach (41), (47) und (60) haben wir somit folgenden Satz bewiesen:

Satz 2. *Für alle Punkte ξ aus G gilt*

$$T^{(m)}(\xi) \ll A^n a^{2-\Theta} \qquad (m = 1, \ldots, r).$$

§ 5. Die Approximation von $T^{(m)}(\xi)$ in B_γ

Zwecks Formulierung der folgenden Hilfssätze erweitern wir K zu einem Bereich idealer Zahlen [1] [2]. Dieser Bereich sei für alle weiteren Betrachtungen fest gewählt.

Hilfssatz 14. *Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ reelle Zahlen $\geqq 2$ derart, daß $Y_l = Y_{l+n_2}$ $(l = n_1+1, \ldots, n_1+n_2)$ und $Y_l \leqq Y_s^{f_1}$ $(l, s = 1, \ldots, n)$ mit einer reellen Konstanten $f_1 \geqq 1$ gilt, und seien $\Xi_{n_1+1}, \ldots, \Xi_{n_1+n_2}$ reelle Zahlen mit $0 < \Xi_l \leqq$ $\leqq 2\pi (l = n_1+1, \ldots, n_1+n_2)$. Ferner sei $\mathfrak{b} \neq (0)$ ein ganzes Ideal von K, $\hat{\varrho}$ eine zu $\mathfrak{b}$ teilerfremde ganze ideale Zahl $\neq 0$, und es gelte $N(\mathfrak{b}) \leqq \log^{f_2}(Y_1 \cdots Y_n)$ mit einer positiven Konstanten f_2. Definiert man $\pi(\mathfrak{b}, \hat{\varrho}, Y_l, \Xi_l)$ als die Anzahl aller idealen Primzahlen $\hat{\omega}$ mit*

$$\hat{\omega} \equiv \hat{\varrho} \bmod \mathfrak{b}, \quad \hat{\omega}\hat{\varrho}^{-1} \succ 0,$$

$$|\hat{\omega}^{(l)}| < Y_l \qquad (l = 1, \ldots, n),$$

$$0 \leqq \arg \hat{\omega}^{(l)} < \Xi_l \qquad (l = n_1+1, \ldots, n_1+n_2),$$

und setzt man (vorübergehend) $n_1 + n_2 = k$, so gilt mit einer positiven Konstanten c_5:

$$\pi\,(\mathfrak{b}, \hat{\varrho}, Y_l, \Xi_l) = \frac{w\,\Xi_{n_1+1} \cdots \Xi_k}{2^{n_1}(2\pi)^{n_2} R H \varphi(\mathfrak{b})} \int\limits_2^{Y_1^{e_1}} dt_1 \cdots \int\limits_2^{Y_k^{e_k}} \frac{dt_k}{\log(t_1 \cdots t_k)}$$
$$+\, O\big(Y_1 \cdots Y_n e^{-c_5\sqrt{\log(Y_1 \cdots Y_n)}}\big),$$

wobei die O-Konstante und c_5 nur von K, f_1 und f_2, aber nicht von $\mathfrak{b}$, $\hat{\varrho}$ und den Ξ_l abhängen.

Dies ist in leicht abgeänderter Formulierung ein Satz von Mitsui [4, S. 35]. Im folgenden sei $\hat{\mathfrak{t}}$ eine zu $\mathfrak{t}$ fest gewählte ideale Zahl mit $(\hat{\mathfrak{t}}) = \mathfrak{t}$.

Hilfssatz 15. *Die Größen Y_l, Ξ_l, f_1, f_2 und $\mathfrak{b}$ mögen die Voraussetzungen von Hilfssatz 14 erfüllen. Ferner sei ϱ eine ganze Zahl aus K mit $(\varrho, \mathfrak{b}\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$. Dann gilt für die Anzahl $\pi_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{b}, \varrho, X_l, \Xi_l)$ der Zahlen ω aus $\Omega(\mathfrak{t})$, die die Bedingungen*

$$\omega \equiv \varrho \bmod \mathfrak{b}\mathfrak{t},$$

$$|\omega^{(l)}| < X_l, \; X_l = Y_l |\hat{\mathfrak{t}}^{(l)}| \qquad (l = 1, \ldots, n),$$

$$0 \leqq \arg \omega^{(l)} < \Xi_l \qquad (l = n_1+1, \ldots, n_1+n_2)$$

erfüllen:

$$\pi_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{b}, \varrho, X_l, \Xi_l) = \frac{w}{2^{n_1}\pi^{n_2} R H N(\mathfrak{t})\varphi(\mathfrak{b})} \int\limits_{\mathfrak{T}^*} \frac{d\tau^*}{\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)} +$$
$$+\, O\big(X_1 \cdots X_n N(\mathfrak{t})^{-1} e^{-c_5\sqrt{\log(X_1 \cdots X_n N(\mathfrak{t})^{-1})}}\big),$$

wobei $d\tau^* = d\tau^{*(1)} \cdots d\tau^{*(n)}$, $\mathfrak{T}^*$ die Menge aller Punkte τ aus E mit $2|\hat{\mathfrak{t}}^{(l)}| \leqq$ $\leqq \tau^{(l)} \leqq X_l$ $(l = 1, \ldots, n_1)$, $\sqrt{2}\,|\hat{\mathfrak{t}}^{(l)}| \leqq |\tau^{(l)}| \leqq X_l$ $(l = n_1+1, \ldots, n)$, $0 \leqq \arg \tau^{(l)} \leqq \Xi_l$ $(l = n_1+1, \ldots, n_1+n_2)$ ist und die O-Konstante nur von K, f_1 und f_2, aber nicht von $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}$, ϱ und den Ξ_l abhängt.

Beweis: Jede Zahl ω aus $\Omega(\mathfrak{t})$ läßt sich eindeutig in der Form $\omega = \hat{\omega}\hat{\mathfrak{t}}$ schreiben, wobei $\hat{\omega}$ eine ideale Primzahl ist. Ferner gibt es zu ϱ eine total-positive Zahl ϱ_1 aus K mit $\varrho_1 \equiv \varrho \bmod \mathfrak{b}\mathfrak{t}$. Setzt man $\hat{\varrho} = \varrho_1 \hat{\mathfrak{t}}^{-1}$, so ist $\pi_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{b}, \varrho, X_l, \Xi_l)$ gleich der Anzahl aller idealen Primzahlen $\hat{\omega}$ mit $\hat{\omega} \equiv \hat{\varrho} \bmod \mathfrak{b}$, $\hat{\omega}\hat{\varrho}^{-1} \succ 0$,

$|\hat{\omega}^{(l)}| < Y_l \; (l = 1, \ldots, n)$, $0 \leqq \arg \hat{\omega}^{(l)} + \arg \hat{\mathfrak{t}}^{(l)} < \Xi_l \; (l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2)$; also folgt aus Hilfssatz 14:

$$\pi_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{b}, \varrho, X_l, \Xi_l) = \frac{w\, \Xi_{n_1+1} \cdots \Xi_k}{2^{n_1}(2\pi)^{n_2} RH\, \varphi(\mathfrak{b})} \int\limits_2^{Y_1^{e_1}} dt_1 \cdots \int\limits_2^{Y_k^{e_k}} \frac{dt_k}{\log(t_1 \cdots t_k)} +$$
$$+ O\left(Y_1 \cdots Y_n e^{-c_1\sqrt{\log(Y_1 \cdots Y_n)}}\right).$$

Durch eine naheliegende Substitution im rechtsstehenden Integral und mit der Formel $|N(\hat{\mathfrak{t}})| = N(\mathfrak{t})$ gelangt man dann zur Behauptung von Hilfssatz 15.

Hilfssatz 16. *Sei* $\mathfrak{b}$ *ein ganzes Ideal* $\neq (0)$ *von* K. *Dann ist die Anzahl der Zahlen* ω *aus* $\Omega(\mathfrak{t})$ *mit* $|\omega| < |\lambda|$, $(\omega, \mathfrak{b}\mathfrak{t}) \neq \mathfrak{t}$ *höchstens* $O(a^{n-1} \log N(\mathfrak{b}))$.

Beweis: $(\omega, \mathfrak{b}\mathfrak{t}) \neq \mathfrak{t}$ bedeutet $\hat{\omega} \mid \mathfrak{b}$, wobei $\hat{\omega}$ die zu ω gehörige ideale Primzahl ist mit $\omega = \hat{\omega}\hat{\mathfrak{t}}$. Da die Anzahl der Primteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{b}$ höchstens $O(\log N(\mathfrak{b}))$ ist und es zu jedem solchen $\mathfrak{p}$ nach Hilfssatz 5 höchstens $O(a^{n-1})$ Zahlen ω aus $\Omega(\mathfrak{t})$ gibt mit $(\omega)\mathfrak{t}^{-1} = \mathfrak{p}$, $|\omega| < |\lambda|$, ist Hilfssatz 16 evident.

In diesem Paragraphen sei ξ ein Punkt aus B_γ, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\gamma$, $N(\mathfrak{a}) \leqq t^n$ und $\zeta = \xi \leftarrow \gamma$. Nach Hilfssatz 16 gilt

$$T^{(m)}(\xi) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega(\mathfrak{t}) \\ \omega \equiv \sigma_m \bmod \mathfrak{e} \\ |\omega| < |\lambda|, (\omega, \mathfrak{a}\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}}} \Lambda_m(\omega) e^{2\pi i S(\omega\xi)} + O(a^{n-1} \log N(\mathfrak{a})). \tag{61}$$

Zu einem n-tupel $s = (s_1, \ldots, s_n)$ von ganzrationalen Zahlen definieren wir $\mathfrak{R}_s$ als die Menge aller Punkte τ aus E mit

$$s_l \lambda^{(l)}([a^{2\Theta_1}] + 1)^{-1} \leqq \tau^{(l)} < (s_l + 1)\, \lambda^{(l)}([a^{2\Theta_1}] + 1)^{-1} \qquad (l = 1, \ldots, n_1),$$
$$s_l |\lambda^{(l)}|([a^{2\Theta_1}] + 1)^{-1} \leqq |\tau^{(l)}| < (s_l + 1)\, |\lambda^{(l)}|([a^{2\Theta_1}] + 1)^{-1}$$
$$(l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2)$$
$$2\pi s_{l+n_2}([a^{2\Theta_1}] + 1)^{-1} \leqq \arg \tau^{(l)} < 2\pi(s_{l+n_2} + 1)([a^{2\Theta_1}] + 1)^{-1}$$

und die Summe $T^{(m)}(\xi)_s$ als

$$T^{(m)}(\xi)_s = \sum_{\substack{\omega \in \Omega(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{R}_s \\ \omega \equiv \sigma_m \bmod \mathfrak{e}, (\omega, \mathfrak{a}\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}}} \Lambda_m(\omega) e^{2\pi i S(\omega\xi)}.$$

Dann folgt aus (61):

$$T^{(m)}(\xi) + O(a^{n-1} \log N(\mathfrak{a})) = \sum_{s \in J_3} T^{(m)}(\xi)_s + \sum_{s \in J_4} T^{(m)}(\xi)_s, \tag{62}$$

wobei J_3 die Menge aller n-tupel s mit $0 \leqq s_l \leqq [a^{2\Theta_1}]$ $(l = 1, \ldots, n)$, $\operatorname{Min}(s_1, \ldots, s_{n_1+n_2}) < [a^{\Theta_1}]$ und J_4 die Menge aller s mit $0 \leqq s_l \leqq [a^{2\Theta_1}]$ $(l = 1, \ldots, n)$, $\operatorname{Min}(s_1, \ldots, s_{n_1+n_2}) \geqq [a^{\Theta_1}]$ sei. Die erste der beiden rechtsstehenden Summen ist dem Betrage nach höchstens gleich der Anzahl aller ganzen Körperzahlen, die in $\sum_{s \in J_3} \mathfrak{R}_s$ liegen, so daß aus Gitterpunktsbetrachtungen in E^* folgt:

$$\sum_{s \in J_3} T^{(m)}(\xi)_s \ll A^n a^{-\Theta_1}. \tag{63}$$

Weiterhin sei s aus J_4. Wir zerlegen

$$T^{(m)}(\xi)_s = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{at} \\ (\varrho, \mathfrak{at}) = \mathfrak{t}}} T^{(m)}(\xi)_{s,\varrho}. \tag{64}$$

Hierbei bezeichne $T^{(m)}(\xi)_{s,\varrho}$ den Teil von $T^{(m)}(\xi)_s$, der zu den Werten $\omega \equiv \varrho \bmod \mathfrak{at}$ gehört. Offenbar ist

$$T^{(m)}(\xi)_{s,\varrho} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho \not\equiv \sigma_m \bmod (\mathfrak{s}, \mathfrak{at}). \tag{65}$$

Ist $\varrho \equiv \sigma_m \bmod (\mathfrak{s}, \mathfrak{at})$, so gibt es eine ganze Körperzahl ϱ_1 mit $\varrho_1 \equiv \sigma_m \bmod \mathfrak{s}$, $\varrho_1 \equiv \varrho \bmod \mathfrak{at}$. Wegen $(\varrho_1, \mathfrak{s}) = (\sigma_m, \mathfrak{s}) = 1$ ist $(\varrho_1, \mathfrak{s}\mathfrak{at}(\mathfrak{s}, \mathfrak{at})^{-1}) = (\varrho_1, \mathfrak{at}) = (\varrho, \mathfrak{at}) = \mathfrak{t}$ und somit nach Hilfssatz 15:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\omega \in \Omega(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{R}_s \\ \omega \equiv \sigma_m \bmod \mathfrak{s} \\ \omega \equiv \varrho \bmod \mathfrak{at}}} 1 &= \sum_{\substack{\omega \in \Omega(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{R}_s \\ \omega \equiv \varrho_1 \bmod \mathfrak{s}\mathfrak{at}(\mathfrak{s}, \mathfrak{at})^{-1}}} 1 \\ &= \frac{w}{2^{n_1}\pi^{n_2} R H N(\mathfrak{t})\, \varphi(\mathfrak{s}\mathfrak{a}(\mathfrak{s}, \mathfrak{at})^{-1})} \int\limits_{\mathfrak{R}_s^*} \frac{d\tau^*}{\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)} + O(A^n e^{-c_6 \sqrt{a}}), \end{aligned} \tag{66}$$

wobei die positive Konstante c_6 und die O-Konstante wegen $s \in J_4$, $N(\mathfrak{s}\mathfrak{a}(\mathfrak{s}, \mathfrak{at})^{-1}) \leqq t^n N(\mathfrak{s})$ nur von K, r, f, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ abhängen.

Sei β der Punkt aus $\mathfrak{R}_s$ mit den Koordinaten $\beta^{(l)} = s_l \lambda^{(l)}([a^{2\Theta_s}] + 1)^{-1}$ $(l = 1, \ldots, n_1)$, $\beta^{(l)} = s_l |\lambda^{(l)}| ([a^{2\Theta_s}] + 1)^{-1} \exp (2\pi i\, s_{l+n_2}([a^{2\Theta_s}] + 1)^{-1})$ $(l = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2)$. Dann folgt für alle ω aus $\Omega(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{R}_s$, wenn man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Funktion $\Lambda_m(\omega) e^{2\pi i S(\omega\zeta)}$ anwendet und (13) sowie $s \in J_4$ beachtet:

$$\begin{aligned} &\Lambda_m(\omega) e^{2\pi i S(\omega\zeta)} - \Lambda_m(\beta) e^{2\pi i S(\beta\zeta)} \\ &\ll \sum_{l=1}^{n_1+n_2} \frac{|\omega^{(l)}| - |\beta^{(l)}|}{|\beta^{(l)}|} + \sum_{l=n_1+1}^{n_1+n_2} |\arg \omega^{(l)} - \arg \beta^{(l)}| + \sum_{l=1}^{n} |\omega^{(l)} - \beta^{(l)}|\, |\zeta^{(l)}| \\ &\ll A a^{-2\Theta_s}(A a^{-\Theta_s})^{-1} + a^{-2\Theta_s} + A a^{-2\Theta_s} h^{-1} t^{n-1} \ll a^{-\Theta_s}. \end{aligned} \tag{67}$$

Aus (66) und (67) folgt:

$$\begin{aligned} T^{(m)}(\xi)_{s,\varrho} &= \frac{w\, \Lambda_m(\beta)\, e^{2\pi i S(\varrho\gamma) + 2\pi i S(\beta\zeta)}}{2^{n_1}\pi^{n_2} R H N(\mathfrak{t})\, \varphi(\mathfrak{s}\mathfrak{a}(\mathfrak{s}, \mathfrak{at})^{-1})} \int\limits_{\mathfrak{R}_s^*} \frac{d\tau^*}{\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)} + \\ &+ O\left(A^n e^{-c_6\sqrt{a}} + \frac{a^{-\Theta_s}}{\varphi(\mathfrak{s}\mathfrak{a}(\mathfrak{s}, \mathfrak{at})^{-1})} \int\limits_{\mathfrak{R}_s^*} \frac{d\tau^*}{\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)}\right) \quad (\varrho \equiv \sigma_m \bmod (\mathfrak{s}, \mathfrak{at})). \end{aligned} \tag{68}$$

Für alle τ aus $\mathfrak{R}_s$ gilt die zu (67) analoge Abschätzung

$$\Lambda_m(\beta) e^{2\pi i S(\beta\zeta)} - \Lambda_m(\tau) e^{2\pi i S(\tau\zeta)} \ll a^{-\Theta_s},$$

woraus mit (68) folgt:

$$T^{(m)}(\xi)_{\mathfrak{s},\varrho} = \frac{w\, e^{2\pi i S(\varrho\gamma)}}{2^{n_1}\pi^{n_2} R H N(\mathfrak{t})\, \varphi(\mathfrak{s}\mathfrak{a}(\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})} \int\limits_{\mathfrak{R}_s^*} \frac{\Lambda_m(\tau)\, e^{2\pi i S(\tau\zeta)}}{\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)}\, d\tau^* +$$

(69)
$$+\, O\left(\frac{a^{-\Theta_4}}{\varphi(\mathfrak{s}\mathfrak{a}(\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})} \int\limits_{\mathfrak{R}_s^*} \frac{d\tau^*}{\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)} + A^n e^{-c_4\sqrt{a}}\right) \quad (\varrho = \sigma_m \bmod (\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t}))\,.$$

Setzt man für beliebige Körperzahlen γ:

$$P_m(\gamma) = \sum_{\substack{\sigma \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{t}\\ (\sigma,\mathfrak{a}\mathfrak{t})=\mathfrak{t}\\ \sigma\equiv\sigma_m \bmod (\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t})}} e^{2\pi i S(\sigma\gamma)} \quad (\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\gamma;\ m = 1, \ldots, r)\,,$$

so erhält man nach (64), (65) und (69):

$$T^{(m)}(\xi)_{\mathfrak{s}} = \frac{w\, P_m(\gamma)}{2^{n_1}\pi^{n_2} R H N(\mathfrak{t})\, \varphi(\mathfrak{s}\mathfrak{a}(\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})} \int\limits_{\mathfrak{R}_s^*} \frac{\Lambda_m(\tau)\, e^{2\pi i S(\tau\zeta)}}{\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)}\, d\tau^* +$$

$$+\, O\left(a^{-\Theta_4} \int\limits_{\mathfrak{R}_s^*} \frac{d\tau^*}{\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)} + \mathfrak{t}^n A^n e^{-c_4\sqrt{a}}\right) \quad (s \in J_4)\,.$$

Hierbei wurde die Abschätzung

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{t}\\ (\varrho,\mathfrak{a}\mathfrak{t})=\mathfrak{t}}} 1 = \varphi(\mathfrak{a}) \leqq \varphi(\mathfrak{a}\mathfrak{s}(\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})$$

benutzt. Nun ergibt die Summation über alle s aus J_4:

$$\sum_{s\in J_4} T^{(m)}(\xi)_{\mathfrak{s}} = \frac{w\, P_m(\gamma)}{2^{n_1}\pi^{n_2} R H N(\mathfrak{t})\, \varphi(\mathfrak{s}\mathfrak{a}(\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})} \int\limits_{\mathfrak{R}^*} \frac{\Lambda_m(\tau)\, e^{2\pi i S(\tau\zeta)}}{\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)}\, d\tau^* +$$

(70)
$$+\, O\left(a^{-\Theta_4} \int\limits_{\mathfrak{R}^*} \frac{d\tau^*}{\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)} + a^{2n\Theta_4}\, \mathfrak{t}^n A^n e^{-c_4\sqrt{a}}\right),$$

wobei $\mathfrak{R}$ die Menge aller Punkte τ aus E sei mit

$$[a^{\Theta_4}]\,([a^{2\Theta_4}]+1)^{-1}\lambda^{(l)} \leqq \tau^{(l)} < \lambda^{(l)} \qquad (l = 1, \ldots, n_1)\,,$$

$$[a^{\Theta_4}]\,([a^{2\Theta_4}]+1)^{-1}|\lambda^{(l)}| \leqq |\tau^{(l)}| < |\lambda^{(l)}| \quad (l = n_1 + 1, \ldots, n)\,.$$

Schließlich folgt mit der trivialen Abschätzung

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^*} \left(\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)\right)^{-1} d\tau^* \ll A^n$$

aus (62), (63) und (70) der

Satz 3. *Für alle ξ aus B_γ gilt*

$$T^{(m)}(\xi) = \frac{w P_m(\gamma)}{2^{n_1}\pi^{n_2} R H N(\mathfrak{t})\, \varphi(\mathfrak{s}\mathfrak{a}(\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})}\, \mathfrak{W}^{(m)}(\zeta) + O(A^n a^{-\Theta_4})\,,$$

wobei

$$\mathfrak{W}^{(m)}(\zeta) = \int\limits_{\mathfrak{R}^*} \frac{\Lambda_m(\tau)\, e^{2\pi i S(\tau\zeta)}}{\log\left(\frac{N(\tau)}{N(\mathfrak{t})}\right)}\, d\tau^* \qquad (m = 1, \ldots, r)$$

sei.

§ 6. Die Summation der singulären Reihe

Bei der späteren Auswertung der Integrale (19) wird die singuläre Reihe $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ in folgender Gestalt erscheinen:

$$\mathfrak{S}_r(\lambda) = \sum_{\gamma \bmod \mathfrak{d}^{-1}} \frac{e^{-2\pi i S(\gamma\lambda)}}{N(\mathfrak{t})^r\, \varphi^r(\mathfrak{d}\mathfrak{a}(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})} \prod_{m=1}^{r} P_m(\gamma).$$

Hierbei ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\gamma$ gesetzt, und γ läuft über alle Körperzahlen γ aus einem vollständigen Restsystem $\bmod\, \mathfrak{d}^{-1}$. Wir wollen für $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ die in Satz 1 ausgesprochenen Eigenschaften ableiten. Zunächst schicken wir einige zahlentheoretische Hilfssätze und Bemerkungen voraus, die nach einer Methode von RADEMACHER [6] bewiesen werden.

Hilfssatz 17. *Seien* $\mathfrak{a}, \mathfrak{v}, \mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{b}$ *ganze Ideale* $\neq (0)$ *von* K *mit* $\mathfrak{r}\,|\,\mathfrak{a}\mathfrak{v}, \mathfrak{b}\,|\,\mathfrak{a}$, *ferner* ν *und* α *ganze Körperzahlen mit* $(\alpha, \mathfrak{r}) = 1$, *und* γ *eine Körperzahl mit* $\mathfrak{a}_\gamma = \mathfrak{a}$. *Setzt man*

$$S_\mathfrak{b} = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{v} \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{r} \\ \mathfrak{b}\mathfrak{v} | \varrho}} e^{2\pi i S(\varrho\nu\gamma)},$$

so gilt

$$S_\mathfrak{b} = \begin{cases} 0 \ \textit{für}\ (\mathfrak{b}\mathfrak{v}, \mathfrak{r}) \neq 1, \\ 0 \ \textit{für}\ (\mathfrak{b}\mathfrak{v}, \mathfrak{r}) = 1,\ \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{r})^{-1} \nmid \nu, \\ e^{2\pi i S(\alpha\varkappa\nu\gamma)} N\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{r}}\right) \textit{für}\ (\mathfrak{b}\mathfrak{v}, \mathfrak{r}) = 1,\ \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{r})^{-1} | \nu, \end{cases} \tag{71}$$

wobei $\varkappa$ *eine ganze Körperzahl sei mit*

$$\varkappa \equiv 1 \bmod \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{v}\,|\,\varkappa. \tag{72}$$

Beweis: Ist $(\mathfrak{b}\mathfrak{v}, \mathfrak{r}) \neq 1$, so ist wegen $(\mathfrak{b}\mathfrak{v}, \mathfrak{r})\,|\,(\varrho, \mathfrak{r})$, $(\varrho, \mathfrak{r}) = (\alpha, \mathfrak{r}) = 1$ die Summe $S_\mathfrak{b}$ leer. Im Falle $(\mathfrak{b}\mathfrak{v}, \mathfrak{r}) = 1$ sei β eine beliebige Zahl aus $\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{r}$. Da dann mit ϱ auch $\varrho + \beta$ die Summationsbedingungen von $S_\mathfrak{b}$ erfüllt, folgt

$$S_\mathfrak{b} = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{v} \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{r} \\ \mathfrak{b}\mathfrak{v} | \varrho}} e^{2\pi i S((\varrho+\beta)\nu\gamma)} = e^{2\pi i S(\beta\nu\gamma)} S_\mathfrak{b}.$$

Somit verschwindet $S_\mathfrak{b}$, wenn in $\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{r}$ ein β mit nicht ganzrationalem $S(\beta\nu\gamma)$ gefunden werden kann. Ein solches β existiert genau dann, wenn $(\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{r}\mathfrak{d})^{-1} \nmid \nu\gamma$, also $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{r})^{-1} \nmid \nu$ gilt, womit der zweite Teil von (71) bewiesen ist. Gilt $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{r})^{-1}\,|\,\nu$, so hat $\nu\gamma\mathfrak{d}$ höchstens den Nenner $\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{r}$, und deshalb bleibt $S_\mathfrak{b}$ ungeändert, wenn wir jedes ϱ durch eine $\bmod\, \mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{r}$ kongruente Zahl ersetzen. Sei $\varkappa$ eine Körperzahl, die (72) erfüllt — wegen $(\mathfrak{b}\mathfrak{v}, \mathfrak{r}) = 1$ existiert ein solches

$\varkappa$ —, so folgt, da $\varrho \equiv \alpha\varkappa \bmod \mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{r}$ ist:

$$S_{\mathfrak{b}} = e^{2\pi i S(\alpha\varkappa\nu\gamma)} \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{v} \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{r} \\ \mathfrak{b}\mathfrak{v} | \varrho}} 1 = e^{2\pi i S(\alpha\varkappa\nu\gamma)} N\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{r}}\right),$$

womit auch der dritte Teil von (71) bewiesen ist.

Hilfssatz 18. *Mit den Bezeichnungen von Hilfssatz 17 gilt*

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{v} \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{r} \\ (\varrho, \mathfrak{a}\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}}} e^{2\pi i S(\varrho\nu\gamma)} = \begin{cases} 0 \text{ für } (\mathfrak{v}, \mathfrak{r}) \neq 1, \\ \displaystyle\sum_{\substack{1 | \mathfrak{b} | \mathfrak{a} \\ (\mathfrak{b}\mathfrak{v}, \mathfrak{r}) = 1 \\ \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{r})^{-1} | \nu}} \mu(\mathfrak{b})\, N\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{r}}\right) e^{2\pi i S(\alpha\varkappa\nu\gamma)} \text{ für } (\mathfrak{v}, \mathfrak{r}) = 1, \end{cases}$$

worin $\varkappa$ gemäß (72) von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{r}$ abhängt.

Beweis: Mit der Abkürzung

$$T_{\mathfrak{c}} = \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{v} \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{r} \\ (\varrho, \mathfrak{a}\mathfrak{v}) = \mathfrak{c}\mathfrak{v}}} e^{2\pi i S(\varrho\nu\gamma)}$$

für ganze Ideale $\mathfrak{c}$ wird

$$S_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{b} | \mathfrak{c} | \mathfrak{a}} \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{v} \\ \varrho \equiv \alpha \bmod \mathfrak{r} \\ (\varrho, \mathfrak{a}\mathfrak{v}) = \mathfrak{c}\mathfrak{v}}} e^{2\pi i S(\varrho\nu\gamma)} = \sum_{\mathfrak{b} | \mathfrak{c} | \mathfrak{a}} T_{\mathfrak{c}},$$

also

$$\sum_{1 | \mathfrak{b} | \mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) S_{\mathfrak{b}} = \sum_{1 | \mathfrak{b} | \mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{\mathfrak{b} | \mathfrak{c} | \mathfrak{a}} T_{\mathfrak{c}} = \sum_{1 | \mathfrak{c} | \mathfrak{a}} T_{\mathfrak{c}} \sum_{1 | \mathfrak{b} | \mathfrak{c}} \mu(\mathfrak{b}) = T_{(1)}.$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfssatz 17 die Behauptung von Hilfssatz 18. Zwei Spezialfälle von Hilfssatz 18 wollen wir noch besonders hervorheben, da nur sie im folgenden gebraucht werden.

Erstens erhalten wir für $\mathfrak{v} = \mathfrak{r} = (1)$, $\alpha = 1$:

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho, \mathfrak{a}) = 1}} e^{2\pi i S(\varrho\nu\gamma)} = \sum_{\substack{1 | \mathfrak{b} | \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} | \nu}} \mu(\mathfrak{b})\, N\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right) e^{2\pi i S(\varkappa\nu\gamma)}.$$

Da $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} | \nu$ und nach (72) $\mathfrak{b} | \varkappa$ gilt, so ist $\mathfrak{a} | \nu\varkappa$, also $\varkappa\nu\gamma\mathfrak{d}$ ein ganzes Ideal, so daß sich die vorige Gleichung bei Einführung der Summationsvariablen $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ vereinfacht zu

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho, \mathfrak{a}) = 1}} e^{2\pi i S(\varrho\nu\gamma)} = \sum_{1 | \mathfrak{c} | (\mathfrak{a}, \nu)} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c}). \tag{73}$$

Wenn ϱ ein verkürztes Restsystem mod $\mathfrak{a}$ durchläuft, so durchläuft $\beta = \gamma\varrho$ ein System von mod $\mathfrak{d}^{-1}$ inkongruenten Zahlen von K mit $\mathfrak{a}_\beta = \mathfrak{a}$. Somit geht (73) über in

$$\sum_{\substack{\beta \bmod \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathfrak{a}_\beta = \mathfrak{a}}} e^{2\pi i S(\nu\beta)} = \sum_{1 | \mathfrak{c} | (\mathfrak{a}, \nu)} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c}). \tag{74}$$

Zweitens sei $\mathfrak{v} = \mathfrak{t}$, $\mathfrak{r} = (\mathfrak{s}, \mathfrak{a}\mathfrak{t})$, $\nu = 1$ und $\alpha = \sigma_m$. Dann folgt aus Hilfssatz 18 bei Beachtung von $(\mathfrak{t}, \mathfrak{r}) = (\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$:

$$(75) \qquad P_m(\gamma) = \begin{cases} 0 \text{ für } (\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) \neq 1\,, \\ \displaystyle\sum_{\substack{1 \mid \mathfrak{b} \mid \mathfrak{a} \\ (\mathfrak{b}\mathfrak{t}, \mathfrak{r}) = 1 \\ \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}\mathfrak{t}\mathfrak{r}}} \mu(\mathfrak{b}) N\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{r}}\right) e^{2\pi i S(\sigma_m \varkappa \gamma)} \text{ für } (\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) = 1\,. \end{cases}$$

Ist $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = 1$, so ist $\mathfrak{r} = (\mathfrak{s}, \mathfrak{a})$ und, falls zusätzlich $1 \mid \mathfrak{b} \mid \mathfrak{a}$, $(\mathfrak{b}\mathfrak{t}, \mathfrak{r}) = 1$ erfüllt ist, ist $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{r})^{-1}$ ganz. Wenn man $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{r})^{-1}$ setzt, so sind also im Falle $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = 1$ die Bedingungen $1 \mid \mathfrak{b} \mid \mathfrak{a}$, $(\mathfrak{b}\mathfrak{t}, \mathfrak{r}) = 1$, $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}\mathfrak{t}\mathfrak{r}$ äquivalent zu $1 \mid \mathfrak{c} \mid (\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}, \mathfrak{t})$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{t}(\mathfrak{c}\mathfrak{r})^{-1}, \mathfrak{r}) = 1$, und dieses ist wegen $\mathfrak{c} \mid \mathfrak{t}$, $(\mathfrak{t}\mathfrak{c}^{-1}, \mathfrak{r}) = 1$ wiederum gleichbedeutend mit $1 \mid \mathfrak{c} \mid (\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}, \mathfrak{t})$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}, \mathfrak{s}) = 1$. Hiermit folgt aus (75):

$$(76) \quad P_m(\gamma) = \begin{cases} 0 \text{ für } (\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) \neq 1\,, \\ 0 \text{ für } (\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = 1\,, (\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}, \mathfrak{s}) \neq 1\,, \\ \displaystyle\sum_{1 \mid \mathfrak{c} \mid (\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}, \mathfrak{t})} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}\mathfrak{r}}\right) N(\mathfrak{c}) e^{2\pi i S(\sigma_m \varkappa \gamma)} \text{ für } (\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}, \mathfrak{s}) = 1\,, \end{cases}$$

wobei $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\gamma$ und $\mathfrak{r} = (\mathfrak{s}, \mathfrak{a})$ ist und die Körperzahl $\varkappa$ von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{r}$ gemäß den Bedingungen $\varkappa \equiv 1 \bmod \mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{t}(\mathfrak{c}\mathfrak{r})^{-1} \mid \varkappa$ abhängt.

Hilfssatz 19. *Für zwei ganze Ideale* $\mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{g} \neq (0)$ *von* K *sei*

$$(77) \qquad C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f}) = \sum_{1 \mid \mathfrak{c} \mid (\mathfrak{g}, \mathfrak{f})} \mu\left(\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{c}}\right) N(\mathfrak{c})\,,$$

und für ganze Körperzahlen ν *sei* $C_{\mathfrak{g}}(\nu) = C_{\mathfrak{g}}((\nu))$ *gesetzt. Dann gilt*

$$(78) \qquad C_{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2}(\mathfrak{f}) = C_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{f})\, C_{\mathfrak{g}_2}(\mathfrak{f}) \textit{ für } (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) = 1\,.$$

Ferner ist für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ (*s ganzrational* $\geqq 0$):

$$(79) \qquad C_{\mathfrak{p}^s}(\mathfrak{f}) = \begin{cases} 0 \textit{ für } \mathfrak{p}^{s-1} \nmid \mathfrak{f}\,, \\ -N(\mathfrak{p})^{s-1} \textit{ für } \mathfrak{p}^{s-1} \mid \mathfrak{f},\ \mathfrak{p}^s \nmid \mathfrak{f}\,, \\ \varphi(\mathfrak{p}^s) \textit{ für } \mathfrak{p}^s \mid \mathfrak{f}\,. \end{cases}$$

Beweis: Hilfssatz 19 leitet man leicht mit den bekannten Eigenschaften der Möbiusschen und Eulerschen Funktion her.

Wegen $\varphi(\mathfrak{a}\mathfrak{s}(\mathfrak{s}, \mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1}) = \varphi(\mathfrak{a}\mathfrak{s}\mathfrak{r}^{-1}) = \varphi(\mathfrak{s})\,\varphi(\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1})$ für $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}, \mathfrak{s}) = 1$ erlaubt $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ nach (76), (74), (77) und (78) folgende Schreibweise:

$$\mathfrak{S}_r(\lambda) = 0 \text{ für } (\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) \neq 1\,,$$

$$(80) \quad \begin{aligned} \mathfrak{S}_r(\lambda) &= N(\mathfrak{t})^{-r} \varphi^{-r}(\mathfrak{s}) \sum_{\substack{1 \mid \mathfrak{a} \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}, \mathfrak{s}) = 1}} \varphi^{-r}(\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}) \times \\ &\times \sum_{\substack{\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_r \\ 1 \mid \mathfrak{c}_m \mid (\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}, \mathfrak{t})}} \left(\prod_{m=1}^{r} \left(\mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}_m \mathfrak{r}}\right) N(\mathfrak{c}_m) \right) \sum_{\substack{\gamma \bmod \mathfrak{b}^{-1} \\ \mathfrak{a}_\gamma = \mathfrak{a}}} e^{2\pi i S\left(\left(\sum_{m=1}^{r} \sigma_m \varkappa_m - \lambda\right) \gamma\right)} \right) \\ &= N(\mathfrak{t})^{-r} \varphi^{-r}(\mathfrak{s}) \sum_{\substack{1 \mid \mathfrak{a} \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}, \mathfrak{s}) = 1}} \varphi^{-r}(\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}) \sum_{\substack{\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_r \\ 1 \mid \mathfrak{c}_m \mid (\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}, \mathfrak{t})}} \left(\prod_{m=1}^{r} \left(\mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}_m \mathfrak{r}}\right) N(\mathfrak{c}_m) \right) \times \right. \\ &\left. \times\, C_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}}}\left(\sum_{m=1}^{r} \sigma_m \varkappa_m - \lambda \right) C_{\mathfrak{r}}\left(\sum_{m=1}^{r} \sigma_m \varkappa_m - \lambda \right) \right) \end{aligned}$$

für $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = 1$, wobei $\mathfrak{r} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{s})$ und $\varkappa_m$ jeweils eine Körperzahl mit

$$(81) \qquad \varkappa_m \equiv 1 \bmod \mathfrak{r}, \ \varkappa_m \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{t}(\mathfrak{c}_m \mathfrak{r})^{-1}$$

ist. Nach (81) gilt

$$\left(\mathfrak{r}, \sum_{m=1}^{r} \sigma_m \varkappa_m - \lambda\right) = \left(\mathfrak{r}, \sum_{m=1}^{r} \sigma_m - \lambda\right), \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}}, \sum_{m=1}^{r} \sigma_m \varkappa_m - \lambda\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}}, \lambda\right)$$

und somit nach (77):

$$C_{\mathfrak{r}}\left(\sum_{m=1}^{r} \sigma_m \varkappa_m - \lambda\right) = C_{\mathfrak{r}}\left(\sum_{m=1}^{r} \sigma_m - \lambda\right), \ C_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}}}\left(\sum_{m=1}^{r} \sigma_m \varkappa_m - \lambda\right) = C_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}}}(\lambda).$$

Hiermit folgt aus (80) und (77) für $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = 1$:

$$(82) \qquad \mathfrak{S}_r(\lambda) = N(\mathfrak{t})^{-r} \varphi^{-r}(\mathfrak{s}) \sum_{\substack{1 \mid \mathfrak{a} \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}, \mathfrak{s}) = 1}} \left(\frac{C_{\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1}}(\mathfrak{t})}{\varphi(\mathfrak{a}\mathfrak{r}^{-1})}\right)^r C_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}}}(\lambda)\, C_{\mathfrak{r}}\left(\sum_{m=1}^{r} \sigma_m - \lambda\right).$$

Durchläuft $\mathfrak{a}$ alle Ideale mit $1 \mid \mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a}(\mathfrak{a}, \mathfrak{s})^{-1}, \mathfrak{s}) = 1$, so durchläuft das Paar $(\mathfrak{k}, \mathfrak{r})$ mit $\mathfrak{k} = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}, \mathfrak{s})^{-1}$, $\mathfrak{r} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{s})$ die Gesamtheit aller Paare $(\mathfrak{k}, \mathfrak{r})$ mit $1 \mid \mathfrak{k}$, $(\mathfrak{k}, \mathfrak{s}) = 1$, $1 \mid \mathfrak{r} \mid \mathfrak{s}$ genau einmal. Somit folgt aus (82) für $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = 1$:

$$(83) \qquad \mathfrak{S}_r(\lambda) = N(\mathfrak{t})^{-r} \varphi^{-r}(\mathfrak{s}) \sum_{\substack{1 \mid \mathfrak{k}, (\mathfrak{k}, \mathfrak{s}) = 1 \\ 1 \mid \mathfrak{r} \mid \mathfrak{s}}} \left(\frac{C_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{t})}{\varphi(\mathfrak{k})}\right)^r C_{\mathfrak{k}}(\lambda) \sum_{1 \mid \mathfrak{w} \mid (\mathfrak{r}, \Sigma \sigma_m - \lambda)} \mu\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{w}}\right) N(\mathfrak{w}).$$

Nun ist

$$\sum_{1 \mid \mathfrak{r} \mid \mathfrak{s}} \ \sum_{1 \mid \mathfrak{w} \mid (\mathfrak{r}, \Sigma \sigma_m - \lambda)} \mu\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{w}}\right) N(\mathfrak{w}) = \sum_{1 \mid \mathfrak{w} \mid (\mathfrak{r}, \Sigma \sigma_m - \lambda)} N(\mathfrak{w}) \sum_{1 \mid \mathfrak{r}' \mid \mathfrak{s}\mathfrak{w}^{-1}} \mu(\mathfrak{r}')$$

$$= \begin{cases} 0 \ \text{für} \ \mathfrak{s} \nmid (\sum \sigma_m - \lambda), \\ N(\mathfrak{s}) \ \text{für} \ \mathfrak{s} \mid (\sum \sigma_m - \lambda), \end{cases}$$

so daß wir aus (80) und (83) erhalten

$$(84) \qquad \mathfrak{S}_r(\lambda) = \begin{cases} 0 \ \text{für} \ (\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) \neq 1 \ \text{oder für} \ \sum_{m=1}^{r} \sigma_m \not\equiv \lambda \bmod \mathfrak{s}, \\ \dfrac{N(\mathfrak{s})}{N(\mathfrak{t})^r \varphi^r(\mathfrak{s})} \sum_{1 \mid \mathfrak{k}, (\mathfrak{k}, \mathfrak{s}) = 1} \left(\dfrac{C_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{t})}{\varphi(\mathfrak{k})}\right)^r C_{\mathfrak{k}}(\lambda) \\ \qquad \text{für} \ (\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = 1, \sum_{m=1}^{r} \sigma_m \equiv \lambda \bmod \mathfrak{s}. \end{cases}$$

Zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von K definieren wir eine ganzrationale Zahl $s_{\mathfrak{p}} \geqq 0$ durch

$$\mathfrak{p}^{s_{\mathfrak{p}}} \mid \mathfrak{t}, \ \mathfrak{p}^{s_{\mathfrak{p}}+1} \nmid \mathfrak{t}.$$

Nach dieser Definition folgt aus (84) mit (78) und (79) für

$$(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = 1, \ \sum_{m=1}^{r} \sigma_m \equiv \lambda \bmod \mathfrak{s}:$$

$$(85) \qquad \mathfrak{S}_r(\lambda) = \frac{N(\mathfrak{s})}{N(\mathfrak{t})^r \varphi^r(\mathfrak{s})} \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{s}} \left(\sum_{s=0}^{s_{\mathfrak{p}}} C_{\mathfrak{p}^s}(\lambda) + \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p}) - 1}\right)^r C_{\mathfrak{p}^{s_{\mathfrak{p}}+1}}(\lambda)\right).$$

Aus (85) folgt zunächst, daß

$$\mathfrak{S}_r(\lambda) = 0 \quad \text{für } \mathfrak{t} \nmid \lambda . \tag{86}$$

Denn im Falle $\mathfrak{t} \nmid \lambda$, $(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) = 1$ gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{s}$, $\mathfrak{p}^k \mid \lambda$, $\mathfrak{p}^{k+1} \nmid \lambda$, wobei $0 \leqq k < s_{\mathfrak{p}}$, und somit ist nach (79):

$$\sum_{s=0}^{s_{\mathfrak{p}}} C_{\mathfrak{p}^s}(\lambda) + \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^r C_{\mathfrak{p}^{s_{\mathfrak{p}}+1}}(\lambda) = \sum_{s=0}^{k} \varphi(\mathfrak{p}^s) - N(\mathfrak{p}^k) = 0 .$$

Für $\mathfrak{t} \mid \lambda$, $\sum\limits_{m=1}^{r} \sigma_m \equiv \lambda \bmod \mathfrak{s}$, $(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) = 1$ erhalten wir aus (85) mit (79):

$$\mathfrak{S}_r(\lambda) = \frac{N(\mathfrak{s})}{N(\mathfrak{t})^{r-1}\,\varphi^r(\mathfrak{s})} \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{s} \\ \mathfrak{p} \nmid \lambda\mathfrak{t}^{-1}}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^r\right) \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{s} \\ \mathfrak{p} \mid \lambda\mathfrak{t}^{-1}}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^{r-1}\right). \tag{87}$$

In (87) können verschwindende Faktoren nur für solche $\mathfrak{p}$ auftreten, für die $N(\mathfrak{p}) = 2$ ist. Ist $\mathfrak{L}$ das Ideal von K mit der in Satz 1 angegebenen Bedeutung, so isolieren wir die eventuell verschwindenden Faktoren in $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ wie folgt:

$$\mathfrak{S}_r(\lambda) = \frac{N(\mathfrak{s})}{N(\mathfrak{t})^{r-1}\,\varphi^r(\mathfrak{s})}\, \Delta \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{s} \\ \mathfrak{p} \nmid \lambda\mathfrak{t}^{-1} \\ N(\mathfrak{p}) > 2}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^r\right) \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{s} \\ \mathfrak{p} \mid \lambda\mathfrak{t}^{-1} \\ N(\mathfrak{p}) > 2}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^{r-1}\right), \tag{88}$$

wobei

$$\Delta = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{L} \\ \mathfrak{p} \nmid \lambda\mathfrak{t}^{-1}}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^r\right) \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{L} \\ \mathfrak{p} \mid \lambda\mathfrak{t}^{-1}}} \left(1 - \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)^{r-1}\right)$$

gesetzt ist.

Ist r gerade, so kann nur im ersten Produkt von Δ ein verschwindender Faktor vorkommen, und zwar genau dann, wenn es ein $\mathfrak{p}$ gibt mit $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{L}, \mathfrak{p} \nmid \lambda\mathfrak{t}^{-1}$, was gleichbedeutend mit $\mathfrak{L} \nmid \lambda\mathfrak{t}^{-1}$ ist. Im Falle, daß $\mathfrak{L} \mid \lambda\mathfrak{t}^{-1}$, ist das erste Produkt leer und das zweite besteht aus lauter Faktoren 2. Bezeichnet man mit g die Anzahl der Primteiler von $\mathfrak{L}$, so gilt also bei geradem r:

$$\Delta = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathfrak{L} \nmid \lambda\mathfrak{t}^{-1}, \\ 2^g & \text{für } \mathfrak{L} \mid \lambda\mathfrak{t}^{-1}. \end{cases}$$

Mit einer analogen Überlegung findet man für ungerades r:

$$\Delta = \begin{cases} 0 & \text{für } (\mathfrak{L}, \lambda\mathfrak{t}^{-1}) \neq 1 , \\ 2^g & \text{für } (\mathfrak{L}, \lambda\mathfrak{t}^{-1}) = 1 . \end{cases}$$

Diese beiden Ergebnisse über Δ lassen sich zusammenfassen zu

$$\Delta = \begin{cases} 2^g & \text{für } \mathfrak{L} \mid r,\ \mathfrak{L} \mid \lambda\mathfrak{t}^{-1} \text{ oder für } (\mathfrak{L}, r) = (\mathfrak{L}, \lambda\mathfrak{t}^{-1}) = 1 , \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{89}$$

An (84), (86), (88) und (89) liest man unmittelbar die in Satz 1 aufgezählten Eigenschaften von $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ ab.

§ 7. Die Auswertung der Integrale

Hilfssatz 20. *Für beliebige reelle Zahlen z, v, s_1, s_2, s_3 mit $s_2 > s_1 > 0$, $s_3 \geq 1$ und für alle ganzrationalen $k \geq 0$ genügt die Funktion*

$$\Phi_k(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} e^{2\pi i u z} u^{iv} \log^k \left(\frac{u}{s_2 s_3}\right) du$$

der Abschätzung

$$\Phi_k(s_1, s_2) \ll \operatorname{Min}\left(s_2 s_3 k!, s_2 \log^k \left(\frac{s_2 s_3}{s_1}\right), \frac{1}{|z|} \log^k \left(\frac{s_2 s_3}{s_1}\right)\right). \tag{90}$$

Ist zusätzlich $|z|^{-1} > s_1$, so gilt

$$\Phi_k(s_1, s_2) \ll \frac{1}{|z|} (s_3 k! + |\log(s_2 s_3 |z|)|^k). \tag{91}$$

Dabei hängen in (90) und (91) die O-Konstanten nur von v ab.

Beweis:

1. Offenbar ist $\Phi_0(0, s_2) \ll \int_0^{s_2} du = s_2$.

2. Für $|z|^{-1} < s_2$ gilt

$$\Phi_0(0, s_2) \ll \int_0^{|z|^{-1}} du + \left|\int_{|z|^{-1}}^{s_2} e^{2\pi i u z} u^{iv} du\right| \leq \frac{1}{|z|} + \left|\left[\frac{e^{2\pi i u z} u^{iv}}{2\pi i z}\right]_{|z|^{-1}}^{s_2}\right| +$$

$$+ \left|iv \int_{|z|^{-1}}^{s_2} \frac{e^{2\pi i u z}}{2\pi i z} u^{iv-1} du\right| \ll \frac{1}{|z|} + \left|\left[\frac{e^{2\pi i u z}}{(2\pi i z)^2} u^{iv-1}\right]_{|z|^{-1}}^{s_2}\right| +$$

$$+ \left|\int_{|z|^{-1}}^{s_2} \frac{e^{2\pi i u z}}{(2\pi i z)^2} u^{iv-2} du\right| \ll \frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z|^2} \int_{|z|^{-1}}^{s_2} u^{-2} du \ll \frac{1}{|z|}.$$

Aus 1. und 2. folgt $\Phi_0(0, s_2) \ll \operatorname{Min}(s_2, |z|^{-1})$, also

$$|\Phi_0(s_1, s_2)| \leq |\Phi_0(0, s_1)| + |\Phi_0(0, s_2)| \ll \operatorname{Min}(s_2, |z|^{-1}). \tag{92}$$

3. Mittels partieller Integration und (92) erhalten wir

$$\Phi_k(s_1, s_2) = \Phi_0(s_1, s_2) \log^k \left(\frac{1}{s_3}\right) - k \int_{s_1}^{s_2} \Phi_0(s_1, u) \log^{k-1} \left(\frac{u}{s_2 s_3}\right) \frac{du}{u} \ll$$

$$\ll \operatorname{Min}\left(s_2, \frac{1}{|z|}\right) \log^k \left(\frac{s_2 s_3}{s_1}\right).$$

4. $\Phi_k(s_1, s_2) \ll \int_0^{s_2 s_3} \log^k \left(\frac{s_2 s_3}{u}\right) du = s_2 s_3 k!$.

Aus 3. und 4. folgt (90). Ist $s_1 < |z|^{-1} < s_2$, so folgt aus (90):

$$|\Phi_k(s_1, s_2)| \leq \left|\Phi_k\left(s_1, \frac{1}{|z|}\right)\right| + \left|\Phi_k\left(\frac{1}{|z|}, s_2\right)\right| \ll \frac{1}{|z|} s_3 k! + \frac{1}{|z|} |\log(s_2 s_3 |z|)|^k,$$

womit (91) bewiesen ist, denn für $|z|^{-1} \geq s_2$ ist dies nach (90) richtig.

Hilfssatz 21. *Für beliebige reelle Zahlen $z, \psi, v, s_1, s_2, s_3$ mit $z \geqq 0$, $s_2 > s_1 > 0$, $s_3 \geqq 1$ und für alle ganzrationalen Zahlen y, k mit $k \geqq 0$ genügt die Funktion*

$$\Psi_k(s_1, s_2) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\varrho=s_1}^{s_2} e^{4\pi i \varrho z \cos(\varphi+\psi) + i y \varphi} \varrho^{iv+1} \log^k\left(\frac{\varrho^2}{s_2^2 s_3}\right) d\varphi\, d\varrho$$

der Abschätzung

$$\Psi_k(s_1, s_2) \ll \operatorname{Min}\left(s_2^2 s_3 k!,\ s_2^2 \log^k\left(\frac{s_2^2 s_3}{s_1^2}\right),\ s_2^{1/2} z^{-3/2} \log^k\left(\frac{s_2^2 s_3}{s_1^2}\right)\right). \tag{93}$$

Ist zusätzlich $z^{-3/4} > s_1$, so gilt

$$\Psi_k(s_1, s_2) \ll z^{-3/2}(s_3 k! + s_2^{1/2}\, |\log(s_2^2 s_3 z^{3/2})|^k)\,. \tag{94}$$

Dabei hängen in (93) *und* (94) *die O-Konstanten nur von v und y ab.*

Beweis: Aus der Theorie der Besselschen Funktionen ist bekannt:

$$J_y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(y\varphi - x\sin\varphi)} d\varphi = \frac{(-i)^y}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(y\varphi + x\cos\varphi)} d\varphi\,, \tag{95}$$

$$J_y(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\cos\left(x - \frac{y\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \tag{96}$$

für alle reellen $x \neq 0$, wobei die O-Konstante nur von y abhängt [10, 2 · 2 (5) und 7 · 21 (1)].

1. Offenbar ist

$$\Psi_0(s_1, s_2) \ll \int_0^{s_2} \varrho\, d\varrho \ll s_2^2\,.$$

2. Mit (95) und (96) erhalten wir

$$\Psi_0(s_1, s_2) \ll \left|\int_{s_1}^{s_2} \cos\left(4\pi\varrho z - \frac{y\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \varrho^{iv+1/2} z^{-1/2} d\varrho\right| + \int_{s_1}^{s_2} \varrho^{-1/2} z^{-3/2} d\varrho \ll$$

$$\ll \left|s_2^{iv+1/2} z^{-1/2} \int_{s_1}^{s_2} \cos\left(4\pi\varrho z - \frac{y\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) d\varrho\right| +$$

$$+ \left|\int_{s_1}^{s_2} \varrho^{iv-1/2} z^{-1/2} d\varrho \int_{s_1}^{\varrho} \cos\left(4\pi x z - \frac{y\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dx\right| + s_2^{1/2} z^{-3/2} \ll s_2^{1/2} z^{-3/2}.$$

Aus 1. und 2. folgt

$$\Psi_0(s_1, s_2) \ll \operatorname{Min}(s_2^2, s_2^{1/2} z^{-3/2})\,.$$

Hieraus gewinnt man analog zur Herleitung von (90) und (91) mittels partieller Integration die Abschätzungen (93) und (94).

Hilfssatz 22. *Sei $\mathfrak{J}$ die Menge aller Punkte τ aus E mit $|\tau| < |\lambda|$, $\tau > 0$, und sei*

$$\mathfrak{V}_f^{(m)}(\zeta) = \sum_{k=0}^{f-1} \frac{(-1)^k}{(na)^{k+1}} \int_{\mathfrak{J}^*} \Lambda_m(\tau) e^{2\pi i S(\tau\zeta)} \log^k\left(\frac{N(\tau)}{N(\lambda) N(\mathfrak{t})}\right) d\tau^*$$

$$= \sum_{k=0}^{f-1} \frac{i^k}{(na)^{k+1}} \Lambda_m(\lambda) \Delta_m(\mathfrak{t}) \left(\sum_{l=1}^{n_1+n_2} e_l \frac{\partial}{\partial v_{ml}}\right)^k \int_{\mathfrak{J}^*} \frac{\Lambda_m(\tau)\, e^{2\pi i S(\tau\zeta)}}{\Lambda_m(\lambda)\, \Delta_m(\mathfrak{t})} d\tau^* \tag{97}$$

$$(m = 1, \ldots, r;\ \zeta \in E)\,.$$

Dann gilt für alle Punkte ζ aus E und für $m = 1, \ldots, r$:

$$\mathfrak{W}^{(m)}(\zeta) - \mathfrak{V}_f^{(m)}(\zeta) \ll A^n a^{-f-1}, \tag{98}$$

$$\mathfrak{V}_f^{(m)}(\zeta) \ll W_f(\zeta), \tag{99}$$

$$\mathfrak{W}^{(m)}(\zeta) \ll W_f(\zeta) + A^n a^{-\Theta_1}, \tag{100}$$

wobei

$$W_f(\zeta) = \frac{1}{a} \prod_{l=1}^{n_1+n_2} \operatorname{Min}\left(A^{e_l}, A^{\frac{e_l-1}{2}} |\zeta^{(l)}|^{-\frac{e_l+1}{2}} \left(1 + \left|\frac{\log\left(A^{e_l} |\zeta^{(l)}|^{\frac{e_l+1}{2}}\right)}{a}\right|^{f-1}\right)\right)$$

gesetzt ist.

Beweis:

Setzt man

$$\mathfrak{V}^*(\zeta) = \sum_{k=0}^{f-1} \frac{(-1)^k}{(na)^{k+1}} \int_{\mathfrak{R}^*} \Lambda_m(\tau) e^{2\pi i S(\tau\zeta)} \log^k\left(\frac{N(\tau)}{N(\lambda) N(t)}\right) d\tau^*,$$

so gilt

$$\mathfrak{W}^{(m)}(\zeta) - \mathfrak{V}^*(\zeta) = \sum_{k=f}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(na)^{k+1}} \int_{\mathfrak{R}^*} \Lambda_m(\tau) e^{2\pi i S(\tau\zeta)} \log^k\left(\frac{N(\tau)}{N(\lambda) N(t)}\right) d\tau^*. \tag{101}$$

Auf Grund der Identität

$$\log^k\left(\frac{|N(\tau)|}{N(\lambda) N(t)}\right) = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_{n_1+n_2} \geq 0 \\ k_1 + \cdots + k_{n_1+n_2} = k}} \frac{k!}{k_1! \ldots k_{n_1+n_2}!} \prod_{l=1}^{n_1+n_2} \log^{k_l}\left(\left|\frac{\tau^{(l)}}{\lambda^{(l)} N(t)^{1/n}}\right|^{e_l}\right)$$

ist jedes Integral auf der rechten Seite von (101) eine Linearkombination von Integralen, die sich alle als Produkt von n_1 Integralen der Gestalt $\Phi_k(s_1, s_2)$ und von n_2 Integralen der Gestalt $\Psi_k(s_1, s_2)$ darstellen lassen. Daher folgt aus (101) mit (90) und (93):

$$\mathfrak{W}^{(m)}(\zeta) - \mathfrak{V}^*(\zeta) \ll \sum_{k=f}^{\infty} \frac{1}{(na)^{k+1}} \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_{n_1+n_2} \geq 0 \\ k_1 + \cdots + k_{n_1+n_2} = k}} \frac{k!}{k_1! \ldots k_{n_1+n_2}!} \times$$

$$\prod_{l=1}^{n_1+n_2} \operatorname{Min}\left(A^{e_l} k_l!, A^{e_l} \log^{k_l}(2N(t) a^{e_l \Theta_2}), A^{\frac{e_l-1}{2}} |\zeta^{(l)}|^{-\frac{e_l+1}{2}} \log^{k_l}(2N(t) a^{e_l \Theta_2})\right) \tag{102}$$

$$\ll \operatorname{Min}\left(A^n a^{-f-1}, a^{-f} \prod_{l=1}^{n_1+n_2} \operatorname{Min}\left(A^{e_l}, A^{\frac{e_l-1}{2}} |\zeta^{(l)}|^{-\frac{e_l+1}{2}}\right)\right).$$

Mit demselben Verfahren gewinnt man

$$\mathfrak{V}_f^{(m)}(\zeta) - \mathfrak{V}^*(\zeta) \ll \sum_{k=0}^{f-1} \frac{1}{(na)^{k+1}} \int_{\mathfrak{V}^* - \mathfrak{R}^*} \log^k\left(\frac{N(\lambda) N(t)}{N(\tau)}\right) d\tau^* \ll A^n a^{-\Theta_1}. \tag{103}$$

Aus (102) und (103) folgt (98). Analog zu (102) beweist man mit Hilfssatz 21

und 22 die Abschätzung (99), nämlich

$$\mathfrak{B}_f^{(m)}(\zeta) \ll \sum_{k=0}^{f-1} \frac{1}{(na)^{k+1}} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_{n_1+n_2}\geq 0\\ k_1+\cdots+k_{n_1+n_2}=k}} \frac{k!}{k_1!\dots k_{n_1+n_2}!} \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{n_1+n_2} \operatorname{Min}\left(A^{e_l}k_l!,\, A^{\frac{e_l-1}{2}}|\zeta^{(l)}|^{-\frac{e_l+1}{2}}\left(k_l! + \left|\log\left(A^{e_l}|\zeta^{(l)}|^{\frac{e_l+1}{2}}\right)\right|^{k_l}\right)\right) \ll W_f(\zeta).$$

Schließlich resultiert aus (102), (103) und (99) die Abschätzung (100).

Hilfssatz 23. *Für beliebige reelle Zahlen* $x_1, \dots, x_r, g$ *mit* $g > 0$ *werde*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_g(x_1, \dots, x_r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i g z} \prod_{m=1}^{r} \left(\int_0^g e^{2\pi i u z} u^{i x_m} du\right) dz$$

gesetzt. Dann ist

$$\mathfrak{F} = g^{r-1+i\sum_{m=1}^{r} x_m} \frac{\prod_{m=1}^{r} \Gamma(1+i x_m)}{\Gamma\left(r + i\sum_{m=1}^{r} x_m\right)}.$$

Beweis: Wir definieren für reelles $s > 1$:

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2\pi - i\infty}^{2\pi + i\infty} \frac{e^{gz}}{z^s} \prod_{m=1}^{r} \left(\int_0^g e^{-uz} u^{i x_m} du\right) dz.$$

Mit der bekannten Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2\pi - i\infty}^{2\pi + i\infty} \frac{e^{yz}}{z^s} dz = \begin{cases} \frac{y^{s-1}}{\Gamma(s)} & \text{für } y > 0, \\ 0 & \text{für } y \leq 0 \end{cases} \qquad (y \text{ reell})$$

erhalten wir

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\substack{u_1+\cdots+u_r \leq g\\ u_1,\dots,u_r \geq 0}} \cdots \int u_1^{i x_1} \dots u_r^{i x_r} (g - u_1 - \cdots - u_r)^{s-1} du_1 \dots du_r$$

$$= g^{r+s-1+i\sum_{m=1}^{r} x_m} \frac{\prod_{m=1}^{r} \Gamma(1+i x_m)}{\Gamma\left(r + s + i\sum_{m=1}^{r} x_m\right)}.$$

Wegen analytischer Fortsetzbarkeit gilt dies auch für alle komplexen s mit $r + \operatorname{Re} s > 1$, also speziell für $s = 0$. Andererseits ist nach dem Cauchyschen Integralsatz[*]):

$$\mathfrak{F} = \int_{-\infty+i}^{\infty+i} e^{-2\pi i g z} \prod_{m=1}^{r} \left(\int_0^g e^{2\pi i u z} u^{i x_m} du\right) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{2\pi - i\infty}^{2\pi + i\infty} e^{gz} \prod_{m=1}^{r} \left(\int_0^g e^{-uz} u^{i x_m} du\right) dz = \mathfrak{F}(0). \qquad \text{q.e.d.}$$

---

[*]) Für diese funktionentheoretischen Überlegungen sind Integralabschätzungen ausreichend, die sich z. B. leicht mit (90) herleiten lassen.

Hilfssatz 24. *Für beliebige reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_r, g, \psi_0$ mit $g > 0$ und für beliebige ganzrationale Zahlen $y_1, \ldots, y_r$ werde*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_{g,\psi_0}(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r) \\
&= \int\limits_{\psi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{\infty} \prod_{m=1}^{r} \left(\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{u=0}^{g} e^{4\pi i z u \cos(\varphi+\psi) + i y_m \varphi} u^{1+ix_m} \, du \, d\varphi \right) \times \\
&\quad \times e^{-4\pi i g z \cos(\psi+\psi_0)} \, z \, dz \, d\psi
\end{aligned}$$

gesetzt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H} &= 2^{r-3}\pi^{r-1} g^{2(r-1)+i\sum\limits_{m=1}^{r} x_m} e^{i\psi_0 \sum\limits_{m=1}^{r} y_m} \times \\
&\quad \times \int\limits_0^{\infty} \prod_{m=1}^{r} \left(\int\limits_0^1 J_{y_m}(zu) u^{1+ix_m} \, du \right) J_{\sum\limits_{m=1}^{r} y_m}(z) z \, dz .
\end{aligned} \tag{104}$$

Für $g = 1$, $\psi_0 = x_m = y_m = 0$ $(m = 1, \ldots, r)$ ist insbesondere

$$\mathfrak{H} = 2^{r-2}\pi^{r-1} \frac{r}{r+1} \int\limits_0^{\infty} J_1^{r+1}(z) \frac{dz}{z^r} > 0 . \tag{105}$$

Beweis: Die Identität (104) leitet man durch einfache Umformungen mittels (95) ab. Für $g = 1$, $\psi_0 = x_m = y_m = 0$ $(m = 1, \ldots, r)$ folgen aus (104) mit den bekannten Relationen [10, 3 · 2(3)]:

$$\int\limits_0^z J_0(u) u \, du = J_1(z) z, \quad z J_0(z) = z J_1'(z) + J_1(z)$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned}
2^{-r+3}\pi^{-r+1}\,\mathfrak{H} &= \int\limits_0^{\infty} J_1^r(z)\, J_0(z)\, z^{1-r} dz \\
&= \int\limits_0^{\infty} J_1^{r+1}(z) z^{-r} dz + \int\limits_0^{\infty} J_1^r(z)\, J_1'(z) z^{1-r} dz \\
&= \left[J_1^{r+1}(z) \frac{z^{1-r}}{r+1} \right]_0^{\infty} + \frac{2r}{r+1} \int\limits_0^{\infty} J_1^{r+1}(z) z^{-r} dz ,
\end{aligned}$$

womit die Identität in (105) bewiesen ist. Die Positivität der rechten Seite von (105) ist für ungerades r trivial, für beliebiges $r \geqq 4$ kann sie mit den bekannten Abschätzungen [10, 3 · 1(8) und 2 · 2(5)]:

$$J_1(z) \geqq \operatorname{Max}\left(0, \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16}\right) \qquad (0 \leqq z \leqq \pi),$$

$$|J_1(z)| \leqq 1 \qquad (-\infty < z < \infty)$$

etwa wie folgt nachgewiesen werden:

$$\int_0^\infty J_1^{r+1}(z) z^{-r} dz \geq \int_0^\pi J_1^{r+1}(z) z^{-r} dz - \int_\pi^\infty z^{-r} dz \geq$$

$$\geq \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{16}\right)^{r+1} z\, dz - \frac{\pi^{1-r}}{r-1} > 0\,. \qquad \text{q.e.d.}$$

Nun sind wir in der Lage, die Integrale von (19) auszuwerten. Zunächst folgt aus Satz 3 mit Hilfssatz 22 und der aus (76) resultierenden Abschätzung

$$|P_m(\gamma)| \leq \sum_{1|\mathfrak{c}|\mathfrak{t}} N(\mathfrak{c}) \ll 1 \tag{106}$$

die Approximation

$$\prod_{m=1}^{r}{}' T^{(m)}(\xi) = \left(\frac{w}{2^{n_1} \pi^{n_2} RHN(\mathfrak{t})\, \varphi(\mathfrak{a}\mathfrak{s}(\mathfrak{s}, \mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})}\right)^r \prod_{m=1}^{r}{}' (P_m(\gamma)\, \mathfrak{W}^{(m)}(\zeta)) +$$
$$+ O\left(A^{rn} a^{-\Theta_1} (\varphi(\mathfrak{a}))^{-r+1}\right)$$

für alle ξ aus B_γ. Die Integration über B_γ bei Benutzung von (13) und die nachfolgende Summation über alle γ aus Γ ergeben

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{B_\gamma^*} e^{-2\pi i S(\lambda\xi)} \prod_{m=1}^{r}{}' T^{(m)}(\xi)\, d\xi^*$$

$$= \left(\frac{w}{2^{n_1} \pi^{n_2} RH}\right)^r \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{e^{-2\pi i S(\lambda\gamma)}}{N(\mathfrak{t})^r \varphi^r(\mathfrak{a}\mathfrak{s}(\mathfrak{s}, \mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})} \prod_{m=1}^{r}{}' P_m(\gamma)\, \mathfrak{R}_\gamma(\lambda) + O\left(\frac{A^{n(r-1)}}{a^{\Theta}}\right), \tag{107}$$

wobei

$$\mathfrak{R}_\gamma(\lambda) = \int_{F_\gamma^*} e^{-2\pi i S(\lambda\zeta)} \prod_{m=1}^{r}{}' \mathfrak{W}^{(m)}(\zeta)\, d\zeta^*$$

und F_γ die Menge aller Punkte ζ mit $\zeta + \gamma \in B_\gamma$ sei.

Hilfssatz 25. *Es ist*

$$\mathfrak{R}_\gamma(\lambda) = (2^{r-3} \pi^{r-1})^{n_2} \prod_{m=1}^{r}{}' A_m(\lambda) \sum_{k=0}^{f-1} \frac{b_k A^{n(r-1)}}{(na)^{r+k}} + O\left(\frac{A^{n(r-1)}}{a^{r+f}}\right).$$

Beweis: Mit Hilfssatz 22 und (13) ergibt sich

$$\mathfrak{R}_\gamma(\lambda) - \int_{F_\gamma^*} e^{-2\pi i S(\lambda\zeta)} \prod_{m=1}^{r}{}' \mathfrak{V}_f^{(m)}(\zeta)\, d\zeta^* \ll$$

$$\ll \sum_{m=1}^{r} \sup_{\zeta \in F_\gamma} |\mathfrak{W}^{(m)}(\zeta) - \mathfrak{V}_f^{(m)}(\zeta)| \int_{F_\gamma^*} (W_f(\zeta) + A^n a^{-\Theta_1})^{r-1}\, d\zeta^* \ll \tag{108}$$

$$\ll \frac{A^n}{a^{r+f}} \prod_{l=1}^{n_1+n_2} \left(\int_0^{A^{-1}} A^{e_l(r-1)} u^{e_l-1} du + \int_{A^{-1}}^{h^{-1}t^{n-1}} \left(A^{\frac{e_l-1}{2}} u^{-\frac{e_l+1}{2}}\right)^{r-1} u^{e_l-1} du\right) +$$
$$+ A^n a^{-1-f} A^{n(r-1)} a^{-(r-1)\Theta_2} (h^{-1} t^{n-1})^n \ll A^{n(r-1)} a^{-r-f}$$

und mit (12):

$$\int_{F_\gamma^*} e^{-2\pi i S(\lambda\zeta)} \prod_{m=1}^{r} \mathfrak{V}_f^{(m)}(\zeta)\,d\zeta^* - \int_{E^*} e^{-2\pi i S(\lambda\zeta)} \prod_{m=1}^{r} \mathfrak{V}_f^{(m)}(\zeta)\,d\zeta^* \ll$$

$$\ll \int_{E^*-F_\gamma} (W_f(\zeta))^r\,d\zeta^* \ll$$

$$\ll \frac{1}{a^r} \sum_{j=1}^{r} \left[\int_{(h\delta)^{-1}}^{\infty} A^{\frac{e_j-1}{2}r} u^{-r\frac{e_j+1}{2}} \left(1 + \left|\frac{\log\left(A^{e_j} u^{\frac{e_j+1}{2}}\right)}{a}\right|^{r(f-1)}\right) u^{e_j-1}\,du \,\times \right.$$

(109)

$$\times \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n_1+n_2} \left(\int_0^{A^{-1}} A^{e_l r} u^{e_l-1}\,du + \int_{A^{-1}}^{\infty} A^{\frac{e_l-1}{2}r} u^{-r\frac{e_l+1}{2}} \,\times \right.$$

$$\left.\left. \times \left(1 + \left|\frac{\log\left(A^{e_l} u^{\frac{e_l+1}{2}}\right)}{a}\right|^{r(f-1)}\right) u^{e_l-1}\,du \right)\right] \ll$$

$$\ll A^{n(r-1)} a^{-r-f}.$$

Ferner gilt nach (97), Hilfssatz 23 und 24:

$$\int_{E^*} e^{-2\pi i S(\lambda\zeta)} \prod_{m=1}^{r} \mathfrak{V}_f^{(m)}(\zeta)\,d\zeta^* = \int_{E^*} e^{-2\pi i S(\lambda\zeta)} \sum_{k=0}^{r(f-1)} \frac{i^k}{(na)^{r+k}} \,\times$$

$$\times \sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_r\le f-1\\ k_1+\dots+k_r=k}} \prod_{m=1}^{r} \left(\Lambda_m(\lambda)\Delta_m(t) \left(\sum_{l=1}^{n_1+n_2} e_l \frac{\partial}{\partial v_{ml}}\right)^{k_m} \int_{\mathfrak{E}^*} \frac{\Lambda_m(\tau)\, e^{2\pi i S(\tau\zeta)}}{\Lambda_m(\lambda)\,\Delta_m(t)}\,d\tau^* \right) d\zeta^*$$

(110)

$$= \prod_{m=1}^{r} (\Lambda_m(\lambda)\,\Delta_m(t)) \sum_{k=0}^{r(f-1)} \frac{i^k}{(na)^{r+k}} \sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_r\le f-1\\ k_1+\dots+k_r=k}} \left(\sum_{l=1}^{n_1+n_2} e_l \frac{\partial}{\partial v_{1l}}\right)^{k_1} \cdots$$

$$\cdots \left(\sum_{l=1}^{n_1+n_2} e_l \frac{\partial}{\partial v_{rl}}\right)^{k_r} \prod_{m=1}^{r} (\Lambda_m(\lambda)\,\Delta_m(t))^{-1} \prod_{l=1}^{n_1} \mathfrak{F}_{\lambda^{(l)}}(v_{1l},\dots,v_{rl}) \,\times$$

$$\times \prod_{l=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathfrak{H}_{|\lambda^{(l)}|,\,\arg\lambda^{(l)}}(v_{1l},\dots,v_{rl},w_{1l},\dots,w_{rl})$$

$$= (2^{r-3}\pi^{r-1})^{n_2} \prod_{m=1}^{r} \Lambda_m(\lambda) \sum_{k=0}^{f-1} \frac{b_k A^{n(r-1)}}{(na)^{r+k}} + O(A^{n(r-1)} a^{-r-f}).$$

Aus (108), (109) und (110) folgt die Behauptung des Hilfssatzes 25.

Um die singuläre Reihe $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ von § 6 in (107) einzuführen, schätzen wir folgenden Ausdruck mit (106) ab:

$$\sum_{\substack{\gamma \bmod \mathfrak{b}^{-1}\\ N(\mathfrak{a}_\gamma) > t^n}} \frac{e^{-2\pi i S(\gamma\lambda)}}{N(\mathfrak{l})^r \varphi^r(\mathfrak{a}\mathfrak{s}(\mathfrak{s},\mathfrak{a}\mathfrak{t})^{-1})} \prod_{m=1}^{r} P_m(\gamma) \sum_{k=0}^{f-1} \frac{b_k A^{n(r-1)}}{(na)^{r+k}} \ll$$

(111)

$$\ll \sum_{\substack{\gamma \bmod \mathfrak{b}^{-1}\\ N(\mathfrak{a}_\gamma) > t^n}} \frac{1}{\varphi^r(\mathfrak{a})} \frac{A^{n(r-1)}}{a^r} \ll \sum_{\substack{\mathfrak{l}\mid\mathfrak{a}\\ N(\mathfrak{a}) > t^n}} \frac{1}{\varphi^{r-1}(\mathfrak{a})} \frac{A^{n(r-1)}}{a^r} \ll \frac{A^{n(r-1)}}{a^{r+f}}.$$

Aus (107), (111) und Hilfssatz 25 folgt:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\gamma \in \Gamma} \int\limits_{B_\gamma^*} e^{-2\pi i S(\lambda \xi)} \prod_{m=1}^{r} T^{(m)}(\xi)\, d\xi^* \\
(112)\qquad &= \frac{1}{(8\pi)^{r_2}} \left(\frac{w}{2^{r_1-r_2} R H}\right)^r \mathfrak{S}_r(\lambda) \prod_{m=1}^{r} \Lambda_m(\lambda) \sum_{k=0}^{f-1} \frac{b_k A^{n(r-1)}}{(na)^{r+k}} + O\left(\frac{A^{n(r-1)}}{a^{r+f}}\right).
\end{aligned}
$$

Zur Abschätzung des in (19) stehenden Restintegrals wenden wir Satz 2 an und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{G^*} e^{-2\pi i S(\lambda \xi)} \prod_{m=1}^{r} T^{(m)}(\xi)\, d\xi^* \ll \\
(113)\qquad &\ll \sup_{\xi \in G} \left| \prod_{m=3}^{r} T^{(m)}(\xi) \right| \int\limits_{F^*} \left(|T^{(1)}(\xi)|^2 + |T^{(2)}(\xi)|^2\right) d\xi^* \ll \\
&\ll A^{n(r-2)}\, a^{(2-\Theta)(r-2)} A^n \leqq A^{n(r-1)}\, a^{-r-f}.
\end{aligned}
$$

Von (19), (112) und (113) gelangen wir unmittelbar zu Satz 1.

Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen erschien von T. MITSUI die Arbeit „On the Goldbach problem in an algebraic number field I, II.“ J. Math. Soc. Japan **12**, 290—372 (1960), in der unser Satz 1 für den Spezialfall $\mathfrak{t} = \mathfrak{s} = (1)$, $\Lambda_1 = \cdots = \Lambda_r = 1$ bewiesen wird, allerdings unter Verzicht auf eine asymptotische Reihenentwicklung und ein bestmögliches Fehlerglied (s. S. 360, Theorem 10.1).

Literatur

[1] HECKE, E.: Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen (zweite Mitteilung). Math. Z. **6**, 11—51 (1920).

[2] HECKE, E.: Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig: Akadem. Verlagsges. 1954.

[3] KÖRNER, O.: Übertragung des Goldbach-Vinogradovschen Satzes auf reell-quadratische Zahlkörper. Math. Ann. **141**, 343—366 (1960).

[4] MITSUI, T.: Generalized prime number theorem. Japanese J. Math. **26**, 1—42 (1956).

[5] RADEMACHER, H.: Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper I: Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summe von totalpositiven Primzahlen im reell-quadratischen Zahlkörper. Abhandl. math. Seminar hamburg. Univ. **3**, 109—163 (1924).

[6] RADEMACHER, H.: Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper III: Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summen von totalpositiven Primzahlen in einem beliebigen Zahlkörper. Math. Z. **27**, 321—426 (1928).

[7] SIEGEL, C. L.: Generalization of Waring's problem to algebraic number fields. Am. J. Math. **66**, 122—136 (1944).

[8] SIEGEL, C. L.: Sums of m^{th} powers of algebraic integers. Ann. Math. **46**, 313—339 (1945).

[9] VINOGRADOV, I.: Some theorems concerning the theory of primes. Rec. math. Moscou, N. s. **2**, 179—194 (1937).

[10] WATSON, G. N.: A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge: University Press 1922.

(Eingegangen am 29. November 1960)

Rao, M. M.
Math. Annalen 143, 379—398 (1961)

Theory of Lower Bounds for Risk Functions in Estimation*

By
M. M. Rao in Pittsburgh

1. Introduction: The general problem of this paper may be described briefly as follows. Let T be an estimator of the parameter θ of a probability density function $p(x, \theta)$ where $x = (x_1, \ldots, x_n)$ is a vector of observations on a (vector or sequence) random variable (r. v.) X, and θ is an unknown parameter (a constant). Then without solving the distribution problem of the estimator T, which is difficult in many situations, it is possible to present the best lower bounds for risk functions $R(T, \theta) = E_\theta W(T, \theta)$, where E_θ stands for the mathematical expectation when θ is the true parameter, and $W(T, \theta)$ is the loss in choosing T when θ is the correct value. The actual computation of $R(T, \theta)$ is much more difficult since it is related to the solution of the distribution problem of T. The main problem considered in this paper is, therefore, to obtain the best (in some sense) lower bounds for some classes of loss functions $W(T, \theta)$, which appear to be of considerable interest in theoretical statistics. The results are divided into two parts, the first containing the treatment of quadratic and related loss functions and the second containing the convex loss functions.

If $W(T, \theta)$ is quadratic, several authors ([2], [3], [4], [7], [9], [12]) have considered this problem in the past, but only in the single parameter case extended discussions were given. The multiparameter case was usually restricted to unbiased estimation. As will be seen later in this paper, the several parameter problem is not an obvious extension of the single parameter case, however. A result on multiparameter estimation, without assuming unbiasedness, is given in Theorem 2 which unifies all the previous results and completes them (see the discussion at the end of the proof of that theorem). Also Theorem 6 and Corollary 6.2 give the exact relation between the earlier results ([2], [12]) and that of Theorem 2. The basic idea in the quadratic case is to find an appropriately chosen family of orthonormal functions, and then to obtain a convenient series-type lower bound. By extending this idea, however, lower bounds for a variety of other useful risk functions can be found. Some of them are considered in Theorems 3 and 4 of this paper. The treatment can also be given to certain other loss functions of this class.

The second part of the paper considers convex loss functions, satisfying certain "natural" conditions. Bounds for the associated risk functions are given in Theorem 7. Many known results are subsumed under this theorem.

*) Supported in part under. Nonr. 2582 (00), Task NR 042—200, and NSF-G 14832.

Also, for the unbiased estimators, the k-th $(k \geqq 1)$ absolute central moment as risk function has been considered in [1]. The main result in [1] is subsumed under Theorem 9 of the present paper where the loss function is convex-thereby showing the possibility of extending several classical results to the general case.

The inadequacy of the quadratic loss was noted in the literature, [1], and it becomes more apparent especially in the problems associated with some stochastic processes where certain estimators have asymptotically the Cauchy distribution, and certain other distributions which do not have second moments (cf. e.g., [11]). In such cases the results presented here become particularly important.

The present paper is concerned with only the theoretical aspect, and the applications to a number of practically interesting cases will be presented elsewhere. Further related problems (not treated here) are (i) explicit constructions of the best estimators (one case was treated in [1]), and (ii) bounds when the parameters, θ's, are r.v.'s with an *a priori* distribution on A. It is hoped that these will be considered later. A summary of some of the results of this paper was published in [10].

Part I. Quadratic Loss

2. Assumptions. Let X be a (vector or sequence) r.v., defined on some measure space, taking values in a subset $\bar{S}$ of a real Euclidian space. The points of $\bar{S}$ will be denoted by x. Suppose a fixed σ-finite measure μ, defined on a class[1]) of sets $\mathfrak{B}$ formed of subsets of $\bar{S}$, is given. Let $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ be in A, a non-empty subset of a real Euclidian k-space. For any x in $\bar{S}$ and θ in A, let $P(x, \theta)$ be a distribution function which is absolutely continuous with respect to μ, with density $p(x, \theta)$. Let S_θ be the carrier of $p(x, \theta)$. Though, in general, S_θ depends on θ, it will be assumed, in the sequel, to remain invariant for all θ in A, and this set will, henceforth, be denoted by S. The following regularity conditions are imposed on $p(x, \theta)$.

Condition I. For all x in S, and θ in A,

$$\frac{\partial^u p(x, \theta)}{\partial \theta_1^{i_1} \partial \theta_2^{i_2} \ldots \partial \theta_k^{i_k}}$$

exists, where $u = i_1 + i_2 + \cdots + i_k$, and $u = 1, 2, \ldots$ Note that for any given u there are $N_u = \binom{k+u}{u} - 1$, differential coefficients.

For the purpose of later analysis, arrange these derivatives in some arbitrary order. For definiteness, group the first order derivatives first, then the second order, etc., and within groups use a lexicographic ordering. Then eliminate all those terms that are linearly dependent on the preceding ones, and divide the resulting sequence by $p(x, \theta)$. Let $D_i(x, \theta)$, or D_i for short, denote the ith term.

Condition II. For each i, $|p(x, \theta) D_i(x, \theta)| < M_i(x)$ such that $\int_S M_i(x) d\mu <$ $< \infty$, for all θ in A, and all i.

[1]) i.e., Borel field.

Condition III. The r.v.'s D_i, $i = 1, 2, \ldots$ are square integrable with respect to $p(x, \theta)d\mu$.

Condition IV. If the column vector $T = (T_1, \ldots, T_k)'$ (prime for transpose) is an estimator of θ', T_j with a finite second moment and $E_\theta(T_j) = \theta_j + b_j(\theta) = \alpha_j(\theta)$, say, where $b_j(\theta)$ is the bias, then all the partial derivatives of $\alpha_j(\theta)$ exist with respect to $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$, for $j = 1, \ldots, k$.

Here also all the partial derivatives of $\alpha_j(\theta)$, for each j, are ordered corresponding to the ordering of D_i. This implies that if D_i is

$$p(x, \theta)^{-1} \frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_k} p(x, \theta)}{\partial \theta_1^{i_1} \ldots \partial \theta_k^{i_k}}, \text{ then } \alpha_j^i(\theta) = \frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_k} \alpha_j(\theta)}{\partial \theta_1^{i_1} \ldots \partial \theta_k^{i_k}}, \text{ for each } j\,.$$

It should be pointed out that the above conditions may be replaced by a variety of other conditions. One such set will be given later (cf. sec. 7). Only the third condition is important for the procedure given in this part. The results of this paper are applicable to both sequential and nonsequential estimation. In the former case the conditions I and IV have to be slightly altered. Generally, (not always), the r.v.'s are denoted by capitals, and the values assumed by them by the corresponding small letters. First an auxiliary result will be stated in the next section.

3. Auxiliary statement. Let $\mathfrak{L}^2$ denote the space of all k-dimensional column vector-valued functions f on S with measurable $(\mathfrak{B})$ and square integrable $(p(x, \theta)d\mu)$ components $f^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, k)$. Then $\mathfrak{L}^2$ is a complete linear space under the norm

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \int_S f^{(j)^2}(x) p(x, \theta) d\mu = tr(f, f)\,.$$

For any pair f, g in $\mathfrak{L}^2$, the $(k \times k)$ matrix (f, g) is defined as

$$(f, g) = \left(\int_S f^{(i)} g^{(j)} p(x, \theta) d\mu \right).$$

Theorem 1. *Let* $\{\varphi_n\}$ *be a sequence of orthogonal* $(k \times 1)$ *column vectors in* $\mathfrak{L}^2$ i.e., $(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} J_m$, *where* $\delta_{mn} = 1$ *if* $m = n$ *and zero otherwise, and* J_m, *is for some* m, *a non-null matrix. If* f *is any column vector with square integrable* $(p\, d\mu)$ *components and* A_n *is given by* $A_n J_n = (f, \varphi_n)$ *then*

$$\sum_{n=1}^{\infty} tr(A_n J_n A_n') \leq tr(f, f), \tag{1}$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_n A_n' \leq (f, f). \tag{2}$$

In (1) tr *stands for trace, and in* (2) *the meaning of the symbol* $A \geq B$ *is that* $(A - B)$ *is positive semi-definite for any two* $(k \times k)$ *matrices* A *and* B.

Remark: The inequality (1) (or (2)), for $k = 1$, is the Bessel Inequality.

Proof: Let $Q_n = \sum_{i=1}^{n} A_i \varphi_i$, and $R_n = f - Q_n$.

Then it follows readily, from the hypothesis, that

$$A_j J_j = (f, \varphi_j) = (R_n, \varphi_j) + \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \varphi_i, \varphi_j \right) = (R_n, \varphi_j) + A_j J_j .$$

Hence $(R_n, \varphi_j) = 0, j = 1, \ldots, n$. Consequently,

$$tr(f, f) = tr[(R_n, R_n) + (Q_n, Q_n)] = \sum_{i=1}^{n} tr(A_i J_i A_i') + \|R_n\|^2 . \tag{3}$$

It follows that

$$tr(f, f) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} tr(A_i J_i A_i') .$$

The proof of (2) is identical. Q.E.D.

Note: The matrices J_n, (Q_n, Q_n) etc., are symmetric and positive semi-definite for each n. It should also be noted that the matrices A_n are uniquely determined if, and only if, J_n are non-singular, in which case one can take $J_n = I$, the identity matrix, by normalizing the φ_n-sequence.

Corollary 1.1. *If* $\{\varphi_n\}$ *is orthonormal,* i.e., $(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} I$, *then if* $\bar{A}_n = (f, \varphi_n)$, *the inequalities* (1) *and* (2) *become*

$$\sum_{n=1}^{\infty} tr(\bar{A}_n \bar{A}_n') \leqq tr(f, f) , \tag{1'}$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \bar{A}_n' \leqq (f, f) . \tag{2'}$$

4. Lower Bounds in the Quadratic Case. Let $T' = (T_1, \ldots, T_k)$ be an estimator of $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ in A, as before. Suppose $W(T, \theta)$ is the loss function. The following forms of $W(T, \theta)$ will be considered, with risk, as usual, $R(T, \theta) = E_\theta(W(T, \theta))$.

$$W_\delta(T, \theta) = \left[\sum_{i=1}^{k} (T_i - \theta_i)^2 \right]^{\frac{\delta}{2}} , 1 < \delta \leqq 4 , \tag{4}$$

$$W_a(T, \theta) = \sum_{i,j=1}^{k} (T_i - \theta_i)(T_j - \theta_j) a_i a_j , \tag{4'}$$

where a_i are arbitrary real numbers (non-stochastic and known). If T is unbiased, $R_a(T, \theta)$ is the reciprocal of the concentration ellipsoid given by Cramér ([4], p. 300). Instead of estimating θ (or θ_i) any Borel function of it, say $g(\theta)$ (or $g_i(\theta)$), can be estimated. Only a simple modification is needed to take account of this.

$$\text{Let } f_m^{(j)} = D_{(m-1)k+j} \text{ for } j = 1, \ldots, k \text{ and } f_m' = (f_m^{(1)}, \ldots, f_m^{(k)}) ,$$

$m = 1, 2, \ldots$, where D_i are the r.v.'s given in condition III. It was noted in condition I that, if $p(x, \theta)$ is differentiable u times, then there are N_u of the D_i. If M_u is the smallest integer not less than (N_u/k), then f_m, $m = 1, \ldots, M_u$ are defined as above, where f'_{M_u} will be completed by adding zeros if $M_u \neq (N_u/k)$.

Consider the particular space $\mathfrak{L}^2$ generated by the vectors $\{f_m\}$ and all finite linear combinations of them (i.e., if $f, g \in \mathfrak{L}^2$, then also $Af + Bg \in \mathfrak{L}^2$ for all $(k \times k)$ matrices, of constants, A and B). If the resulting space is not complete, let it be completed by adding the limits of all such combinations under the norm $\|f_m\|^2 = tr(f_m, f_m)$. Note that the space $\mathfrak{L}^2$ remains invariant if the components of f_m for different m, are interchanged, so that the particular choice of $f_m^{(i)}$ in the definition of f_m is not important, and any choice, according to convenience, can be made.

Using the classical Schmidt procedure the $\{f_m\}$ sequence can be orthogonalized, and denote by $\{\varphi_m\}$, the orthonormal sequence so obtained. Let $A_n = (T, \varphi_n)$. From the above assumptions, A_n can be calculated explicitly as will be shown later. If $\delta = 2$ in (1), one obtains the following.

Theorem 2. *Suppose the density function $p(x, \theta)$ satisfies the conditions* I—IV *of section 2. Let T' be a (row) vector of estimators and θ the true parameter value in A. If $R(T, \theta) = E_\theta W(T, \theta)$ where $W(T, \theta)$ is given by* (4) *with $\delta = 2$, or* (4′), *then the corresponding lower bounds are given by*

$$R_2(T, \theta) \geq \sum_{n=1}^{\infty} tr(A_n A_n'), \tag{5}$$

$$R_a(T, \theta) \geq \sum_{n=1}^{\infty} a'(A_n A_n')a, \tag{6}$$

where $a' = (a_1, \ldots, a_k)$. The lower bounds in (5) *and* (6) *are reached if, and only if, $(T - \theta')$ lies in $\mathfrak{L}^2$. The minimum risk estimator is essentially unique.*

The above result enables one to obtain the following interesting

Corollary 2.1. *In order that the lower bounds in* (5) *or* (6) (and hence those given in [2], [4], [9], and [12]) *for $R(T, \theta)$, $\delta = 2$, may be reached it is necessary that the estimator T of θ' be unbiased.*

Corollary 2.2. *If there exists an estimator T* (unbiased or not), *of θ', whose components have finite variances, and $p(x, \theta)$ satisfies conditions* I—IV *of section* 2, *then an essentially unique* r.v. *$T(\theta)$ with minimum risk always exists. An unbiased estimator of θ can then be found if, and only if, $T(\theta) + \theta'$ is independent of θ', which, when it exists, is also essentially unique.*

Corollary 2.3. *If a sufficient statistic, for θ, exists, then, when $(T - \theta')$ lies in $\mathfrak{L}^2$, the unbiased estimator T is a (Borel) function of the sufficient statistic.*

Proof of Theorem 2: From the equations

$$\int_S p(x, \theta)\, d\mu = 1, \quad \int_S t p(x, \theta)\, d\mu = \alpha(\theta) = (\alpha_1(\theta), \ldots, \alpha_k(\theta)),$$

and condition II (since $E_\theta(D_i) = 0$, all i), it follows that

$$E_\theta(f_m) = 0, \; m = 1, 2, \ldots,$$

and

$$(E_\theta(T_i f_m^{(j)})) = (\alpha_i^{(m-1)k+j}(\theta), \; i, j = 1, 2, \ldots, k), \; m = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Here the derivatives of $\alpha_j(\theta)$ are arranged in the same manner as D_i.

The proof consists of orthogonalizing the $\{f_m\}$ to get a $\{\varphi_m\}$ and applying Theorem 1 (or its corollary). For this, the classical Schmidt procedure is employed. Let $m_{ij} = E_\theta(D_i D_j)$, which exists by condition III. Define the r.v.'s y_i as

$$y_i = \begin{vmatrix} D_1, \ldots, D_i \\ m_{11}, \ldots, m_{1i} \\ \vdots \\ m_{i-1,1}, \ldots, m_{i-1,i} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{i} m_j^{(i)} D_j , \tag{8}$$

where $m_j^{(i)}$ is the minor of D_j in the above determinant with $m_1^{(1)} = 1$. Note that all y_i are linearly independent, since the D_i are. Hence, $M_i^2 = E_0(y_i^2) \neq 0$ all i. Next, define the sequence

$$\varphi_m^{(j)} = M^{-1}_{(m-1)k+j}\, y_{(m-1)k+j},\ j = 1, \ldots, k \quad \text{and} \tag{9}$$

$$\varphi'_m = (\varphi_m^{(1)}, \ldots, \varphi_m^{(k)}),\ \text{for } m = 1, 2, \ldots$$

Clearly the $\{\varphi_m\}$ is an orthonormal (column) vector r.v. sequence, which spans the same $\mathfrak{L}^2$ space defined at the beginning of this section. Further, $E_\theta(\varphi_m) = 0$, all m. Also note that

$$M_i^2 = E_0(y_i^2) = E_0\left(y_i \sum_{j=1}^{i} m_j^{(i)} D_j\right) = m_i^{(i)} E_\theta(y_i D_i) = (\overline{M}_{i-1}\overline{M}_i)^2, \tag{10}$$

where $\overline{M}_i^2 = |m_{11} m_{22} \ldots m_{ii}|$, the determinant being represented by the diagonal terms. Let $T = (T - \theta')$. By hypothesis the components of T are square integrable $(p(x, \theta)\, d\mu)$. Define the $(k \times k)$ matrices A_n by

$$A_n = (T, \varphi_n) = (T, \varphi_n) = (E_0(T_q y_{(n-1)k+r} M^{-1}_{(n-1)k+r}),\ q, r = 1, \ldots, k) = (C_{qr}^{(n)}) ,$$

where

$$C_{qr}^{(n)} = M^{-1}_{(n-1)k+r} \sum_{u=1}^{(n-1)k+r} m_u^{[(n-1)k+r]} \alpha_q^{u}(\theta),\ \text{by (7) and (8).}$$

From (1′) and (2′), it follows that

$$tr(T, T) \geq \sum_{n=1}^{\infty} tr(A_n A'_n) , \tag{11}$$

$$(T, T) \geq \sum_{n=1}^{\infty} A_n A'_n . \tag{11'}$$

Also from the definition of $R_2(T, \theta)$ and $R_a(T, \theta)$, one gets the lower bounds as

$$R_2(T, \theta) = E_\theta\left[\sum_{i=1}^{k} (T_i - \theta_i)^2\right] = tr(T, T) \geq \sum_{n=1}^{\infty} tr(A_n A'_n) , \tag{12}$$

$$R_a(T, \theta) = E_\theta(a'(T, T)a) \geq \sum_{n=1}^{\infty} a'(A_n A'_n)a . \tag{12'}$$

Further, the equality in (12), and (12′), holds (in the sense of convergence in norm) if, and only if, T lies in $\mathfrak{L}^2$ since the latter is a complete space and the Parseval's relation holds . (Cf. OLMSTEAD [8]. Some properties of $\mathfrak{L}^2$ are given in WIENER and MASANI [13].)

To prove the last part of the theorem, it suffices to observe that, if T_1 is another element in $\mathfrak{L}^2$ such that ($T_1 + \theta' = T_1$ is an estimator),

$$(13) \qquad T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n \qquad \text{(in the sense of convergence in norm)},$$

where $A_n = (T, \varphi_n) = (T, \varphi_n)$, then by the uniqueness of the representation (13), $T_1 = T$, or $T_1 = T$, with probability one. Q.E.D.

Remark 1: A convenient way of writing (12′) is as follows: Let $V = (v_{ij})$, i.e., $(v_{ij}) = (E_\theta(T_i - \theta_i)(T_j - \theta_j), i, j = 1, \ldots, k) = (T, T)$. If T is unbiased, then V will be the covariance matrix of T. In any case, (12′) may be written as

$$(12'') \qquad V \geqq \sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n' = B, \text{ say}.$$

If V and B are non-singular, then from the inequality (since $V \geqq B$) $V^{-1} \leqq B^{-1}$, it follows that, in the unbiased case, the concentration ellipsoid defined as (cf. [4], p. 495) $a' V^{-1} a = k + 2$, contains within itself the ellipsoid $a' B^{-1} a = k + 2$, which in turn contains all other ellipsoids $a' B_n^{-1} a = k + 2$ (for all n) where $B_n = \sum_{i=1}^{n} A_n A_n'$, and B_n is, of course, assumed non-singular. The last statement is a consequence of the fact that $A_n A_n'$ is a non-negative definite matrix for each n so that $B \geqq B_n$. The same result holds even in the biased case, because (12″) is true in any case. In the biased case, the ellipsoid defined above may be considered as a generalized concentration ellipsoid. The special case when T is unbiased was proved by SETH [12], (also see [2] and [1]) for finite n, under somewhat different assumptions, and a different method. If $n = 1$, the result was proved earlier, independently by CRAMÉR [2] and RAO [9].

Remark 2: If Γ is a $(k \times h)$ matrix $(1 \leqq h \leqq k)$ of rank h, and it is required to estimate $\theta\Gamma$ (i.e., certain linear compounds of θ_i), then the estimator $T'\Gamma$ has the lower bounds for the risk functions, analogous to those of the original problem, given by

$$R_2(T, \theta, \Gamma) = E_\theta(T' - \theta)\,\Gamma\Gamma'(T - \theta') = tr(\Gamma' T, \Gamma' T) \text{ where } T = T - \theta',$$
$$\geqq \sum_{n=1}^{\infty} tr(\Gamma' A_n A_n' \Gamma),$$
$$V = \Gamma' V \Gamma \geqq \sum_{n=1}^{\infty} (\Gamma' A_n A_n' \Gamma).$$

Remark 3: The lower bound in (12) is the same as the sum of k lower bounds (for estimating θ_i, $i = 1, \ldots, k$) in the presence of $(k - 1)$ nuisance parameters, so that (12) is really a one dimensional problem. However, this is *not* true with (12′) and all the above work is needed.

Proofs of Corollaries:

Corollary 2.1. Since every element in $\mathfrak{L}^2$ has mean zero (and only for the elements in $\mathfrak{L}^2$ equality holds in (12) or (12′)), if $T (= T - \theta')$ lies in $\mathfrak{L}^2$, then $E(T) = 0$ as well. Hence T is unbiased.

Corollary 2.2. Since the hypothesis of the theorem is satisfied, the only case to be considered is that T is biased, i.e., $T - \theta'$ is not in $\mathfrak{L}^2$ so that strict inequality in (12) or (12′) obtains. From the finiteness of the variances of the components of T, it follows that

$$R_2(T, \theta) < \infty, \text{ all } \theta \text{ in } A \text{ (see (12))}, \tag{14}$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} tr(A_n A_n') < \infty . \tag{15}$$

Then by Riesz-Fisher theorem ([13], p. 121) there exists an essentially unique r.v. $\bar{\bar{T}}(\theta)$ in $\mathfrak{L}^2$ and $A_n = (T, \varphi_n)$, for which (with $\bar{\bar{V}} = (\bar{\bar{T}}(\theta), \bar{\bar{T}}(\theta))$ and $\bar{\bar{R}}_2(\bar{\bar{T}}, \theta) = tr(\bar{\bar{T}}(\theta), \bar{\bar{T}}(\theta))$),

$$\bar{\bar{V}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n', \text{ and } \bar{\bar{R}}_2(\bar{\bar{T}}, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} tr(A_n A_n') . \tag{16}$$

For the last part, one has, for each $i = 1, \ldots, k$, $\bar{\bar{T}}_i + \theta_i = f_i(X)$, where $f_i(X)$ does not depend on θ. Since $E_\theta(\bar{\bar{T}}_i) = 0$, it follows that the vector $(f_1(X), \ldots, f_k(X))$ is an unbiased estimator of θ with minimum variances or the maximum concentration ellipsoid. Conversely, if T is an unbiased estimator with minimum variances for components, then $\bar{\bar{T}} = T - \theta'$ lies in $\mathfrak{L}^2$ by theorem.

Corollary 2.3. If a sufficient statistic T, for θ', exists and $T - \theta'$ lies in $\mathfrak{L}^2$, then the corollary is an immediate consequence (vector analog) of the well-known Rao-Blackwell theorem ([5], p. 57).

The case $1 < \delta \leq 2$ in (4) will now be considered. Then the risk function is $R_\delta(T, \theta) = E_\theta \left[\sum_{i=1}^{k} (T_i - \theta_i)^2 \right]^{\delta/2}$. Surprisingly, many difficulties arise in this case to give a lower bound corresponding to (12), and further assumptions, on $p(x, \theta)$, are needed, [10]. Fortunately, the basic idea underlying the result of Theorem 2, with slight changes, still persists.

Theorem 3. *Let $\delta = 2q/2q - 1$, $q \geq 1$, integer, and μ be the Lebesgue measure. Let $D_i(p(X, \theta))^{1/2}$ and $f_j(X) = (T_j - \theta_j)(p(X, \theta))^{1/2}$ be in L^δ (the Lebesgue space on (S, μ)) for each i and j (i.e., $\int_S d_i^\delta p(x, \theta)^{\delta/2} d\mu(x)$ and $\int_S f_j^\delta(x) d\mu(x)$ exist), and suppose that $M = \operatorname{lub}_{x \in S} (p(x, \theta)^{(\delta-2)/2}) = \|p(x, \theta)^{(\delta-2)/2}\|_\infty < \infty$, for all θ in A. If the conditions* I—IV *of section* 2 *hold for $p(x, \theta)$ then the lower bound for $R_\delta(T, \theta)$ is given by*

$$R_\delta(T, \theta) \geq M^{-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |A_n^q|_E^2 \right]^{\delta/2q}, \tag{17}$$

where $|A|_E^2 = tr(AA')$, and $A_n^q = (h, \bar{\varphi}_n)$, the existence of which is asserted, and where $h' = (h_1, \ldots, h_q)$, with $h_j = f_j^{*q}$, and $\bar{\varphi}_n = \varphi_n(p(X, \theta))^{1/2}$. (Here $*$ on f_j indicates convolution with respect to the Lebesgue measure.)

Remark 4: If $q = 1$, then $\delta = 2$, and $M = 1$, so that (17) coincides with (12). (In [10], A_n^q is not described in detail as here.)

Proof: First observe that $\bar{\varphi}_n = \varphi_n(p(X,\theta))^{1/2}$, $n = 1, 2, \ldots$, where the φ_n are defined in (9), form an orthonormal sequence of random (column) vectors with respect to μ (as Lebesgue measure or not). If T' is an estimator of θ, then it is immediately seen that the (same) A_n, defined above (11), are also the "Fourier coefficients" of the (column) vectors $(T(X) - \theta')(p(X,\theta))^{1/2}$, with respect to the orthonormal set $\{\bar{\varphi}_n\}$.

Given that $f_j(x)$ lies in L^δ for each j. Write $S_i = S$, and dx for $d\mu$, since μ is the Lebesgue measure, and define, $f_j^{*q} = h_j$ as

$$h_j(x) = \int_{\times_{i=1}^{q-1} S_i} \cdots \int f_j(x-y_1) f_j(y_1 - y_2) \ldots f_j(y_{q-2} - y_{q-1}) f(y_{q-1})\, dy_1 \ldots dy_{q-1}. \tag{18}$$

It follows from the classical theory on convolutions that $h_j(x)$ exists for almost all x, and defines a function in L^2. Furthermore, by the Hausdorff-Young theorem [15], the following inequality obtains,

$$\|h_j(x)\|_2 \leq \|f_j(x)\|_\delta^q,\ j = 1, 2, \ldots, k. \tag{19}$$

The right side is finite by hypothesis. Let $h'(x) = (h_1(x), \ldots, h_k(x))$. It is seen that

$$A_n^q = (h, \bar{\varphi}_n) \tag{20}$$

exists. For, if $A_n^q = (a_{ij}^{q;n})$; then,

$$|a_{ij}^{q;n}| = \left|\int_S h_i \bar{\varphi}_n^{(j)} dx\right| \leq \left(\int_S h_i^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_S \bar{\varphi}_n^{(j)2} dx\right)^{1/2} \leq \|f_i\|_\delta^q < \infty,$$

by (19).

Using (12), one obtains

$$\|h\|_2^2 = tr(h, h) \geq \sum_{n=1}^{\infty} tr(A_n^q A_n'^q) = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n^q|_E^2. \tag{21}$$

But one has the following chain of inequalities also,

$$\begin{aligned}
\|h(x)\|_2^{2/q} &= \left(\int_S (h_1^2 + \cdots + h_k^2)\, dx\right)^{1/q}, \text{ where } q \geq 1 \text{ is an integer},\\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \|h_j(x)\|_2^{2/q} \leq \sum_{j=1}^{k} \|f_j(x)\|_\delta^2, \text{ by (19)},\\
&\leq \left[\int_S (f_1^2(x) + \cdots + f_k^2(x))^{\delta/2} dx\right]^{2/\delta}, \text{ since } 0 < \frac{\delta}{2} \leq 1.
\end{aligned}$$

Hence,

$$\|h(x)\|_2^{2/q} \leq \left(\int_S \left[\sum_{j=1}^{k} (t_j - \theta_j)^2\right]^{\delta/2} p(x,\theta)\, p(x,\theta)^{\frac{\delta-2}{2}} dx\right)^{2/\delta}, \tag{22}$$

using the definition of $f_j(x)$,

$$\leq \left(M \int_S \left[\sum_{j=1}^{k} (t_j - \theta_j)^2\right]^{\delta/2} p(x,\theta)\, dx\right)^{2/\delta},$$

by Hölder's inequality,

$$= (M R_\delta(T,\theta))^{2/\delta}. \tag{23}$$

From (21) and (23) one gets (since $M \neq 0$) the inequality (17). Q.E.D.

Remark 5: If μ is not translation invariant the steps (18) and (19) do not hold. Since the only translation invariant measure on the Euclidian n-space is the Lebesgue measure, the above theorem is valid only if μ is the Lebesgue measure, when $p(x, \theta)$ is a continuous function.

Remark 6: If the X's can take on only a finite number of (finite) values, an analogous result can be given, since the counting measure is also translation invariant. For $\delta = 2q/2q - 1$, the result of Theorem 3 can be formulated (to take both discrete and continuous cases into account) with the following changes. Let S be a locally compact topological group and μ be the Haar measure defined on the class of Borel subsets of S. Taking all integrals as Haar integrals, and the differentials of conditions I—IV as Fréchet differentials [6], the Theorem 3 (and the Corollary 3.1 to be stated presently) can be given.

Corollary 3.1. *Let the risk function* $\overline{R}_\delta(T, \theta) = \left[E_\theta\left(\sum_{i=1}^{k}(T_i - \theta_i)^2\right)^\delta\right]^{1/2}$, $1 < \delta \leq 2$, *and the density function* $p(x, \theta)$ *satisfy a Lipschitz' condition of order* $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$. *Let* $\delta = 2q/(2q - 1)$, $q \geq 1$ *integer, and* $D_i(p(X, \theta))^{1/2}$, $(T_j - \theta_j)(p(X, \theta))^{1/2}$ *be in* L^δ, *with* μ *as Lebesgue measure. If the conditions* I—IV *of section* 2 *hold for* $p(x, \theta)$, *then the lower bound for* $R_\delta(T, \theta)$ *is given by*

$$\overline{R}_\delta(T, \theta) \geq \left(\int_S p(x, \theta)^{\delta - 1} d\mu\right)^{-1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |A_n^q|_k^2\right)^{\delta/2q} \tag{24}$$

Proof: Until equation (22) the proofs of the theorem and this corollary are identical. Then

$$||h(x)||_2^{2/q} \leq \left(\int_S \left[\left(\sum_{j=1}^{k}(t_j - \theta_j)^2\right)^\delta p(x, \theta)\right]^{1/2} p^{(\delta-1)/2}(x, \theta) d\mu\right)^{2/\delta} \leq$$

$$\leq \left(\int_S \left[\sum_{j=1}^{k}(t_j - \theta_j)^2\right]^\delta p(x, \theta) d\mu\right)^{1/\delta} \left(\int_S p^{\delta-1}(x, \theta) d\mu\right)^{1/\delta}$$

by Schwarz' inequality, so that,

$$||h(x)||_2^{\delta/q} \leq \overline{R}_\delta(T, \theta) \left(\int_S p^{\delta-1}(x, \theta)\, d\mu\right)^{1/2}, \quad \delta > 1. \tag{23'}$$

Since $p(x, \theta)$ satisfies a Lipschitz' condition of order $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$ and $\delta - 1 > 0$, the second integral in (23') is finite. From (23') and (21), the inequality (24) follows at once. Q.E.D.

Note that the risk functions in the above theorem and its corollary are related by

$$R_2(T, \theta) = E_\theta(X) \leq (E_\theta(X^2))^{1/2} = \overline{R}_2(T, \theta), \text{ where } 0 \leq X = \sum_{i=1}^{k}(T_i - \theta_i)^2.$$

If δ varies continuously in $1 < \delta \leq 2$, then the above procedure is not applicable. However, in this case also one can obtain a lower bound in series form as given in

Theorem 4. *Let the risk function be* $R_\delta(T,\theta) = E_\theta\left[\sum_{i=1}^{k}(T_i-\theta_i)^2\right]^{\delta/2}$, $1<\delta\leq 2$. *If* $T_i = (T_i-\theta_i)$ *lies in* L^δ, *for* $i = 1, \ldots, k$, *and for any real numbers* $a_1, \ldots, a_m$ *and any* m, $\left[\sum_{i=1}^{m} a_i D_i/\text{s.d.}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i D_i\right)\right]$ *is uniformly bounded for every* $\theta \in A$, *with the conditions* I—IV *of section* 2 *holding for* $p(x,\theta)$, *then*

$$R_\delta(T,\theta) \geq C_k^{(\delta-2)}\left[\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|_E^{\delta'}\right]^{\delta-1} \tag{25}$$

where $\delta^{-1}+\delta'^{-1} = 1$, C_k *is a constant depending only on* k *and the uniform bound stated above, and* A_n *and* $|A_n|_E$ *are defined in Theorems* 2 *and* 3. *(s.d. for standard deviation.)*

Proof: Under the conditions I—IV of section 2, the sequence $\{D_i\}$ can be orthogonalized and normalized to obtain $\{\varphi_n\}$, an orthonormal set, as in the proof of Theorem 2. Next note that each component of the vector φ_n, say $\varphi_n^{(j)}$, is given by (see (9)),

$$\varphi_n^{(j)} = M^{-1}_{(n-1)k+j}\sum_{i=1}^{(n-1)k+j} m_i^{[(n-1)k+j]} D_i$$

so that, taking $a_i = m_i^{[(n-1)k+j]}$, by hypothesis $|\varphi_n^{(j)}| \leq C'$, $j = 1, \ldots, k$, and $n = 1, 2, \ldots$ Setting $C_k = C' k^{1/2}$, it is seen that $|\varphi_n|_E \leq C_k$. Writing T for f, the conclusion of this theorem follows from the following result.

Theorem 5. *Let* $\{\varphi_n\}$ *be a* $(k-)$ *vector valued orthonormal set. If* f *is any* $(k-)$ *vector valued function with components in* $L^\delta(S, p\,d\mu)$, *where* $1<\delta\leq 2$, *and* φ_n *has uniformly bounded components*, i.e. $|\varphi_m^{(j)}| \leq M$, $j = 1, \ldots, k$ *and* $n = 1, 2, \ldots$, *then*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|_E^{\delta'}\right)^{\delta-1} \leq (M k^{1/2})^{2-\delta}\left(\int_S |f|_E^\delta p\,d\mu\right) \tag{26}$$

where $A_n = (f, \varphi_n)$, *and, as usual,* $|f|_E^2 = tr(ff')$, $\delta^{-1}+\delta'^{-1} = 1$.

Proof: Brief indication suffices, as the proof follows the classical lines ([15], p. 201). (If $k = 1$, this result is a theorem of F. Riesz [15].) Clearly,

$$|A_n|_E = \|A_n\| = \left\|\int_S f\varphi_n' p(x,\theta)\,d\mu\right\| \leq \int_S \|f\varphi_n'\|\, p(x,\theta)\,d\mu\,,$$

(27) ([6], pp. 82—85)

$$= \int_S |f\varphi_n'|_E\, p(x,\theta)\,d\mu = \int_S |f|_E\,|\varphi_n|_E\, p(x,\theta)\,d\mu \leq k^{1/2}M\int_S |f|_E\, p(x,\theta)\,d\mu\,.$$

Defining the non-decreasing functions $\psi(x)$ and $\bar\varphi(x)$, for each $\theta \in A$, as

$$\psi(x) = \begin{cases}[x], & \text{if } x>0\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases} \qquad \bar\varphi(x) = \int_{[t\leq x]} p\,d\mu(t),\ [x] = \text{integral part of } x,$$

and a function $A(x) = A_n$ if $x = n$, and arbitrary otherwise, it is seen from (1′) and (27), that the operation T defined by $A(x) = T[f]$, is of type (2,2)

and $(1, \infty)$ with respect to φ and $\bar{\varphi}$ (see [15], p. 201). Consequently (26) follows from the M. Riesz's convexity theorem. Q.E.D.

Remark 7: Before concluding this part, it should be observed that the definition of convolution of vector valued functions to obtain vector valued functions, employed in Theorem 3, is a particular instance of the following[2]): Let f and g be two vectors each of whose components belong to $L^\delta(S, p\,d\mu)$. Define a transformation T such that

$$T(f, g) = h,\ \|h\|_r = \|T(f, g)\|_r \leqq C\|f\|_\delta\,\|g\|_\delta\,,\ (1 \leqq \delta \leqq 2,\ r^{-1} = (2-\delta)/\delta)$$

where C is a finite positive constant, the multiplication of any two components of f, g being convolution, and that T preserves associativity. A concrete representation of such a transformation is this. Let A^i, $i = 1, \ldots, k$ be $(k \times k)$ matrices such that $h_i = f' A^i g$. If A^i are chosen so as to preserve associativity, then $h' = (h_1, \ldots, h_k)$ is the required vector. It is seen that this representation reduces to the one employed in Theorem 3 if A^i is the matrix with unity on the ith diagonal element and zeroes elsewhere. Thus the study of the tensor products of Banach spaces, is relevent in the problems of this type.

5. Special Cases. The case of a single parameter (i.e., $k = 1$) will be considered in this section. Let L^2 be the space spanned by the square integrable functions D_i in the usual manner. Suppose the conditions I—IV hold for $p(x, \theta)$. Then the bound of Theorem 2 simplifies to that of

Theorem 6. *Let $\alpha(\theta) = \theta + b(\theta)$, where $b(\theta)$ is the bias, and conditions* I—IV *on $p(x, \theta)$ hold. If $R_2(T, \theta) = E_\theta(T - \theta)^2$, then*

$$\begin{aligned} R_2(T, \theta) \geqq{} & (1 + b'(\theta))^2 \sum_{i=1}^{\infty} (m_1^{(i)}/M_i)^2 + \sum_{i=2}^{\infty} M_i^{-2} \left(\sum_{j=2}^{i} m_j^{(i)} b^j(\theta)\right)^2 + \\ & + 2 \sum_{i=2}^{\infty} M_i^{-1} (1 + b'(\theta)) m_1^{(i)} \left(\sum_{j=2}^{i} m_j^{(i)} b^j(\theta)\right). \end{aligned} \tag{28}$$

This bound is obtained from (12) by setting $k = 1$, and $\alpha^i(\theta) = \delta_{1i} + b^i(\theta)$, where $b^i(\theta) = \dfrac{d^i b(\theta)}{d\theta^i}$ and δ_{ij} is the Kronecker delta.

Corollary 6.1. *If T is an unbiased estimator of θ, then the lower bound in* (28) *becomes*

$$R_2(T, \theta) = \operatorname{Var} T \geqq \sum_{i=1}^{\infty} (m_1^{(i)}/M_i)^2\,. \tag{28'}$$

There is an interesting relation between the Bhattacharyya bounds [2], and the series given in (28′). Let B_k denote the k-th Bhattacharyya bound (the unbiased case is considered) where B_k are defined by, [2],

$$B_k = |m_{22} \ldots m_{kk}| / |m_{11} m_{22} \ldots m_{kk}| \text{ if } k > 1, \text{ and } B_1 = 1/m_{11}. \tag{29}$$

Then the following result obtains.

Corollary 6.2. *For each r, $B_r = \sum_{i=1}^{r} (m_1^{(i)}/M_i)^2$.*

---

[2]) I owe this to a conversation with Professor S. KAKUTANI.

Proof: The proof is a matter of varification. The relation becomes transparent after noting the following elementary determinantal identity.

Lemma 1. *Let $|a_1 b_2 \ldots h_k|$ stand for a k-th order determinant all of whose principal minors are non-vanishing. (Here a_1 is the diagonal element of the first row $a_1, \ldots, a_k$; b_2 that of the second row, etc.) Then the following identity obtains.*

$$\text{(30)} \quad \frac{|b_2 c_3 \ldots g_{k-1} h_k|}{|a_1 b_2 c_3 \ldots g_{k-1} h_k|} = \frac{1}{a_1} + \frac{a_2 b_1}{a_1 |a_1 b_2|} + \\ + \frac{|a_2 b_3|\,|b_1 c_2|}{|a_1 b_2|\,|a_1 b_2 c_3|} + \cdots + \frac{|a_2 b_3 \ldots g_k|\,|b_1 c_2 \ldots h_{k-1}|}{|a_1 b_2 \ldots g_{k-1}|\,|a_1 b_2 \ldots h_k|}.$$

The above identity is based on the method of the so-called Schweinsian Expansions of determinants and with some simple modifications.

The corollary follows immediately from the lemma, on noting that the determinants in (29) are symmetric, and that $|m_{11} m_{22} \ldots m_{rr}| = \overline{M}_r^2$, $M_i^2 = (\overline{M}_{i-1} \overline{M}_i)^2$ (see (10)), and $m_1^{(1)} = 1$, $m_{12} m_{12} = m_{12}^2 = [m_1^{(2)}]^2$ and $|m_{12} m_{23}|\,|m_{21} m_{32}| = |m_{12} m_{23}|^2 = [m_1^{(3)}]^2$, etc. Q.E.D.

Example: Let $\mu =$ Lebesgue measure, $S =$ Euclidian n-space, $p(x, \theta) = \theta^n \exp\left[-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i\right]$, $0 < \theta < \infty$, and $x_i \geqq 0$. The maximum likelihood estimator of θ, say, T, is $T = \overline{X}^{-1}$, where $\overline{X}$ is the sample mean. It will be seen that $E_\theta(T) = \theta + b(\theta) = \theta + \theta/n - 1$. Let $A = (a, b)$, $0 \leqq a < b \leqq \infty$, and $\theta_0 = 1$, the "true" value of the parameter. Then (28) becomes

$$\text{(28'')} \quad R_2(T, \theta) \geqq (1 + 1/n - 1)^2 \sum_{i=1}^{\infty} (m_1^{(i)}/M_i)^2 .$$

The hypothesis of Theorem 6 is seen to be satisfied by the above assumptions. Setting $y = n\overline{X}$ the usual computations give,

$$\text{(31)} \quad D_m = (-1)^m [y^m + (-1) n P_1 y^{m-1} + (-1)^2 m C_2 n P_2 y^{m-2} + \cdots \\ + (-1)^r m C_r n P_r y^{m-r} + \cdots + (-1)^m n P_m\}$$

where $\theta_0 = 1$ is used, and $n P_r = n!/(n-r)!$, $n C_r$ is the r-th binomial coefficient if $n \geqq r$, and zero otherwise in both cases. The D_m consists of $\min(m+1, n+1)$ terms, in number, and $E_\theta(D_m) = 0$, $E_\theta(D_m^2) < \infty$ all m. Further, D_m are linearly independent, so that B_k, $k = 1, 2, \ldots$, form a strictly increasing sequence. However, $(T - 1)$ does not belong to L^2 (the space spanned by D_m), and there is strict inequality in (28'').

A few numerical values of B_k are the following. Taking $n = 3$, one obtains $R_2(T, 1) = 2.5$ and $B_1 = 1/3$, $B_2 = 1/2$, $B_3 = 0.6623$, etc., so that the first bound (Cramér-Rao) is 0.75, the second is 1.125, and the third is 1.4903, and so on. (Var $T = 2.25$).

Remark: Thus far in this part, it is shown that, using D_i as the basic r.v.'s to generate the space $\mathfrak{L}^2$ (or L^2), the lower bounds are attainable only if the estimators are unbiased. However, this does not imply that the lower bounds for the risk functions related to biased estimators are unattainable. In fact, one has to find a different set of r.v.'s, other than D_i, whose expecta-

tions are not necessarily zero (and are related to the bias in a known way), and which are square integrable. This aspect of the problem is not considered here.

Part II. Convex Loss

6. Lower Bounds. Let T denote an estimator, and θ_0 the true value of the parameter θ of the density function $p(x, \theta)$, of section 2. If $y = t - \theta$, then $W_\theta(y)$ stands for a function whose argument depends only on $(t - \theta)$, but which may also contain θ in some other manner. Let $W_\theta(y)$ be the loss function satisfying the following assumptions: (a) $W_\theta(y) \geq 0$, for all θ in A, and y, (b) $W_\theta(0) = 0$, (c) $W_\theta(y) = W_\theta(-y)$, (d) $W_\theta(y)$ is convex in y for each θ in A and is measurable in both y and θ, and (e) $E_\theta(W_\theta(\not{T})) < \infty$ for all θ in A, and $\not{T} = T - \theta$.

It is noted that if $W_\theta(y)$ is a function satisfying the conditions (a)—(e) above, then it is always possible to represent it as a k-th power of a function $\overline{W}_\theta(y)$ which satisfies again (a)—(e), for some $k (\geq 1)$. Let k_0 be the largest such value of k.

Theorem 7. *Let T be an estimator and θ_0, in A, the true value of θ. Suppose $p(x, \theta)$ satisfies conditions* I—IV *of section* 2, *for $i = 1$, and $D_1^{k'}$ is integrable $(p(x, \theta) d\mu)$, where $k' = k/(k-1)$ with $1 \leq k \leq k_0$. If the loss function $W_\theta(y)$ satisfies the assumptions* (a)—(e) *above, then*

$$(32) \qquad R(T, \theta) \geq W_\theta\left(\frac{1 + b'(\theta)}{E_\theta(|D_1|)}\right) \left\{\begin{matrix}\text{largest} \\ k = k_0\end{matrix} \; [E_\theta(|D_1|)/E_\theta^{1/k'}(|D_1|^{k'})]^k\right\} \text{ if } k_0 > 1,$$

and if $k_0 = 1$, $E^{1/k_0'}(|D_1|^{k_0'})$ is taken as the essential supremum of the r.v. $|D_1|$, where $b(\theta)$ is the bias with $b'(\theta) = \dfrac{db(\theta)}{d\theta}$.

Proof: From the conditions I—IV of section 2, one obtains

$$(33) \qquad E_\theta(D_1) = 0, E_\theta(\not{T} D_1) = E_\theta(T D_1) = \alpha'(\theta) = 1 + b'(\theta), \text{ where } \not{T} = T - \theta.$$

Since D_1 is non-zero with probability one,

$$|D_1| \, \overline{W}_\theta(\not{T}) = E_\theta(|D_1|) \left[\frac{|D_1|}{E_\theta(|D_1|)} \cdot \overline{W}_\theta(\not{T})\right],$$

where $\overline{W}_\theta^k(y) = W_\theta(y)$ for some $k \geq 1$, and $\overline{W}_\theta(y)$ satisfies the conditions (a)—(e). Taking expectations on both sides of the above identity one has,

$$E_\theta[|D_1| \, \overline{W}_\theta(\not{T})] = E_\theta(|D_1|) E_\theta\left[\frac{|D_1|}{E_\theta(|D_1|)} \overline{W}_\theta(|\not{T}|)\right], \text{ by (c)}, \geq$$

$$(34) \qquad \geq E_\theta(|D_1|) \, \overline{W}_\theta\left(\frac{E_\theta(|D_1 \not{T}|)}{E_\theta(|D_1|)}\right), \text{ by Jensen's inequality ([15], p. 68)},$$

$$\geq E_\theta(|D_1|) \, \overline{W}_\theta\left(\frac{E_\theta(D_1 \not{T})}{E_\theta(|D_1|)}\right).$$

The last step follows from the fact that any function $\overline{W}_\theta(y)$ satisfying conditions (a)—(d) can be assumed to be non-decreasing (see [15], p. 69). Thus from (33) and (34) it follows that

$$(35) \qquad E_\theta[|D_1| \, \overline{W}_\theta(\not{T})] \geq E_\theta(|D_1|) \, \overline{W}_\theta\left(\frac{1 + b'(\theta)}{E_\theta(|D_1|)}\right), \text{ using (c)}.$$

Case 1. Let $k_0 > 1$, where k_0 is the largest value of k. Then, for $1 < k \leq k_0$, if $k' = k/(k-1)$, it follows that

$$(36) \qquad E_\theta[|D_1| \, \overline{W}_\theta(\not{T})] \leq [E_\theta(\overline{W}_\theta^k(\not{T}))]^{1/k} [E_\theta(|D_1|^{k'})]^{1/k'},$$

by Hölder's inequality. Hence (35) and (36) imply, on setting $\overline{W}_\theta^k = W_\theta$,

$$R(T, \theta) \geqq W_\theta\left(\frac{1 + b'(\theta)}{E_\theta(|D_1|)}\right)[E_\theta(|D_1|)/E_\theta^{1/k'}(|D_1|^{k'})]^k . \tag{37}$$

Since the only term that depends on the "free parameter" k is the last, the lower bound may be sharpened by maximizing it with respect to k. It will be shown in Lemma 2 below that $[\quad]^k$ is an increasing function of k, so that the best bound is obtained by taking $k = k_0$, which is (32).

Note that if k_0 is the largest value for which $(W_\theta(y))^{1/k_0} = \overline{W}_\theta(y)$, where $\overline{W}_\theta(y)$ satisfies the assumptions (a)—(e), then $V_k(y) = \overline{W}_\theta^k(y)$ also satisfies (a)—(e) for every $1 \leqq k \leqq k_0$. This fact is needed in (37).

Case 2. $k_0 = 1$. In this case $\overline{W}_\theta(T) = W_\theta(T)$ and (36) becomes,

$$E_\theta[|D_1|\, W_\theta(T)] \leqq E_\theta(W_\theta(T))\, ||D_1||_\infty, \text{ again by Hölder's inequality for } k = 1. \tag{38}$$

From (35) and (38), the inequality of (32) is immediate. Q.E.D.

Corollary 7.1. *If* $W_\theta(y) = |y|^k$, $k \geqq 1$, *then* (32) *reduces to,*

$$R_k(T, \theta) \geqq |1 + b'(\theta)|^k/[E_\theta(|D_1|)^{k'}]^{k-1},\ k > 1, \text{ and} \tag{39}$$

$$R_1(T, \theta) \geqq |1 + b'(\theta)|/||D_1||_\infty,\ k = 1 . \tag{39'}$$

With $k = 2$, (39) becomes the classical Cramér-Rao bound ([4], [9]) and (39) and (39′) were found, in their form, by Barankin [1] using a different method.

Lemma 2. $\varphi(k) = [E_\theta(|D_1|)/E_\theta^{1/k'}(|D_1|^{k'})]^k$ *is a monotone increasing function of* k.

Proof: Let $1 < k_1 < k_2 \leqq k_0 < \infty$ be arbitrary. It should be shown that $\varphi(k_2) \geqq \varphi(k_1)$. Observe that there exists an $m > 1$, such that $k_2 = mk_1$. ($k_2' = mk_1/(mk_1 - 1)$). To show that $\varphi(mk_1) \geqq \varphi(k_1)$, for all $k_1 > 1$, ($m > 1$), is equivalent to showing that

$$\left[E_\theta^{\frac{mk_1-1}{mk_1}}\left(|D_1|^{\frac{mk_1}{mk_1-1}}\right)\right]^{mk_1} \leqq [E_\theta(|D_1|)]^{(m-1)k_1}\left[E_\theta^{\frac{k_1-1}{k_1}}\left(|D_1|^{\frac{k_1}{k_1-1}}\right)\right]^{k_1} \text{ is true,}$$

or,

$$E_\theta\left(|D_1|^{\frac{mk_1}{mk_1-1}}\right) \leqq [E_\theta(|D_1|)]^{\frac{(m-1)k_1}{mk_1-1}}\left[E_\theta\left(|D_1|^{\frac{k}{k-1}}\right)\right]^{\frac{k_1-1}{mk_1-1}} . \tag{40}$$

But (40) is true follows immediately from the Hölder inequality. Q.E.D.

Remark: Except for notation, the multiparameter extension of (32) is trivial and will be omitted.

7. On the Regularity Conditions of Section 2. The regularity conditions I—IV imposed on the density function $p(x, \theta)$ are not quite essential for the methods employed until now. It will be noted, from the proofs, that the essential characteristic is the existence of a set of r.v.'s D_i with the properties: (i) $E(D_i) = 0$, or a known quantity, (ii) D_i are linearly independent, (iii) the D_i are some "nice" functions of $p(x, \theta)$ such that $E(TD_i)$ are known, and (iv) D_i have some integrability properties. It is immaterial whether the sampling is sequential or nonsequential. If $p(x, \theta)$ is not differentiable, then the condi-

tions I—IV, of section 2, fail, but there are *several* ways of finding a set of D_i satisfying the general requirements (i)—(iv). One method, indicated by KIEFER [7], will be illustrated here. However, the questions as to which are the best (in the sense of giving the largest lower bound) functions to consider has not been treated in this paper.

Let A_0 be a subset of the parameter space A, such that $A_0 = \{h: \theta + h \in A\}$, where h is any real number. Choose and fix θ. Let φ_1 and φ_2 be any two probability measures on A_0 such that

$$E_i(h) = \int_{A_0} h \, d\,\varphi_i(h) \text{ exists, } i = 1, 2\,. \tag{41}$$

Next, define the r.v. D_1 on S_θ (the carrier of $p(x, \theta)$) as,

$$D_1 = p(x, \theta)^{-1} \int_{A_0} p(x, \theta + h)\, [d\,\varphi_1(h) - d\,\varphi_2(h)]\,. \tag{42}$$

Recall that A is an interval on the real line, and $p(x, \theta)$ is integrable on the product space $(S_\theta \times A)$ and hence also on $(S_\theta \times A_0)$. Consequently by Fubini's theorem, and the fact that φ_i are probability measures on A_0, it follows that $E_\theta(D_1) = 0$ for every fixed θ.

Let T be any estimator of θ, such that $E_\theta(W_\theta(T))$ exists, where $W_\theta(y)$ satisfies conditions (a)—(e) of section 6. Let $E_\theta(T) = \theta + b(\theta) = \alpha(\theta)$. Writing, as before, $\bar{T} = T - \theta$, it follows that, again by Fubini's theorem,

$$\begin{aligned} E_\theta(\bar{T} D_1) = E_\theta(T D_1) &= \int_{S_0} t \left[\int_{A_0} p(x, \theta + h)\, d(\varphi_1(h) - \varphi_2(h))\right] d\mu\,, \\ &= (E_1(h) - E_2(h)) + [E_1(b(\theta + h)) - E_2(b(\theta + h))]\,. \end{aligned} \tag{43}$$

Suppose that $E_\theta(|D_1|^{k'})$ exists, where $k' = k/k - 1$, $k > 1$. Then Theorem 7 becomes,

Theorem 8. *Let T be an estimator of θ, of the density $p(x, \theta)$. If $W_\theta(y)$ is the loss function satisfying the assumptions* (a)—(e) *of section* 6, *then*

$$\begin{aligned} R(T, \theta) \geq \operatorname*{Sup}_{\varphi_i} &\left\{ W_\theta\left(\frac{E_1(h) - E_2(h) + E_1(b(\theta + h)) - E_2(b(\theta + h))}{E_\theta(|D_1|)}\right)\right\} \times \\ &\times \left\{\frac{E_\theta(|D_1|)}{E_\theta^{1/k_0'}(|D_1|^{k_0'})}\right\}^{k_0}, \end{aligned} \tag{44}$$

where, if $k_0 = 1$, $E_\theta^{1/k_0'}(|D_1|^{k_0'}) = ||D_1||_\infty$, and, as usual, $k_0' = k_0/k_0 - 1$ if $k_0 > 1$.

The proof is similar to that of Theorem 7.

Corollary 8.1. *If $W_\theta(y) = |y|^k$, then* (44) *reduces to*

$$R_k(T, \theta) \geq \operatorname*{Sup}_{\varphi_i} \frac{|(E_1 h - E_2 h) + (E_1 b(\theta + h) - E_2 b(\theta + h))|^k}{[E_\theta(|D_1|^{k'})]^{k-1}}, \tag{45}$$

if $k > 1$, (and if $k = 1$, the denominator is replaced by $||D_1||_\infty$) which, with $k = 2$ and $b(\theta) = 0$, is the bound given by KIEFER [7].

The φ_i are arbitrary measures, only subject to (41), so that (45) may be specialized to get other results as follows. Let $\varphi_1(h)$ and $\varphi_2(h)$ assign probability one respectively to points 0 and h, such that $\theta + h$ is in A. Then (45) becomes

($k > 1$, for $k = 1$ an obvious modification is needed)

$$(46)\qquad R_k(T,\theta) \geqq \frac{|h + b(\theta+h) - b(\theta)|^k}{\inf\limits_{h \neq 0}\left[\int\limits_{S_\theta}\left|\frac{p(x,\theta+h)-p(x,\theta)}{p(x,\theta)}\right|^{k'} p(x,\theta)\,d\mu\right]^{k-1}}$$

or,

$$(47)\qquad = \frac{\left|1 + \frac{\Delta b(\theta)}{h}\right|^k}{\inf\limits_{h \neq 0}\left[\int\limits_{S_\theta}\left|\frac{p(x,\theta+h)-p(x,\theta)}{h\,p(x,\theta)}\right|^{k/k-1} p(x,\theta)\,d\mu\right]^{k-1}}$$

which, with $k = 2$, is Chapman-Robbins bound [3].

If $h \to 0$ through a sequence of values, such that $\theta + h \in A$, and if $dp(x,\theta)/d\theta$ and $db(\theta)/d\theta$ exist, then (47) reduces to (39).

Remark: The same construction can be made to yield a sequence of r.v.'s $\{D_i\}$ so as to enable the treatment of Bhattacharyya (and other) bounds as follows. Let $A_\theta = \{h : \theta + h \in A\}$. For each fixed θ, let $\{\varphi_i\}$ be a finite or infinite sequence of probability measures on A_θ such that $E_i h = \int\limits_{A_\theta} h\,d\,\varphi_i$ exists for $i = 1, 2, \ldots$ Now define D_i by

$$(48)\qquad D_n = p(x,\theta)^{-1}\int\limits_{A_\theta} p(x,\theta+h)\,dF_n(h),\ n = 1, 2, \ldots$$

where $F_n(h) = \sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\varphi_{r+1}$. The D_n so obtained satisfy the general requirements (i)—(iv). Other procedures can be considered.

8. An Extension. If the q-th central absolute moment of the unbiased estimator is the risk function then general results on lower bounds were given by Barankin [1]. In this section the corresponding result for the non-negative symmetric convex loss function will be given, without assuming unbiasedness. Since D_i can be obtained by other methods also, as pointed out in section 7, for simplicity the regularity conditions of section 2 will be assumed.

The risk function here is motivated from the special form of Barankin's [1], i.e., if T is an unbiased estimator of θ, and $k^{-1} + k'^{-1} = 1$ where the real $k, k' \geqq 1$, then

$$(49)\qquad \begin{aligned} R_k^{1/k}(T,\theta) &= \|T-\theta\|_k = \left(\int\limits_S |t-\theta|^k p(x,\theta)\,d\mu\right)^{1/k} \\ &= \sup_{f(x)}\int\limits_S |(t-\theta)f|\,p(x,\theta)\,d\mu, \text{ with } \left(\int\limits_S |f|^{k'} p(x,\theta)\,d\mu\right) \leqq 1\,. \end{aligned}$$

The equation (49) suggests immediately the following extension. Consider the measure space $(S, \mathfrak{B}, \mu)$. Let $\varphi(t)$ be a non-negative symmetric, measurable ($\mathfrak{B}$), and integrable (μ) convex function with $\varphi(0) = 0$ and such that $\varphi(t)/t \to \infty$ as $t \to \infty$, (compare with $W(t)$ of section 6, and note that $\varphi(t)$ satisfies the assumptions (a)—(e)) and let $\psi(t)$ be a similar convex function such that for real a and b,

$$(50)\qquad |ab| \leqq \varphi(a) + \psi(b)\,.$$

Now consider the r.v.'s D_i and the estimators $\bar{T}$ (or $\bar{T} = T - \theta$), such that $\varphi(\bar{T})$ and $\psi(D_i)$ are r.v.'s (i.e., measurable ($\mathfrak{B}$), and integrable ($p\,d\mu$) functions). Then the risk function for $\varphi(t)$, analogous to (49), can be defined by[3])

(51) $R_\varphi(T, \theta) = ||\bar{T}||_\varphi = \sup\limits_{d_i} \int\limits_S |\bar{t} d_i|\, p(x, \theta)\, d\mu$, with $\int\limits_S \psi(d_i)\, p(x, \theta)\, d\mu \leqq 1$,

where φ and ψ satisfy the inequality (50). $||D_i||_\psi$ is defined similarly.

Let L^φ and L^ψ be the classes of all r.v.'s $\bar{T}$ and D_i (and all finite linear combinations of them) such that $\varphi(\bar{T})$ and $\psi(D_i)$ are measurable ($\mathfrak{B}$) and $||\bar{T}||_\varphi$ and $||D_i||_\psi$ are finite. These spaces are linear and complete (or may be made complete by adding the limit points under their norms, or by the usual Cantor-Méray method).

If $\varphi(u) = |u|^k/k$ and $\psi(v) = |v|^{k'}/k'$ where $k^{-1} + k'^{-1} = 1$, then these functions satisfy (50) and, if T is unbiased, the relation between the two risk functions (49) and (51) is seen to be given by

$$R_\varphi(T, \theta) = ||\bar{T}||_\varphi = k'^{1/k'}\, ||\bar{T}||_k = k'^{1/k'} R_k^{1/k}(T, \theta). \text{ (cf. [15], p. 97).}$$

Since $\varphi(u)$ and $\psi(v)$, the convex functions satisfying the assumptions (a)—(e) of section 6 and (50), can be more general, the risk function $R_\varphi(T, \theta)$ clearly includes $R_k(T, \theta)$ of (49).

Theorem 9. *Suppose $M(\bar{T})$ is the subspace (*i.e. *closed linear manifold) of L^φ that contains the elements $\bar{T} (= T - \theta)$, where T is an estimator of θ, of $p(x, \theta)$. Then* (i) *$M(\bar{T})$ is non-empty if, and only if, there exists a constant K (independent of n) such that for every set of r.v.'s $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_n}$ in L^ψ, where $\varphi(u)$ and $\psi(u)$ satisfy* (50) *and $\varphi(2u) \leqq C\,\varphi(u)$, where C is a finite positive constant independent of u, and any set of n-real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ the following inequality obtains:*

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j \alpha^{i_j}(\theta) \right| \leqq K \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j D_{i_j} \right\|_\psi, \tag{52}$$

(ii) *for any $\bar{T}$, in $M(\bar{T})$, $||\bar{T}||_\varphi \geqq C_0$, where $C_0 = \text{glb}\, K$ satisfying* (52), *and* (iii) *if there is a $\bar{T}^*$ in $M(\bar{T})$ such that $||\bar{T}^*||_\varphi = C_0$, then it is essentially unique.*

Remark: This is an existence theorem and the other results (and extensions) of the classical ones, can be obtained.

Proof: From the assumptions on $p(x, \theta)$ and D_i, it follows that

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \alpha^{i_j}(\theta) = \int\limits_S \bar{t} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j d_{i_j} \right) p(x, \theta)\, d\mu\,.$$

Noting that L^ψ is a linear space, one has

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j \alpha^{i_j}(\theta) \right| \leqq \int\limits_S \left| \bar{t} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j d_{i_j} \right) \right| p(x, \theta)\, d\mu$$

$$\leqq ||\bar{T}||_\varphi \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j D_{i_j} \right\|_\psi .$$

[3]) Dr. J. R. Blum has informed me that he has considered this function earlier in some of his unpublished work.

Since the elements of L^φ have finite norm there exists a K, constant, such that $\|T\|_\varphi \leqq K$, and this is (52). (ii) and (iii) will be disposed of before the converse of (i) is considered.

(ii) is trivial. For (iii), if possible, let T^* and T_1 be in $M(T)$ such that $\|T^*\|_\varphi = \|T_1\|_\varphi = C_0$. Since $M(T)$, being a subspace, is convex $T^*/2 + T_1/2$ is also in $M(T)$. Hence using the "triangle" inequality,

$$C_0 \leqq 1/2\, \|T^* + T_1\|_\varphi \leqq 1/2\, \|T^*\|_\varphi + 1/2\, \|T_1\|_\varphi = C_0\,, \tag{53}$$

since

$$\begin{aligned}\|aT\|_\varphi &= \sup_d \int_S |a\bar{t}d|\, p(x,\theta)\, d\mu, \text{ subject to } \int_S \psi(d)\, p(x,\theta)\, d\mu \leqq 1\,,\\ &= |a|\, \|T\|_\varphi\,.\end{aligned}$$

The above chain of inequalities, in (53), proves (iii), since the possibility $T^* = \alpha T_1$, $\alpha > 0$, is seen in (53) to be, $\alpha = 1$.

To prove the converse of (i), first observe that, when (52) holds, the existence of a (bounded) linear functional is assured by the Hahn-Banach theorem (cf. HILLE and PHILLIPS [6], p. 31 and note that L^φ, L^ψ are B-spaces) such that, if F is the functional $F(D_i) = \alpha^i(\theta)$ for all i, and $\|F\|_\psi \leqq C'$ (constant). Let $\|F\|_\psi = C_0' \leqq C'$. Next by the representation theorem for the space L^ψ (cf. ZAANEN [14], p. 658) there exists a unique r.v., T, in L^φ such that

$$F(D_i) = \int_S \bar{t}\, d_i\, p(x,\theta)\, d\mu \tag{54}$$

where D_i belongs to L^ψ. Moreover,

$$1/2\, \|T\|_\varphi \leqq \|F\|_\psi \leqq \|T\|_\varphi, \text{ i.e., } \|T\|_\varphi \leqq 2C_0'\,. \tag{55}$$

Taking $K = 2C_0'$ in (52) proves the converse. Q.E.D.

9. Final Remarks. In this concluding section, an example will be given to show that the "efficiency" of an estimator is a property of the loss function. More precisely, it will be shown that an unbiased estimator which is a sufficient statistic for θ, of $p(x,\theta)$, and which is efficient, in the sense that the Cramér-Rao lower bound is reached, is inefficient if the loss function, though convex, is slightly changed. Thus other definitions of efficiency are called for.

Consider the loss function

$$W(x) = (|x| + x^2)^2 = (\overline{W}(x))^2\,. \tag{56}$$

Let μ = Lebesgue measure, S = Euclidian n-space, and $p(x,\theta) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left[-1/2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2\right]$. The maximum likelihood estimator T, of θ, is $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$, so that $E(T) = \theta$. Let A be an open interval, including the origin, on the real line, $\theta_0 = 0$. Then it is seen that the assumptions of Theorem 7 are satisfied, and the lower bound (32) takes the form ($k_0 = 2$ here),

$$R(T,\theta) \geqq \left(1 + \frac{1}{E_\theta(|D_1|)}\right)^2 \Big/ E_\theta(|D_1|^2)\,. \tag{32'}$$

However, $R(T,\theta_0) = E_{\theta_0}(|\overline{X}| + \overline{X}^2)^2 = 1/n + 3/n^2 + 2\left(\frac{16}{2\pi\, n^3}\right.$

Also $D_1 = \left.\frac{\partial \log p(x, \theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0} = n\bar{x}$, since $\theta_0 = 0$. Hence one gets, $E_{\theta_0}(|D_1|) = \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{1/2}$, $E_{\theta_0}(D_1^2) = n$. Consequently, (32′) takes the form,

$$1/n + 3/n^2 + 2\left(\frac{8}{\pi n^3}\right)^{1/2} \geq \frac{\left(1 + \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/2}\right)^2}{n}. \tag{57}$$

Since strict inequality holds in (57) for all positive n, the sufficient statistic $\bar{X}$, which is unbiased, *is not* efficient with respect to the loss function $W(x)$ (in the sense that strict inequality holds in (32′)). If $W(x) = x^2$, then, as Cramér has shown ([4], p. 485), $\bar{X}$ *is* an efficient statistic. Thus, efficiency is a property of the loss function.

References

[1] Barankin, E. W.: Locally best unbiased estimates. Ann. Math. Stat. 20, 477—501 (1949).

[2] Bhattacharyya, A.: On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation. Sankhyā 8, 1—14 (1946).

[3] Chapman, D. G., and H. Robbins: Minimum variance estimation without regularity conditions. Ann. Math. Stat. 22, 581—586 (1951).

[4] Cramér, H.: Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press 1946.

[5] Fraser, D. A. S.: Nonparametric Methods in Statistics. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1957.

[6] Hille, E., and R. S. Phillips: Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. No. 31, 1957.

[7] Kiefer, J.: On minimum variance estimators. Ann. Math. Stat. 23, 627—628 (1952).

[8] Olmstead, J. M. H.: Completeness and Parseval's equation. Am. Math. Monthly 65, 343—345 (1958).

[9] Rao, C. R.: Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. Bull. Calcutta Math. Soc. 37, 81—91 (1945).

[10] Rao, M. M.: Lower bounds for risk functions in estimation. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. 45, 1168—1171 (1959).

[11] Rao, M. M.: Consistency and limit distributions of estimators of parameters in explosive stochastic difference equations. Ann. Math. Stat. 32, 195—218 (1961).

[12] Seth, G. R.: On the variance of estimates. Ann. Math. Stat. 20, 1—27 (1949).

[13] Wiener, N., and P. Masani: Prediction theory of multivariate Stochastic Processes I. Acta Math. 98, 111—150 (1957).

[14] Zaanen, A. C.: On a certain class of Banach Spaces. Ann. Math. 47, 654—666 (1946).

[15] Zygmund, A.: Trigonometrical Series. Warzawa 1935.

(Received December 3, 1960)

GOTTSCHLING, E.
Math. Annalen 143, 399—430 (1961)

Über die Fixpunktuntergruppen der Siegelschen Modulgruppe

Von

ERHARD GOTTSCHLING in Berlin

§ 1. Bezeichnungen, Definitionen und Ergebnisse

Die in [2] erläuterten Begriffe und eingeführten Bezeichnungen werden in die folgenden Betrachtungen übernommen. Die Gleichungen, Definitionen, Hilfssätze und Sätze aus [2] sollen zitiert werden, indem die entsprechende Nummer unterstrichen wird; so bedeutet also z. B. ($\underline{1}$) die Gleichung (1) in [2], ferner Definition $\underline{2}$ die Definition 2 in [2], ferner Lemma $\underline{3}$ das Lemma 3 in [2] und schließlich Satz $\underline{4}$ den Satz 4 in [2].

Das Ziel von [2] und der vorliegenden Arbeit ist, im Falle $n = 2$ eine vollständige Übersicht über die Fixpunktmannigfaltigkeiten in $\mathfrak{H}$ (das sind die in Definition $\underline{1}$ eingeführten ausgezeichneten Untermengen von $\mathfrak{H}$) und die Fixpunktuntergruppen von Δ (das sind die in Definition $\underline{2}$ eingeführten ausgezeichneten Untergruppen von Δ) zu geben. Nachdem in [2] alle Fixpunktmannigfaltigkeiten der Form $\mathfrak{H}(M)$ ($M \in \Delta$) bestimmt wurden, muß hierzu jetzt nur noch, wie in § 1 von [2] begründet wurde, für jeden Punkt $Z \in \mathfrak{H}(M)$ die Gruppe $\Delta(Z)$ ermittelt werden. Das soll im folgenden geschehen. Außerdem sollen im folgenden zwei Sätze über die Fixpunktuntergruppen bewiesen werden, die für beliebiges n gelten.

Zwei teilerfremde symmetrische Matrizenpaare C, D und C_1, D_1 (vgl. z. B. [2]) sollen assoziiert heißen, wenn es eine unimodulare Matrix U mit $C_1 = UC$, $D_1 = UD$ gibt. Die Klasse der zu C, D assoziierten teilerfremden symmetrischen Matrizenpaare bezeichnen wir mit $\{C, D\}$. In [6] wird gezeigt, daß die zweite Matrizenzeile einer jeden Modulmatrix teilerfremd und symmetrisch ist, daß man umgekehrt jedes teilerfremde symmetrische Paar zu einer Modulmatrix ergänzen kann, und daß zwei Modulmatrizen dann und nur dann der gleichen rechtsseitigen Nebenklasse von Γ in Δ angehören, wenn ihre zweiten Matrizenzeilen assoziiert sind. Daher besteht eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Klassen assoziierter Matrizenpaare und den rechtsseitigen Nebenklassen von Γ in Δ, nämlich

$$\{C, D\} \leftrightarrow \Gamma M \qquad \left(M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Delta\right). \tag{1}$$

In [7] wird gezeigt, daß für zwei teilerfremde symmetrische Matrizenpaare C, D und C_1, D_1 genau dann

$$\operatorname{abs}(CZ + D) = \operatorname{abs}(C_1 Z + D_1)$$

identisch in Z gilt, wenn C, D und C_1, D_1 assoziiert sind. Es besteht also eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Klassen $\{C, D\}$ und den verschiedenen Ungleichungen (15). Wenn wir beachten, daß die Gleichung $\operatorname{abs}(CZ + D) = 1$ für $C, D \notin \{O, E\}$, wie in § 2 gezeigt werden soll, eine $(n^2 + n - 1)$-dimensionale Fläche in $\mathfrak{H}$ darstellt, können wir auch sagen, es bestehe eine eineindeutige Zuordnung zwischen den von $\{O, E\}$ verschiedenen Klassen $\{C, D\}$ und den Flächen

$$\operatorname{abs}(CZ + D) = 1 \qquad (C, D \notin \{O, E\}), \tag{2}$$

was in der Form

$$\{C, D\} \leftrightarrow \operatorname{abs}(CZ + D) = 1 \qquad (C, D \notin \{O, E\}) \tag{3}$$

geschrieben werden soll. Für $C, D \in \{O, E\}$ ist die Gleichung $\operatorname{abs}(CZ + D) = 1$ identisch in Z erfüllt.

Jedem Randpunkt Z_0 des durch (15) definierten Bereiches $\mathfrak{B}$ wird eine gewisse Zahl P folgendermaßen zugeordnet: Es sei $\mathfrak{Z}$ die Menge der Punkte $Z \in \mathfrak{B}$, die Δ-äquivalent zu Z_0 sind. Dann zerfällt $\mathfrak{Z}$ in eine Anzahl von Klassen $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1, \ldots$ von Punkten, derart daß für jedes $k = 0, 1, \ldots$ irgend zwei Punkte aus $\mathfrak{Z}_k$ stets Γ-äquivalent sind, während für jedes Paar $k \neq l$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$ ein Punkt aus $\mathfrak{Z}_k$ zu einem Punkt aus $\mathfrak{Z}_l$ niemals Γ-äquivalent ist. Die Anzahl der Klassen $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1, \ldots$ ist endlich, weil jeder Punkt von $\mathfrak{B}$ durch eine ganze Modulsubstitution in den Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ von Δ geworfen werden kann, und weil es, wie in [6] gezeigt wird, zu jedem reduzierten Punkt nur endlich viele Δ-äquivalente gibt, die gleichfalls reduziert sind. Es sei etwa $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0 \cup \cup \mathfrak{Z}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{Z}_m$, ferner $Z_0 \in \mathfrak{Z}_0$ und Z_k $(k = 1, \ldots, m)$ jeweils ein Repräsentant aus $\mathfrak{Z}_k$. Jeder Punkt aus $\mathfrak{Z}$ ist dann also Γ-äquivalent zu genau einem der Punkte $Z_0, \ldots, Z_m$. Die Gruppen $\Delta(Z_k)$ $(k = 0, \ldots, m)$ sind paarweise konjugiert und besitzen daher alle die gleiche Ordnung q. Ferner sei q_k $(k = 0, \ldots, m)$ die Ordnung von $\Gamma(Z_k)$. Die dem Punkt Z_0 zugeordnete natürliche Zahl P sei dann durch

$$P = q\left(\frac{1}{q_0} + \cdots + \frac{1}{q_m}\right) \tag{4}$$

definiert. Nun können die beiden in § 2 bewiesenen Sätze formuliert werden, die für beliebiges n gelten.

Satz 1: *Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Punktmenge in $\mathfrak{H}$. Ist $\Gamma(\mathfrak{M})$ bekannt, so kann $\Delta(\mathfrak{M})$ folgendermaßen bestimmt werden: Zunächst ermittle man ein vollständiges System nicht assoziierter teilerfremder symmetrischer Paare C, D mit*

$$\operatorname{abs}(CZ + D) = 1 \qquad \text{für alle } Z \in \mathfrak{M}. \tag{5}$$

Diese Paare werden auf irgendeine Weise zu Modulmatrizen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ergänzt. Dann wird ermittelt, für welche dieser Matrizen M alle Bildpunkte $M(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}$ (vgl. (5)) *simultan durch eine und dieselbe ganze Modulsubstitution in ihre Urbilder Z zurückgeworfen werden können. Das sei für die p Matrizen $M_1, \ldots, M_p$ der Fall. Sind dann $G_1, \ldots, G_p$ die ganzen Modulsubstitutionen, für die*

$$G_k(M_k(Z)) = Z \qquad (Z \in \mathfrak{M};\ k = 1, \ldots, p)$$

gilt, und setzen wir $G_k M_k = L_k$, so gilt

$$\Delta(\mathfrak{M}) = \Gamma(\mathfrak{M})\, L_1 \cup \cdots \cup \Gamma(\mathfrak{M})\, L_p .$$

Satz 2: *Ist Z_0 ein beliebiger Randpunkt von $\mathfrak{B}$, so gilt $P \geqq 2$, und es gibt $P-1$ Modulmatrizen $L_1, \ldots, L_{P-1}$, die durch Z_0 bis auf rechtsseitige Faktoren aus Γ eindeutig bestimmt sind und folgende Eigenschaften haben:*

a) Die Bereiche $\mathfrak{B}$, $L_\varkappa(\mathfrak{B})$ $(\varkappa = 1, \ldots, P-1)$ haben höchstens Randpunkte gemeinsam. Dabei bedeutet $L_\varkappa(\mathfrak{B})$ die Menge der Bilder der Punkte aus $\mathfrak{B}$ bei der Abbildung $L_\varkappa$.

b) Jeder der Bereiche $\mathfrak{B}$, $L_\varkappa(\mathfrak{B})$ $(\varkappa = 1, \ldots, P-1)$ besitzt Z_0 als Randpunkt.

c) Die Bereiche $\mathfrak{B}$, $L_\varkappa(\mathfrak{B})$ $(\varkappa = 1, \ldots, P-1)$ füllen eine volle Umgebung von Z_0 aus.

d) Die mit den zweiten Zeilen C, D der Matrizen $L_1^{-1}, \ldots, L_{P-1}^{-1}$ gebildeten Flächen (2) *sind paarweise verschieden und genau alle Flächen dieser Art, die Z_0 enthalten.*

In § 3 folgt die Bestimmung der Gruppen $\Delta(Z)$ im Falle $n = 2$ und in § 4 dann die Untersuchung der Struktur dieser Gruppen. Es wird sich herausstellen, daß $\Delta(Z)$ einen Normalteiler $\Delta_0(Z)$ enthält, derart daß die Faktorgruppe $\Delta(Z)/\Delta_0(Z)$ entweder zyklisch oder die Gruppe eines regulären Körpers ist. Wir geben daher zunächst eine Übersicht über Erzeugende und definierende Relationen dieser Gruppen; Ausführliches darüber findet man in [1]. Die zyklische Gruppe der Ordnung q ist die Gruppe mit einer Erzeugenden U und der definierenden Relation

$$U^q = E. \tag{6}$$

Dabei ist E das Einselement in der Gruppe. Jede Diedergruppe besitzt geradzahlige Ordnung, und zwar ist die Diedergruppe der Ordnung 2q $(q \geqq 2)$ die Gruppe mit zwei Erzeugenden U und V und den definierenden Relationen

$$U^2 = V^2 = (UV)^q = E. \tag{7}$$

Die Tetraedergruppe, die Oktaedergruppe und die Ikosaedergruppe besitzen jeweils zwei Erzeugende U und V und die definierenden Relationen

$$U^2 = V^3 = (UV)^k = E \qquad (k = 3, 4, 5). \tag{8}$$

Dabei bezieht sich $k = 3$ auf die Tetraedergruppe, deren Ordnung 12 ist, ferner $k = 4$ auf die Oktaedergruppe, deren Ordnung 24 ist, und schließlich $k = 5$ auf die Ikosaedergruppe, deren Ordnung 60 ist.

Es genügt offenbar, die Gruppen $\Delta(Z)$ für reduzierte Punkte Z anzugeben. Besteht $\Delta(Z)$ für einen reduzierten Punkt Z nicht nur aus der Identität, so muß Z auf einer der Fixpunktmannigfaltigkeiten liegen, die in den Sätzen 3 bis 7 angegeben sind. Für die Punkte dieser Mannigfaltigkeiten sollen jetzt die Fixpunktuntergruppen angegeben werden. Die in Satz 5 c) und d) angegebenen Punkte sind die einzigen reduzierten Punkte, für welche der oben erwähnte Normalteiler $\Delta_0(Z)$ von $\Delta(Z)$ nicht nur aus der Identität besteht. Für diese Punkte soll $\Delta(Z)$ zum Schluß angegeben werden. Für alle anderen reduzierten Punkte ist $\Delta(Z)$ eine der Gruppen (6), (7) oder (8). Für die Punkte Z mit $\Delta(Z) \subset \Gamma$ gilt zunächst

Satz 3: *Ist Z ein reduzierter Punkt, der auf einer der Mannigfaltigkeiten in Satz 3, aber auf keiner der Mannigfaltigkeiten in Satz 4 bis Satz 7 liegt, so ist $\Delta(Z) = \Gamma(Z)$ zyklisch von der Ordnung 2. Ist Z ein reduzierter Punkt, der auf*

einer der Mannigfaltigkeiten in Satz $\underline{4}$, aber auf keiner der Mannigfaltigkeiten in Satz $\underline{5}$ bis Satz $\underline{7}$ liegt, so ist $\Delta(Z) = \Gamma(Z)$ im Falle Satz $\underline{4}$a) die Diedergruppe der Ordnung 4 und im Falle Satz $\underline{4}$b) die Diedergruppe der Ordnung 6.

Für die Punkte der Mannigfaltigkeiten in Satz $\underline{5}$ bis Satz $\underline{7}$ enthält $\Delta(Z)$ stets nicht ganze Modulsubstitutionen. Es gelten folgende Sätze.

Satz 4: *Die Gruppe $\Delta(Z)$ ist für die Punkte in Satz $\underline{5}$a) die zyklische Gruppe der Ordnung 5, für die Punkte in Satz $\underline{5}$b) die Oktaedergruppe, für die Punkte in Satz $\underline{5}$e) die Diedergruppe der Ordnung 12 und für die Punkte in Satz $\underline{5}$f) schließlich die zyklische Gruppe der Ordnung 12.*

Satz 5: *Es sei Z ein reduzierter Punkt, der auf einer der Mannigfaltigkeiten in Satz $\underline{6}$ liegt, aber von den Punkten in Satz $\underline{5}$ verschieden ist. Dann ist $\Delta(Z)$ in den Fällen* a) *und* b) *von Satz $\underline{6}$ die zyklische Gruppe der Ordnung* 6, *in den Fällen* c) *und* d) *die zyklische Gruppe der Ordnung 4; in den Fällen* e) *bis* j) *ist $\Delta(Z)$ die Diedergruppe der Ordnung* 6 *und in den Fällen* k) *bis* o) *die Diedergruppe der Ordnung 4.*

Satz 6: *Es sei Z ein reduzierter Punkt, der auf einer der Mannigfaltigkeiten in Satz $\underline{7}$ liegt, aber von den Punkten in Satz $\underline{5}$ verschieden ist und auch nicht auf einer der Mannigfaltigkeiten in Satz $\underline{6}$ liegt. Die Gruppe $\Delta(Z)$ ist dann zyklisch von der Ordnung 2.*

Der Normalteiler $\Delta_0(Z)$ ist für den Punkt in Satz $\underline{5}$c) zyklisch von der Ordnung 2 und für die Punkte in Satz $\underline{5}$d) zyklisch von der Ordnung 3. In beiden Fällen sei K eine Erzeugende von $\Delta_0(Z)$. Es gilt dann

Satz 7: *Die Faktorgruppe von $\Delta(Z)$ nach dem Normalteiler $\Delta_0(Z)$ ist für den Punkt in Satz $\underline{5}$c) die Diedergruppe der Ordnung 8 und für die Punkte in Satz $\underline{5}$d) die Diedergruppe der Ordnung 12. Die Gruppe $\Delta(Z)$ selbst besitzt drei Erzeugende U, V, K und für den Punkt in Satz $\underline{5}$c) die definierenden Relationen*

$$U^2 = K,\quad V^2 = (UV)^4 = K^2 = E,\quad UK = KU,\quad VK = KV \tag{9}$$

und für die Punkte in Satz $\underline{5}$d) die definierenden Relationen

$$U^2 = V^2 = (UV)^6 = K^3 = E,\quad UK = KU,\quad VK = KV. \tag{10}$$

Aus den Relationen (9) *kann K noch eliminiert werden, so daß sich*

$$V^2 = (UV)^4 = U^4 = E,\quad VU^2 = U^2V \tag{11}$$

ergibt. Im Falle (10) *ist $\Delta(Z)$ das direkte Produkt aus der Diedergruppe der Ordnung 12 und der zyklischen Gruppe der Ordnung 3.*

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen aller auftretenden Gruppen $\Delta(Z)$ ist offenbar 720. Dieses Ergebnis erhält in anderem Zusammenhang auch Satake in [5].

§ 2. Allgemeines über die Fixpunktuntergruppen

Bevor Satz 1 und Satz 2 behandelt werden, beweisen wir zwei Hilfssätze.

Lemma 1: *Durch die Gleichungen* (2) *werden* (n^2+n-1)*-dimensionale Flächen im Raume* $\mathfrak{H}$ *dargestellt.*

Beweis: Wie in [6] gezeigt wird, kann jedes teilerfremde symmetrische Paar C, D mit Rang $C = r$ in der Form

$$C = U\begin{pmatrix} C_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V, \quad D = U\begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} V'^{-1} \tag{12}$$

geschrieben werden, wobei U und V unimodulare Matrizen sind, ferner C_r, D_r ein r-reihiges teilerfremdes symmetrisches Matrizenpaar und E_{n-r} die $(n-r)$-reihige Einheitsmatrix ist. Für $C, D \notin \{O, E\}$ ist offenbar $r > 0$. Es sei Q die Matrix, die aus den ersten r Zeilen von V gebildet wird. Weil Y positiv definit ist, gibt es dann eine r-reihige reelle Matrix F und eine r-reihige reelle Diagonalmatrix H mit

$$QXQ' + C_r^{-1}D_r = F'HF, \quad QYQ' = F'F. \tag{13}$$

Sind $h_1, \ldots, h_r$ die Diagonalelemente von H, so folgt aus (12) und (13) für den Punkt $Z(\lambda) = X + i\lambda Y$, der für $\lambda > 0$ dem Bereich $\mathfrak{H}$ angehört, die Beziehung

$$\operatorname{abs}(CZ(\lambda) + D)^2 = \det C_r^2 \det(QYQ')^2(h_1^2 + \lambda^2) \ldots (h_r^2 + \lambda^2). \tag{14}$$

Mit Hilfe der ersten Gleichung (13) erkennt man, daß die Absolutbeträge $|h_1|, \ldots, |h_r|$ durch geeignete Wahl von X beliebig klein gemacht werden können. Indem man in (14) dann λ hinreichend klein wählt, erkennt man, daß es einen $(n^2 + n)$-dimensionalen Bereich $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{H}$ gibt, derart daß für alle Punkte $Z(\lambda) \in \mathfrak{Q}$ die Ungleichung $\operatorname{abs}(CZ(\lambda) + D) < 1$ gilt. Weil (14) eine monoton wachsende Funktion von λ ist, die für $\lambda \to \infty$ über alle Schranken wächst, kann λ für jeden Punkt $Z(\lambda) \in \mathfrak{Q}$ so vergrößert werden, daß gerade $\operatorname{abs}(CZ(\lambda) + D) = 1$ wird. Man erhält so tatsächlich einen $(n^2 + n - 1)$-dimensionalen Bereich, dessen Punkte der Gleichung (2) genügen, womit Lemma 1 bewiesen ist.

Lemma 2: *Der durch (15) definierte Bereich $\mathfrak{B}$ ist Fundamentalbereich in $\mathfrak{H}$ für jedes vollständige Repräsentantensystem der linksseitigen Nebenklassen von Γ in Δ, und es gilt*

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{G \in \Gamma} G(\mathfrak{F}), \tag{15}$$

wobei $G(\mathfrak{F})$ die Menge der Bilder der Punkte aus $\mathfrak{F}$ bei der Abbildung G ist.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus (15), wenn man beachtet, daß $\mathfrak{F}$ Fundamentalbereich für die vollständige Gruppe Δ ist. Wird $M(Z) = U + iV$ gesetzt, so folgt aus (5) die Beziehung

$$\det V = \det Y \operatorname{abs}(CZ + D)^{-2}. \tag{16}$$

Die Determinante $\det Y$ heißt die Höhe des Punktes $Z = X + iY$. Aus (15) und (16) folgt dann, daß ein Punkt $Z \in \mathfrak{H}$ dann und nur dann zu $\mathfrak{B}$ gehört, wenn er unter allen zu ihm Δ-äquivalenten Punkten maximale Höhe hat. Weil $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$ gilt und weil die Höhe eines Punktes bei Abbildungen aus Γ invariant bleibt, ergibt sich so $\bigcup_{G \in \Gamma} G(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{B}$. Ist umgekehrt Z ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{B}$, so kann Z durch eine geeignete Substitution aus Γ jedenfalls in $\mathfrak{S}$ geworfen werden; wegen der Invarianz der Höhe liegt der Bildpunkt von Z dann sogar in $\mathfrak{F}$. Daraus folgt $\mathfrak{B} \subset \bigcup_{G \in \Gamma} G(\mathfrak{F})$, womit (15) und Lemma 2 bewiesen ist.

Wir beweisen nun Satz 1. Haben $\mathfrak{M}$ und $L_1, \ldots, L_p$ die in diesem Satz angegebene Bedeutung, so besitzt offenbar jede Matrix der Form

$$M = GL_k \qquad (G \in \Gamma(\mathfrak{M});\ k = 1, \ldots, p) \tag{17}$$

jeden Punkt von $\mathfrak{M}$ als Fixpunkt. Wir brauchen daher nur noch zu zeigen, daß sich jede Modulmatrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit

$$(AZ + B)(CZ + D)^{-1} = Z \qquad \text{für alle } Z \in \mathfrak{M} \tag{18}$$

in der Form (17) schreiben läßt. Aus (18) folgt für die Imaginärteile

$$(CZ + D)'^{-1} Y (C\overline{Z} + D)^{-1} = Y \qquad \text{für alle } Z \in \mathfrak{M}$$

und durch Determinantenbildung dann (5). Aufgrund von (1) und der Definition von $L_1, \ldots, L_p$ in Satz 1 muß somit für ein geeignetes k und mit einem geeigneten $G \in \Gamma$ die Beziehung $M = GL_k$ gelten. Wegen $M, L_k \in \Delta(\mathfrak{M})$ ist dann auch $G \in \Delta(\mathfrak{M})$ und wegen $G \in \Gamma$ schließlich $G \in \Gamma(\mathfrak{M})$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Zum Beweis von Satz 2 sei Z_0 ein beliebiger Randpunkt von $\mathfrak{B}$. Ferner seien die Punkte $Z_1, \ldots, Z_m$ so definiert wie in den Betrachtungen, die zur Gleichung (4) führten. Schließlich sei

$$M_{k,1}, \ldots, M_{k,p_k} \qquad \left(p_k = \frac{q}{q_k}; \quad k = 0, \ldots, m\right) \tag{19}$$

ein vollständiges Repräsentantensystem für die linksseitigen Nebenklassen von $\Gamma(Z_k)$ in $\Delta(Z_k)$ und M_k $(k = 0, \ldots, m)$ eine feste Modulmatrix, die jeweils Z_0 in Z_k überführt. Die Zahl der Matrizen

$$M_k^{-1} M_{k,1}, \ldots, M_k^{-1} M_{k,p_k} \qquad (k = 0, \ldots, m) \tag{20}$$

ist nach (4) und (19) gleich P. Unter ihnen kommt genau eine vor, die zu $\Gamma(Z_0)$ gehört; wir können annehmen, daß diese die Identität ist, und bezeichnen sie mit L_0. Falls $P \geqq 2$ ist (und das wird sich am Schluß des Beweises herausstellen), bezeichnen wir die übrigen Matrizen in irgendeiner Reihenfolge mit $L_1, \ldots, L_{P-1}$ und beweisen, daß sie die in Satz 2 angegebenen Eigenschaften haben.

Um zu beweisen, daß die Matrizen $L_1, \ldots, L_{P-1}$ durch Z_0 bis auf rechtsseitige Faktoren aus Γ eindeutig bestimmt sind, beachten wir, daß diese Matrizen bei vorgegebenem Z_0 nur abhängen erstens von der Auswahl der Punkte $Z_1, \ldots, Z_m$, zweitens von der Auswahl der Repräsentanten der linksseitigen Nebenklassen von $\Gamma(Z_k)$ in $\Delta(Z_k)$ und drittens von der Wahl der Matrizen M_k. Die Punkte $Z_1, \ldots, Z_m$ sind durch Z_0 nur insofern nicht eindeutig bestimmt, als sie noch durch Γ-äquivalente Punkte ersetzt werden können. Wird Z_k $(k = 1, \ldots, m)$ durch $G_k(Z_k)$ $(G_k \in \Gamma)$ ersetzt, so geht die Gruppe $\Delta(Z_k)$ in die Gruppe $G_k \Delta(Z_k) G_k^{-1}$ und die Matrix M_k in die Matrix $G_k M_k$ über. Die Matrizen $L_1, \ldots, L_{P-1}$ multiplizieren sich also nach (20) nur mit rechtsseitigen Faktoren aus Γ. Dasselbe gilt trivialerweise, wenn das Repräsentantensystem (19) durch ein anderes Repräsentantensystem der linksseitigen Nebenklassen von $\Gamma(Z_k)$ in $\Delta(Z_k)$ ersetzt wird. Wird schließlich für $k = 0, \ldots, m$ die Matrix M_k durch irgendeine andere Modulmatrix K_k mit $K_k(Z_0) = Z_k$ ersetzt, so gilt $M_k K_k^{-1} \in \Delta(Z_k)$. Die analog zu (20) gebildeten Matrizen

$$K_k^{-1} M_{k,\nu} = M_k^{-1}(M_k K_k^{-1} M_{k,\nu}) \qquad (\nu = 1, \ldots, p_k;\ k = 0, \ldots, m)$$

stimmen daher in einer geeigneten Reihenfolge bis auf rechtsseitige Faktoren aus $\Gamma(Z_k)$ mit den Matrizen (20) überein. So folgt, daß die Matrizen $L_1, \ldots, L_{P-1}$ bis auf rechtsseitige Faktoren aus Γ durch Z_0 eindeutig bestimmt sind.

Um nun zu zeigen, daß die Bereiche $L_\varkappa(\mathfrak{B})$ $(\varkappa = 0, \ldots, P-1)$ höchstens Randpunkte gemeinsam haben, genügt es aufgrund von Lemma 2 zu beweisen, daß $L_\lambda^{-1} L_\varkappa \notin \Gamma$ $(\lambda \neq \varkappa)$ ist. Wenn L_λ und $L_\varkappa$ beide ein und denselben Punkt Z_k in Z_0 überführen, folgt dies daraus, daß $M_{k,\nu}^{-1} M_{k,\mu} \notin \Gamma(Z_k)$ $(\nu \neq \mu)$ ist. Führt aber L_λ den Punkt Z_l und $L_\varkappa$ den Punkt Z_k in Z_0 über $(k \neq l)$, so führt $L_\lambda^{-1} L_\varkappa$ den Punkt Z_k in den Punkt Z_l über. Es gilt dann $L_\lambda^{-1} L_\varkappa \notin \Gamma$, weil Z_k und Z_l nicht Γ-äquivalent sind. Damit ist Satz 2a) bewiesen.

Da die Punkte $Z_1, \ldots, Z_m$ sämtlich zu $\mathfrak{B}$ gehören und Δ-äquivalent, aber nicht Γ-äquivalent zu Z_0 sind, folgt aus Lemma 2, daß die Punkte $Z_1, \ldots, Z_m$ sämtlich Randpunkte von $\mathfrak{B}$ sind. Der Punkt Z_0 selbst ist nach Voraussetzung Randpunkt von $\mathfrak{B}$. Jeder Bereich $L_\varkappa(\mathfrak{B})$ $(\varkappa = 0, \ldots, P-1)$ hat dann die Bildpunkte von $Z_0, \ldots, Z_m$ bei $L_\varkappa$ zu Randpunkten. Unter diesen Bildpunkten kommt aber Z_0 vor, weil jede Abbildung $L_\varkappa$ einen der Punkte Z_k in Z_0 überführt. Damit ist Satz 2 b) bewiesen.

Um nun zu zeigen, daß die Bereiche $L_\varkappa(\mathfrak{B})$ $(\varkappa = 0, \ldots, P-1)$ eine volle Umgebung von Z_0 ausfüllen, ergänzen wir das System $L_0, \ldots, L_{P-1}$ zu einem vollständigen Repräsentantensystem $R_1, R_2, \ldots$ der linksseitigen Nebenklassen von Γ in Δ. Weil $\mathfrak{B}$ nach Lemma 2 Fundamentalbereich für das System $R_1, R_2, \ldots$ ist, füllen sicherlich die Bereiche $R_\varkappa(\mathfrak{B})$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ eine volle Umgebung von Z_0 aus. Nun sei $R_\varkappa(\mathfrak{B})$ ein beliebiger dieser Bereiche mit dem Randpunkt Z_0, also $Z_0 \in R_\varkappa(\mathfrak{B})$ oder $R_\varkappa^{-1}(Z_0) \in \mathfrak{B}$. Aufgrund der Definition der Punkte $Z_0, \ldots, Z_m$ muß $R_\varkappa^{-1}(Z_0)$ daher Γ-äquivalent zu einem (übrigens eindeutig bestimmten) Z_l sein, etwa $G R_\varkappa^{-1}(Z_0) = Z_l$ $(G \in \Gamma)$ oder $Z_0 = R_\varkappa G^{-1}(Z_l)$. Weil aber alle Modulsubstitutionen, die Z_l in Z_0 überführen, aus $L_\lambda \Gamma(Z_l)$ mit gewissen L_λ sind und die L_λ unter den Matrizen $R_1, R_2, \ldots$ vorkommen, folgt notwendig $R_\varkappa = L_\lambda$ mit einem geeigneten λ. Damit ist Satz 2c) bewiesen.

Wegen $L_\lambda^{-1} L_\varkappa \notin \Gamma(\lambda \neq \varkappa;\ \lambda, \varkappa = 0, \ldots, P-1)$ und der Zuordnung (1) sind die zweiten Matrizenzeilen von L_λ^{-1} und $L_\varkappa^{-1}$ für $\lambda \neq \varkappa$ nicht assoziiert. Weil L_0 die Identität ist, stellen daher aufgrund von (3) die mit den zweiten Zeilen C, D der Matrizen $L_1^{-1}, \ldots, L_{P-1}^{-1}$ gebildeten Gleichungen $\operatorname{abs}(CZ + D) = 1$ wirklich $(n^2 + n - 1)$-dimensionale Flächen dar, die paarweise voneinander verschieden sind. Wir setzen nun

$$L_\varkappa^{-1} = \begin{pmatrix} A_\varkappa & B_\varkappa \\ C_\varkappa & D_\varkappa \end{pmatrix} \qquad (\varkappa = 0, \ldots, P-1)$$

und behaupten

$$\operatorname{abs}(C_\varkappa Z_0 + D_\varkappa) = 1 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, P-1)\,. \tag{21}$$

Jede der Abbildungen $L_\varkappa^{-1}$ $(\varkappa = 1, \ldots, P-1)$ führt Z_0 in einen der Punkte $Z_0, \ldots, Z_m$ über, etwa

$$(A_\varkappa Z_0 + B_\varkappa)(C_\varkappa Z_0 + D_\varkappa)^{-1} = Z_k\,.$$

Hieraus folgt mit $Z_0 = X_0 + i\,Y_0$ und $Z_k = X_k + i\,Y_k$ für die Höhen die Beziehung

$$\det Y_k = \det Y_0 \operatorname{abs}(C_\varkappa Z_0 + D_\varkappa)^{-2}\,. \tag{22}$$

Weil Z_0 und Z_k beide zu $\mathfrak{B}$ gehören, müssen aufgrund von (15) beide Punkte unter den zu ihnen Δ-äquivalenten Punkten maximale Höhe haben. Da aber Z_0 und Z_k auch untereinander Δ-äquivalent sind, muß $\det Y_0 = \det Y_k$ sein. Mit (22) folgt so (21).

Jetzt sei C, D ein beliebiges teilerfremdes symmetrisches Paar mit

$$\text{abs}(CZ_0 + D) = 1 \qquad (C, D \notin \{0, E\}). \tag{23}$$

Wir müssen dann zeigen, daß C, D für ein geeignetes $\varkappa = 1, \ldots, P-1$ zu $C_\varkappa, D_\varkappa$ assoziiert ist. Dazu ergänzen wir C, D auf irgendeine Weise zu einer Modulmatrix $L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Der Punkt $L(Z_0)$ besitzt aufgrund von (23) die gleiche Höhe wie Z_0 selbst, gehört also wie Z_0 ebenfalls zu $\mathfrak{B}$. Damit wird $L(Z_0)$ dann Γ-äquivalent zu genau einem der Punkte $Z_0, \ldots, Z_m$, etwa zu Z_k. Es gibt also ein $G \in \Gamma$ mit $GL(Z_0) = Z_k$. Da aber alle Abbildungen, die Z_0 in Z_k überführen, aus $\Gamma(Z_k)\, L_\varkappa^{-1}$ mit gewissen $L_\varkappa$ sind, folgt tatsächlich, daß die zweite Zeile C, D von L für ein geeignetes $\varkappa$ zu $C_\varkappa, D_\varkappa$ assoziiert ist. Dieses $\varkappa$ kann wegen $C, D \notin \{0, E\}$ nicht gleich Null sein. Damit ist Satz 2d) bewiesen. Beachten wir schließlich noch, daß Z_0 nach Voraussetzung Randpunkt von $\mathfrak{B}$ ist, also auf mindestens einer der Flächen (2) liegt, so folgt, daß es mindestens ein Paar $C_\varkappa, D_\varkappa (1 \leq \varkappa \leq P-1)$ geben muß, d. h. daß $P \geq 2$ sein muß. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

§ 3. Bestimmung der Fixpunktuntergruppen im Falle $n = 2$

Wir untersuchen zuerst die Gruppen $\Gamma(Z)$. Bevor wir diese Gruppen für Γ-reduzierte Punkte Z bestimmen, beweisen wir einen Hilfssatz über diese Gruppen.

Lemma 3: *Die in einer endlichen Gruppe Γ_0 von ganzen Modulmatrizen (4) auftretenden unimodularen Matrizen U bilden für sich eine endliche Gruppe, die zu Γ_0 isomorph ist, wobei natürlich zwei unimodulare Matrizen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, identifiziert werden müssen.*

Beweis: Die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} U & SU'^{-1} \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} \to U \tag{24}$$

ist offensichtlich eine homomorphe Abbildung von Γ auf die Gruppe der unimodularen Matrizen. Das Bild einer endlichen Untergruppe Γ_0 von Γ bei (24) ist also ebenfalls eine endliche Gruppe. Aus der Voraussetzung

$$G_k = \begin{pmatrix} U & S_k U'^{-1} \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_0 \qquad (k = 1, 2)$$

folgt dann

$$G_1^{-1} G_2 = \begin{pmatrix} E & U^{-1}(S_2 - S_1)\, U'^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \Gamma_0 .$$

Wäre $S_2 - S_1 \neq 0$, so hätte $G_1^{-1} G_2$ unendlich hohe Ordnung, was im Widerspruch dazu steht, daß Γ_0 eine endliche Gruppe sein sollte. Also ist die Einschränkung der Abbildung (24) auf eine endliche Untergruppe Γ_0 von Γ ein Isomorphismus, womit Lemma 3 bewiesen ist.

Aus dem soeben bewiesenen Lemma 3 und aus Lemma 1 folgt nun, daß jede Gruppe $\Gamma(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{G}$ isomorph ist zu einer Untergruppe einer der fünf Gruppen $\Gamma_1^{(2)}$, $\Gamma_2^{(2)}$, $\Gamma_3^{(2)}$, $\Gamma^{(4)}$, $\Gamma^{(6)}$ (vgl. (39) bis (43)). Die ersten drei dieser Gruppen besitzen keine echten Untergruppen. Die Gruppe $\Gamma^{(6)}$ besitzt außer $\Gamma_2^{(2)}$ und $\Gamma_3^{(2)}$ noch die Untergruppen

$$\Gamma_4^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}, \quad \Gamma^{(3)} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Die Gruppe $\Gamma^{(4)}$ besitzt außer $\Gamma_1^{(2)}$ und $\Gamma_2^{(2)}$ noch die Untergruppe

$$\Gamma_5^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Diese Behauptungen verifiziert man leicht, indem man z. B. zu jeder Gruppe die Gruppentafel aufstellt. Aus der Fixpunktgleichung (37) ergibt sich, daß für jedes Z, für das die Matrizen $Z - UZU'$ $(U \in \Gamma^{(3)})$ reelle und ganzzahlige Elemente besitzen, sogar alle Matrizen $Z - UZU'$ $(U \in \Gamma^{(6)})$ reell und ganzzahlig sind. Ebenso sind für jedes Z, für das die Matrizen $Z - UZU'$ $(U \in \Gamma_5^{(2)})$ reell und ganzzahlig sind, sogar alle Matrizen $Z - UZU'$ $(U \in \Gamma^{(4)})$ reell und ganzzahlig. Hieraus ergibt sich erstens, daß jede Gruppe $\Gamma(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{G}$ im Sinne von Lemma 3 isomorph ist zu einer der sechs Gruppen $\Gamma_k^{(2)}$ $(k = 1, \ldots, 4)$, $\Gamma^{(4)}, \Gamma^{(6)}$. Zweitens erkennt man, daß man bereits alle Fixpunkte ganzer Modulsubstitutionen erhält, wenn man in der Fixpunktgleichung (37) für U nacheinander Erzeugende der sechs Gruppen $\Gamma_k^{(2)}$ $(k = 1, \ldots, 5)$, $\Gamma^{(3)}$ einsetzt. Dieses wurde in § 3 von [2] durchgeführt, und zwar ergab sich für $U \in \Gamma_1^{(2)}$ die Fixpunktmannigfaltigkeit in Satz 3a), für $U \in \Gamma_2^{(2)}$ die Fixpunktmannigfaltigkeit in Satz 3b), für $U \in \Gamma_3^{(2)}$ die Fixpunktmannigfaltigkeit in Satz 3c), für $U \in \Gamma_4^{(2)}$ die Fixpunktmannigfaltigkeit in Satz 3d), für $U \in \Gamma_2^{(5)}$ die Fixpunktmannigfaltigkeit in Satz 4a) und schließlich für $U \in \Gamma^{(3)}$ die Fixpunktmannigfaltigkeit in Satz 4b). Indem nun für jede dieser Mannigfaltigkeiten und die entsprechenden Matrizen $U \in \Gamma_k^{(2)}$ $(k = 1, \ldots, 4)$, $\Gamma^{(4)}$, $\Gamma^{(6)}$ die ganzzahligen Matrizen $S = Z - UZU'$ ausgerechnet werden, erhalten wir die folgenden sechs Aussagen:

Jeder Punkt der Mannigfaltigkeit in Satz 3a) ist Fixpunkt bei der Gruppe

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\varepsilon\\ 0 & -1 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{25}$$

Jeder Punkt der Mannigfaltigkeit in Satz 3b) ist Fixpunkt bei der Gruppe

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \varepsilon\\ 1 & 0 & -\varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{26}$$

Jeder Punkt der Mannigfaltigkeit in Satz 3c) ist Fixpunkt bei der Gruppe

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\varepsilon\\ 1 & -1 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{27}$$

Jeder Punkt der Mannigfaltigkeit in Satz $\underline{3}$d) ist Fixpunkt bei der Gruppe

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{28}
$$

Jeder Punkt der Mannigfaltigkeit in Satz $\underline{4}$a) ist Fixpunkt bei der Gruppe

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\varepsilon \\ 0 & -1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 & -1 & \varepsilon & -\varepsilon \\ 1 & 0 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}
$$

Jeder Punkt der Mannigfaltigkeit in Satz $\underline{4}$b) ist Fixpunkt bei der Gruppe

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \varepsilon-\varepsilon \\ 1 & -1 & \varepsilon-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 & -1 & \varepsilon-\varepsilon & -\varepsilon \\ 1 & -1 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} -1 & 1 & \varepsilon-\varepsilon & \varepsilon \\ -1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{30}
$$

Diese Ergebnisse besagen, daß die Gruppen (25) bis (30) für jeden Punkt Z der entsprechenden Mannigfaltigkeit in Satz $\underline{3}$ bzw. Satz $\underline{4}$ in $\Gamma(Z)$ enthalten sind. Da wir aber wissen, daß für einen Punkt $Z \in \mathfrak{S}$ die Gruppe $\Gamma(Z)$ mit einer der sechs Gruppen (25) bis (30) übereinstimmen muß, ergibt sich, daß für die reduzierten Punkte der Mannigfaltigkeit in Satz $\underline{4}$a) die Gruppe $\Gamma(Z)$ mit (29) übereinstimmt, und daß für die reduzierten Punkte der Mannigfaltigkeit in Satz $\underline{4}$b) die Gruppe $\Gamma(Z)$ mit (30) übereinstimmt. Für die reduzierten Punkte der Mannigfaltigkeiten in Satz $\underline{3}$ kann $\Gamma(Z)$ umfassender als die Gruppen (25) bis (28) sein. Ist das der Fall, so muß $\Gamma(Z)$ mit einer der Gruppen (29) oder (30) übereinstimmen, was dann und nur dann der Fall ist, wenn Z auf einer der Mannigfaltigkeiten in Satz $\underline{4}$ liegt. Diese Ergebnisse formulieren wir in einem zusammenfassenden Hilfssatz:

Lemma 4: ***Für einen Punkt $Z \in \mathfrak{S}$, der auf der Mannigfaltigkeit in Satz $\underline{3}$a), c) bzw. d) liegt und den drei Bedingungen***

$$
z_1 \neq z_2 + \varepsilon \qquad (\varepsilon = -1, 0, 1) \tag{31}
$$

genügt, stimmt $\Gamma(Z)$ mit der Gruppe (25), (27) bzw. (28) überein. Für einen Punkt $Z \in \mathfrak{S}$, der auf der Mannigfaltigkeit in Satz $\underline{3}$b) liegt und den sechs Bedingungen

$$
z_3 \neq \frac{\varepsilon}{2}, \quad z_3 \neq \frac{1}{2}\left(z + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad (\varepsilon = -1, 0, 1) \tag{32}
$$

genügt, stimmt $\Gamma(Z)$ mit der Gruppe (26) überein; das in (32) auftretende ε muß dabei mit dem ε in Satz $\underline{3}$b) übereinstimmen. Diejenigen Punkte $Z \in \mathfrak{S}$, die auf einer der Mannigfaltigkeiten in Satz $\underline{3}$ liegen, aber den Bedingungen (31) bzw. (32) nicht genügen, liegen auf einer der Mannigfaltigkeiten in Satz $\underline{4}$. Für die Punkte

$Z \in \mathfrak{S}$ der Mannigfaltigkeit Satz $\underline{4}$a) ist $\Gamma(Z)$ die Gruppe (29) *und für die Punkte $Z \in \mathfrak{S}$ der Mannigfaltigkeit Satz $\underline{4}$b) die Gruppe* (30).

Wir wenden uns nun der Bestimmung derjenigen Fixpunktuntergruppen $\Delta(Z)$ zu, die nicht ganze Modulsubstitutionen enthalten. Es genügt offenbar, die Gruppen Δ-reduzierter Punkte zu bestimmen. Wenn Z reduziert ist und $\Delta(Z)$ nicht ganze Modulsubstitutionen enthält, so muß Z auf einer der Mannigfaltigkeiten in Satz $\underline{5}$ bis Satz $\underline{7}$ liegen. Für die reduzierten Punkte dieser Mannigfaltigkeiten soll jetzt $\Delta(Z)$ mit Hilfe von Satz 1 ermittelt werden. Um Satz 1 leichter anwenden zu können, geben wir zunächst diejenigen Flächen (2) an, auf denen reduzierte Punkte liegen können. In [3] wird gezeigt, daß jedes teilerfremde symmetrische Paar C, D mit Rang $C = 1$ im Falle $n = 2$ zu einem Paar der Form

$$(33)\qquad \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V, \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V'^{-1} \quad \left((c, d) = 1,\ V = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{ unimodular}\right)$$

assoziiert ist (vgl. auch (12)), und daß die zugehörige Fläche

$$(34)\qquad \operatorname{abs}(CZ + D) = |c(z_1 p^2 + z_2 q^2 + 2 z_3 pq) + d| = 1$$

(man beachte ($\underline{34}$)) höchstens dann reduzierte Punkte enthält, wenn eine der folgenden Bedingungen

$$(35)\qquad c = 1,\ p = 1,\ q = 0,\ -1 \leq d \leq 1,$$

$$(36)\qquad c = 1,\ p = 0,\ q = 1,\ -1 \leq d \leq 1,$$

$$(37)\qquad c = 1,\ p = 1,\ q = -1,\ -2 \leq d \leq 2$$

erfüllt ist. Wir erhalten eine Modulmatrix, deren zweite Matrizenzeile mit dem Paar (33) übereinstimmt, wenn wir zunächst zu dem teilerfremden Zahlenpaar c, d ein weiteres Zahlenpaar a, b mit $ad - bc = 1$ bestimmen und dann die Matrix

$$(38)\qquad \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V'^{-1} \end{pmatrix}$$

bilden. In den Fällen (35) bis (37) erhalten wir für die Flächen (34) und die zugehörigen Matrizen (38) die Ausdrücke

$$(39)\qquad |z_1 + d| = 1, \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (|d| \leq 1),$$

$$(40)\qquad |z_2 + d| = 1, \quad L_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (|d| \leq 1),$$

$$(41)\qquad |z_1 + z_2 - 2z_3 + d| = 1, \quad K_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (|d| \leq 2).$$

Die Flächen (2) mit nicht ausgeartetem C enthalten, wie in [3] gezeigt wird, höchstens dann reduzierte Punkte, wenn C, D zu einem Paar der Form E, T assoziiert ist, wobei

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_3 & t_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |t_k| \leqq 1 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

gilt. Für die Flächen dieser Art und für eine Modulmatrix, deren zweite Zeile mit E, T übereinstimmt, erhalten wir

$$\text{(42)} \qquad \operatorname{abs}(Z + T) = 1\,, \qquad M_T = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & T \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun für die reduzierten Punkte der in Satz 5 bis Satz 7 angegebenen Fixpunktmannigfaltigkeiten die Gruppen $\Delta(Z)$. Wir werden hierzu mit Hilfe von Lemma 4 und Satz 1 für jeden Punkt die Gruppe $\Gamma(Z)$ und ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von $\Gamma(Z)$ in $\Delta(Z)$ angeben. Dabei braucht von zwei Γ-äquivalenten Punkten offenbar stets nur einer betrachtet zu werden. Die vier Punkte in Satz 5a) sind Γ-äquivalent. Wir untersuchen daher nur die Gruppe des ersten Punktes.

Lemma 5: *Für den Punkt* $Z_1 = \begin{pmatrix} \omega & \omega + \omega^{-2} \\ \omega + \omega^{-2} & -\omega^{-1} \end{pmatrix} \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{6}}\right)$ *besteht* $\Gamma(Z_1)$ *nur aus der Identität. Die Gruppe* $\Delta(Z_1)$ *besteht aus den fünf Matrizen*

$$\text{(43)} \qquad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Die Behauptung über $\Gamma(Z_1)$ ergibt sich daraus, daß Z_1 auf keiner der Mannigfaltigkeiten in Satz 3 und Satz 4 liegt. Von den Flächen (2) enthalten genau

$$\text{(44)} \qquad |z_1| = 1,\ |z_2| = 1,\ \operatorname{abs}(Z + T) = 1\,, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den Punkt Z_1. Die ersten beiden dieser Flächen führen nach (39) und (40) auf die Matrizen M_0 und L_0, die letzten beiden nach (42) auf die Matrizen M_T mit den in (44) angegebenen Werten von T. Die vier Punkte $M_0(Z_1)$, $L_0(Z_1)$ und $M_T(Z_1)$ mit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind sämtlich Γ-äquivalent zu Z_1; sie gehen nämlich bei der ganzen Modulsubstitution

$$\text{(45)} \qquad G = \begin{pmatrix} U & S\,U'^{-1} \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix}$$

in Z_1 über, wenn nacheinander $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ gewählt wird. Die Produkte aus M_0, L_0, M_T und (45) liefern dabei die in (43) angegebenen Matrizen. Nach Satz 1 ist damit Lemma 5 bewiesen.

Lemma 6: *Die beiden in Satz* 5b) *angegebenen Punkte*

$$Z^{(e)} = \begin{pmatrix} -e\eta^{-e} & \frac{1}{2}(-e\eta^{-e}+e) \\ \frac{1}{2}(-e\eta^{-e}+e) & -e\eta^{-e} \end{pmatrix} \quad \left(\eta = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} i\sqrt{2}\,;\ e = \pm 1\right)$$

sind Δ-äquivalent, aber nicht Γ-äquivalent.

Beweis: Die Δ-Äquivalenz wird sich im Beweis von Lemma 7 ergeben. Gäbe es nun eine ganze Modulsubstitution (45) mit

$$Z^{(-1)} = U Z^{(1)} U' + S\,, \tag{46}$$

so müßte nach Lemma 1 die Bedingung $U \in \Gamma^{(0)}$ (vgl. (43)) erfüllt sein, weil beide Punkte $Z^{(e)}$ den gleichen Imaginärteil $\frac{1}{3}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ besitzen. Man rechnet aber leicht nach, daß für die Realteile $X^{(e)}$ $(e = \pm 1)$ von $Z^{(e)}$ die Matrix $S = X^{(-1)} - U X^{(1)} U'$ für kein $U \in \Gamma^{(0)}$ ganzzahlig ist, was nach (46) aber der Fall sein müßte. Also ergibt sich aus der Γ-Äquivalenz der beiden Punkte $Z^{(e)}$ ein Widerspruch. Damit ist Lemma 6 bewiesen.

Lemma 7: *Die Gruppe $\Gamma(Z^{(e)})$ $(e = \pm 1)$ stimmt mit der Gruppe* (30) *für $\varepsilon = 0$ überein (das in* (30) *verwendete e muß dabei mit dem e in $Z^{(e)}$ übereinstimmen). Ein vollständiges Repräsentantensystem für die rechtsseitigen Nebenklassen von $\Gamma(Z^{(e)})$ in $\Delta(Z^{(e)})$ ist durch*

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & e & 0 & 1 \\ 1 & 0 & e & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -e & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -e \\ 0 & -1 & e & 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

gegeben. Insbesondere besitzen also beide Gruppen $\Delta(Z^{(e)})$ $(e = \pm 1)$ die Ordnung 24.

Beweis: Der Punkt $Z^{(e)}$ liegt auf der Mannigfaltigkeit Satz 4b) mit $\varepsilon = 0$. Die Behauptung über $\Gamma(Z^{(e)})$ entnimmt man daher aus Lemma 4. Von den Flächen (2) enthalten genau

$$|z_1| = 1\,,\ |z_2| = 1\,,\ |z_1 + z_2 - 2z_3 + e| = 1\,, \tag{48}$$

$$\operatorname{abs}(Z + T) = 1\,, \qquad T = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -e \\ -e & 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

den Punkt $Z^{(e)}$. Die Flächen (48) führen nach (39) bis (41) auf die Matrizen M_0, L_0, K_e und die Flächen (49) nach (42) auf die Matrizen M_T mit den in (49) angegebenen Werten von T. Die Punkte $M_0(Z^{(e)})$, $L_0(Z^{(e)})$, $K_e(Z^{(e)})$ und $M_T(Z^{(e)})$ mit $T = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ sind Γ-äquivalent zu $Z^{(-e)}$. Diese Punkte gehen nämlich bei (45) in $Z^{(-e)}$ über, falls nacheinander $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -e \\ -e & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ gesetzt wird. Hieraus ergibt sich zuerst, daß $Z^{(1)}$ und $Z^{(-1)}$ jedenfalls Δ-äquivalent sind, was noch für den Beweis von Lemma 6 nachzutragen war. Weil ferner die beiden Punkte $Z^{(e)}$ und $Z^{(-e)}$ nach Lemma 6 nicht Γ-äquivalent sind, ergibt sich nach Satz 1, daß die Flächen (48) und die erste der Flächen (49) keine Beiträge zur Gruppe $\Delta(Z^{(e)})$ leisten. Die

Punkte $M_T(Z^{(e)})$ mit $T = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$ dagegen sind Γ-äquivalent zu $Z^{(e)}$. Das ergibt sich, wenn in (45) nacheinander $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ gewählt wird. Die Produkte aus M_T und (45) liefern die Matrizen (47). Nach Satz 1 ist damit Lemma 7 bewiesen.

Lemma 8: *Für den Punkt in Satz 5c) stimmt die Gruppe $\Gamma(iE)$ mit der Gruppe (29) für $e = \varepsilon = 0$ überein. Ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von $\Gamma(iE)$ in $\Delta(iE)$ ist durch*

$$(50) \qquad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Insbesondere besitzt also $\Delta(iE)$ die Ordnung 16.

Beweis: Da der Punkt iE auf der Mannigfaltigkeit in Satz 4a) mit $e = \varepsilon = 0$ liegt, folgt die Behauptung über $\Gamma(iE)$ aus Lemma 4. Von den Flächen (2) enthalten genau $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $\operatorname{abs} Z = 1$ den Punkt iE. Diese drei Flächen führen nach (39), (40) und (42) auf die drei letzten Matrizen in (50). Man rechnet leicht nach, daß iE Fixpunkt bei allen Matrizen (50) ist. Nach Satz 1 ist damit Lemma 8 bewiesen.

Die vier Punkte in Satz 5d) sind Γ-äquivalent. Es genügt daher, nur einen dieser Punkte, etwa ϱE, zu betrachten.

Lemma 9: *Die Gruppe $\Gamma(\varrho E)$ stimmt mit der Gruppe (29) für $e = \varepsilon = 0$ überein. Ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von $\Gamma(\varrho E)$ in $\Delta(\varrho E)$ ist durch*

$$(51) \qquad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -E & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(52) \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Insbesondere besitzt also $\Delta(\varrho E)$ die Ordnung 36.

Beweis: Da der Punkt ϱE auf der Mannigfaltigkeit in Satz 4a) mit $e = \varepsilon = 0$ liegt, folgt die Behauptung über $\Gamma(\varrho E)$ aus Lemma 4. Von den Flächen (2) enthalten genau

$$(53) \qquad |z_1| = 1, \; |z_1 + 1| = 1, \; |z_2| = 1, \; |z_2 + 1| = 1,$$

$$(54) \qquad \operatorname{abs}(Z + T) = 1, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

den Punkt ϱE. Der Punkt $M_T(\varrho E)$ wird für die in (54) angegebenen Werte von T durch die ganze Modulsubstitution (45) mit $U = E$, $S = T - E$ nach ϱE zurückgeworfen. Die Produkte aus M_T und (45) sind in (51) angegeben. Die Flächen (53) führen nach (39) und (40) auf die Matrizen M_0, M_1, L_0, L_1. Die vier Punkte $M_0(\varrho E)$, $M_1(\varrho E)$, $L_0(\varrho E)$, $L_1(\varrho E)$ werden durch die ganze Modulsubstitution (45) nach ϱE zurückgeworfen, falls in jedem Fall $U = E$ und nach-

einander $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gewählt wird. Die Produkte aus M_0, M_1, L_0, L_1 und den zugehörigen Matrizen (45) sind in (52) angegeben. Nach Satz 1 ist damit Lemma 9 bewiesen.

Lemma 10: *Für den in Satz $\underline{5}$e) angegebenen Punkt* $Z_2 = \frac{i}{3}\sqrt{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *stimmt* $\Gamma(Z_2)$ *mit der Gruppe* (30) *für* $e = \varepsilon = 0$ *überein. Ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von* $\Gamma(Z_2)$ *in* $\Delta(Z_2)$ *ist durch*

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{55}$$

gegeben. Insbesondere besitzt also $\Delta(Z_2)$ *die Ordnung* 12.

Beweis: Der Punkt Z_2 liegt auf der Mannigfaltigkeit in Satz $\underline{4}$b) mit $e = \varepsilon = 0$. Die Behauptung über $\Gamma(Z_2)$ ergibt sich daher aus Lemma 4. Von den Flächen (2) enthält nur $\operatorname{abs} Z = 1$ den Punkt Z_2. Für die nach (42) zugehörige Matrix M_T gilt $M_T(Z_2) = -Z_2^{-1}$. Dieser Punkt $-Z_2^{-1}$ wird durch die ganze Modulsubstitution (45) mit $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $S = 0$ nach Z_2 zurückgeworfen. Das Produkt aus M_T und (45) ist in (55) angegeben. Nach Satz 1 ist damit Lemma 10 bewiesen.

Die beiden Punkte in Satz $\underline{5}$f) sind Γ-äquivalent. Es genügt daher, etwa den Punkt $Z_3 = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ zu betrachten.

Lemma 11: *Für den Punkt* $Z_3 = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ *stimmt* $\Gamma(Z_3)$ *mit der Gruppe* (25) *für* $e = 0$ *überein. Ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von* $\Gamma(Z_3)$ *in* $\Delta(Z_3)$ *ist durch*

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{56}$$

gegeben. Insbesondere besitzt also $\Delta(Z_3)$ *die Ordnung* 12.

Beweis: Da der Punkt Z_3 auf der Mannigfaltigkeit Satz $\underline{3}$a) mit $e = 0$ liegt und die Bedingung (31) erfüllt, ergibt sich die Behauptung über $\Gamma(Z_3)$ aus Lemma 4. Von den Flächen (2) enthalten genau

$$|z_2| = 1,\ |z_1| = 1,\ |z_1 + 1| = 1,\ \operatorname{abs}(Z + T) = 1, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{57}$$

den Punkt Z_3. Für die nach (39) bis (42) zugehörigen Matrizen gilt

$$L_0(Z_3) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, M_0(Z_3) = M_{T_1}(Z_3) = \begin{pmatrix} -\varrho^{-1} & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, M_1(Z_3) = M_{T_2}(Z_3) = Z_3, \tag{58}$$

wobei $T_1 = 0$, $T_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ zu setzen ist. Alle Punkte (58) können durch eine ganze Modulsubstitution (45) nach Z_3 zurückgeworfen werden. Man wähle nämlich für den ersten Punkt $U = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ und sonst $U = E$, ferner $S = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ für die Punkte $M_0(Z_3)$ und $M_{T_1}(Z_3)$ und sonst $S = 0$. Die Produkte aus den Matrizen L_0, M_0, M_1, M_T und den zugehörigen ganzen Modulmatrizen (45) sind in (56) angegeben. Nach Satz 1 ist damit Lemma 11 bewiesen.

Definition 1: *Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige der Mannigfaltigkeiten in Satz 6. Die Menge der Punkte von $\mathfrak{M}$, die reduziert sind, aber von den Punkten in Satz 5 verschieden sind, soll mit $\mathfrak{M}^{(0)}$ bezeichnet werden.*

Lemma 12: *Die Mannigfaltigkeit in Satz 6a) mit der Parameterdarstellung*

$$Z = \begin{pmatrix}\varkappa\varrho^{\varkappa} & 0\\ 0 & z\end{pmatrix} \qquad (\varkappa = \pm 1) \tag{59}$$

sei $\mathfrak{M}_\varkappa$. Für jeden Punkt $Z \in \mathfrak{M}_\varkappa^{(0)}$ stimmt $\Gamma(Z)$ mit der Gruppe (25) für $e = 0$ überein. Ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von $\Gamma(Z)$ in $\Delta(Z)$ ist durch

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\varkappa & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & \varkappa & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{60}$$

gegeben. Insbesondere besitzen also sämtliche Gruppen $\Delta(Z)$ $(Z \in \mathfrak{M}_\varkappa^{(0)})$ die Ordnung 6.

Beweis: Da jeder Punkt $Z \in \mathfrak{M}_\varkappa^{(0)}$ auf der Mannigfaltigkeit Satz 3a) mit $e = 0$ liegt und die Bedingung (31) erfüllt, folgt die Behauptung über $\Gamma(Z)$ aus Lemma 4. Die Flächen

$$|z_1| = 1,\ |z_1 + \varkappa| = 1 \tag{61}$$

enthalten sämtliche Punkte aus $\mathfrak{M}_\varkappa^{(0)}$ und die Flächen

$$|z_2| = 1,\ \mathrm{abs}(Z + T) = 1, \qquad T = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varkappa & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{62}$$

diejenigen Punkte (59) von $\mathfrak{M}_\varkappa^{(0)}$, für die $|z| = 1$ ist. Weitere Flächen (2), die Punkte aus $\mathfrak{M}_\varkappa^{(0)}$ enthalten, gibt es nicht. Die Flächen (61) führen nach (39) auf die Matrizen M_0 und $M_\varkappa$. Für jeden Punkt (59) gilt

$$M_0(Z) = \begin{pmatrix}-\varkappa\varrho^{-\varkappa} & 0\\ 0 & z\end{pmatrix},\ M_\varkappa(Z) = Z\,.$$

Beide Punkte $M_0(Z)$ und $M_\varkappa(Z)$ sind Γ-äquivalent zu Z. Für $M_\varkappa(Z)$ ist diese Behauptung trivial. Der Punkt $M_0(Z)$ wird durch die ganze Modulsubstitution (45) nach Z zurückgeworfen, wenn $U = E$ und $S = \begin{pmatrix}-\varkappa & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ gewählt wird. Das Produkt aus M_0 und (45) und die Matrix $M_\varkappa$ sind in (60) angegeben. Die Flächen (62) könnten nach Satz 1 höchstens für solche Punkte $Z \in \mathfrak{M}_\varkappa^{(0)}$ einen Beitrag zur Gruppe $\Delta(Z)$ leisten, für die $|z| = 1$ ist. Für diese Punkte setzen wir $z = e^{i\chi}$. Für die nach (40) und (42) zu den Flächen (62) gehörigen Matrizen L_0

und M_T gelten dann, falls noch

$$Z^* = \begin{pmatrix} \varkappa\varrho^{\varkappa} & 0 \\ 0 & -e^{-i\chi} \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gesetzt wird, die Beziehungen

$$L_0(Z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{T_1}(Z) = Z^* + \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{T_2}(Z) = Z^* .$$

Der Punkt $L_0(Z)$ und die beiden Punkte $M_T(Z)$ sind also Γ-äquivalent zu Z^*. Wir zeigen nun, daß Z^* für jeden Punkt $Z \in \mathfrak{M}_\varkappa^{(0)}$ mit $z = e^{i\chi}$ nicht Γ-äquivalent zu Z ist. Nach Satz 1 leisten dann die Flächen (62) tatsächlich keinen Beitrag zu den Gruppen $\Delta(Z)$. Würde Z bei der ganzen Modulsubstitution (45) in Z^* übergehen, so müßte nach Lemma 1 die Bedingung $U \in \Gamma_1^{(2)}$ gelten, weil beide Punkte Z und Z^* den gleichen Imaginärteil $Y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$ mit $y_1 \neq y_2$ besitzen (vgl. (39)). Nach (45) würde dann die Gleichung

$$S = Z^* - UZU' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\cos\chi \end{pmatrix}$$

folgen. Für keinen Punkt $Z \in \mathfrak{M}_\varkappa^{(0)}$ mit $z = e^{i\chi}$ ist aber $2\cos\chi$ eine ganze Zahl. Nach Satz 1 ist damit Lemma 12 bewiesen.

Für die in Satz 6b) angegebenen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}^{(0)}$ leer.

Lemma 13: *Es sei $\mathfrak{M}_2$ die in Satz 6c) angegebene Mannigfaltigkeit mit der Parameterdarstellung $Z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{M}_3$ die in Satz 6d) angegebene Mannigfaltigkeit mit der Parameterdarstellung $Z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. Für jeden Punkt $Z \in \mathfrak{M}_k^{(0)}$ $(k = 2, 3)$ stimmt $\Gamma(Z)$ mit der Gruppe (25) für $e = 0$ überein. Ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von $\Gamma(Z)$ in $\Delta(Z)$ ist für $Z \in \mathfrak{M}_2^{(0)}$ bzw. $Z \in \mathfrak{M}_3^{(0)}$ durch*

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

gegeben. Insbesondere besitzen sämtliche Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}_k^{(0)} (k = 2, 3)$ die Ordnung 4.

Beweis: Da jeder Punkt $Z \in \mathfrak{M}_k^{(0)} (k = 2, 3)$ auf der Mannigfaltigkeit Satz 3a) mit $e = 0$ liegt und die Bedingung (31) erfüllt, folgt die Behauptung über $\Gamma(Z)$ aus Lemma 4. Die Fläche

$$|z_{k-1}| = 1 \qquad (k = 2, 3) \tag{64}$$

enthält sämtliche Punkte aus $\mathfrak{M}_k^{(0)}$. Die Flächen

$$|z_1| = 1, \ \mathrm{abs}\, Z = 1 \tag{65}$$

enthalten diejenigen Punkte aus $\mathfrak{M}_3^{(0)}$, für die $|z| = 1$ gilt. Weitere Flächen (2), die entweder Punkte aus $\mathfrak{M}_2^{(0)}$ oder $\mathfrak{M}_3^{(0)}$ enthalten, gibt es nicht. Die Fläche (64) führt für $k = 2$ nach (39) auf die Matrix M_0 und für k 3 nach (40) auf die

Matrix L_0. Für jeden Punkt $Z \in \mathfrak{M}_2^{(0)}$ gilt $M_0(Z) = Z$. Für einen Punkt $Z \in \mathfrak{M}_3^{(0)}$ ist $L_0(Z) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ jedenfalls Γ-äquivalent zu Z. Die ganze Modulsubstitution (45) führt nämlich $L_0(Z)$ in Z über, wenn $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $S = 0$ gewählt wird. Die Matrix M_0 und das Produkt aus L_0 und (45) sind in (63) angegeben. Entsprechend wie im Beweis von Lemma 12 erkennt man, daß die Flächen (65) keinen Beitrag zu den Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}_3^{(0)}$ leisten. Nach Satz 1 ist damit Lemma 13 bewiesen.

Im folgenden werden wir wiederholt den folgenden Hilfssatz anwenden, dessen Beweis unmittelbar einsichtig ist.

Lemma 14: *Es seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei der Fixpunktmannigfaltigkeiten in Satz 6, für die es eine ganze Modulsubstitution* (45) *mit der Eigenschaft*

$$(66) \qquad \mathfrak{N}^{(0)} \subset G(\mathfrak{M}^{(0)}) = U\mathfrak{M}^{(0)}U' + S$$

gibt. Besitzen dann alle Punkte $Z \in \mathfrak{M}^{(0)}$ die gleiche Gruppe $\Gamma(Z) = \Gamma_0$ und die gleiche Gruppe $\Delta(Z) = \Delta_0$, so gelten für alle Punkte $Z \in \mathfrak{N}^{(0)}$ die Beziehungen $\Gamma(Z) = G\Gamma_0 G^{-1}$ und $\Delta(Z) = G\Delta_0 G^{-1}$. Für den Nachweis der Bedingung (66) *genügt es dabei nach Definition* 1, *die Bedingung*

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{F} \subset G(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})$$

zu beweisen, weil die in Satz 5 angegebene Punktmenge mit jedem ihrer Punkte auch alle dazu Γ-äquivalenten reduzierten Punkte enthält.

Auf Grund von Lemma 14 wird es genügen, von den acht in Satz 6e) bis h) angegebenen Mannigfaltigkeiten nur die beiden Mannigfaltigkeiten in Satz 6e) auf die Gruppen $\Gamma(Z)$ und $\Delta(Z)$ zu untersuchen.

Lemma 15: *Es sei $\mathfrak{M}_{4,\varepsilon}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ die Mannigfaltigkeit mit der Parameterdarstellung Satz 6e). Für jeden Punkt $Z \in \mathfrak{M}_{4,\varepsilon}^{(0)}$ stimmt $\Gamma(Z)$ mit der Gruppe* (27) *überein (wobei das in* (27) *verwendete ε mit dem ε in $\mathfrak{M}_{4,\varepsilon}^{(0)}$ übereinstimmen muß). Ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von $\Gamma(Z)$ in $\Delta(Z)$ ist durch*

$$(67) \qquad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ \varepsilon & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

gegeben. Insbesondere besitzen also sämtliche Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}_{4,\varepsilon}^{(0)}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ die Ordnung 6.

Beweis: Da jeder Punkt $Z \in \mathfrak{M}_{4,\varepsilon}^{(0)}$ auf der Mannigfaltigkeit Satz 3c) liegt und die Bedingung (31) erfüllt, folgt die Behauptung über $\Gamma(Z)$ aus Lemma 4. Die Flächen

$$(68) \qquad |z_1| = 1, \ \mathrm{abs}(Z + T) = 1, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

enthalten alle Punkte aus $\mathfrak{M}_{4,\varepsilon}^{(0)}$. Weitere Flächen (2), die Punkte aus $\mathfrak{M}_{4,\varepsilon}^{(0)}$ enthalten, gibt es nicht. Die erste der Flächen (68) führt nach (39) auf die Matrix

M_0. Für jeden Punkt aus $\mathfrak{M}_{4,e}^{(0)}$ gilt nun

$$M_0(Z) = \begin{pmatrix} -z^{-1} & \frac{1}{2}(1 + ez^{-1}) \\ \frac{1}{2}(1 + ez^{-1}) & -z^{-1} - e \end{pmatrix}.$$

Dieser Punkt ist Γ-äquivalent zu

$$Z^* = \begin{pmatrix} -z^{-1} & \frac{1}{2}(-z^{-1} - e) \\ \frac{1}{2}(-z^{-1} - e) & -z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Würde jetzt Z^* durch eine ganze Modulsubstitution (45) nach Z zurückgeworfen, so müßte nach Lemma 1 die Beziehung $U \in \Gamma^{(e)}$ gelten, weil Z und Z^* wegen $|z| = 1$ gleiche Imaginärteile von der Form $y\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ besitzen (vgl. (43)). Für kein $U \in \Gamma^{(e)}$ ist aber die Matrix $S = Z - UZ^*U'$ ($Z \in \mathfrak{M}_{4,e}^{(0)}$) ganzzahlig. Nach Satz 1 leistet daher die erste der Flächen (68) keinen Beitrag zur Gruppe $\Delta(Z)$. Für die nach (42) zu den übrigen Flächen (68) gehörigen Matrizen M_T gilt

$$M_T(Z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{4} - \frac{3}{4} z^{-1} \pm \frac{e}{2} & -\frac{1}{2}(z \pm e) \\ -\frac{1}{2}(z \pm e) & z \end{pmatrix},$$

wobei sich das obere Vorzeichen auf $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ und das untere auf $T = \begin{pmatrix} 0 & -e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$ bezieht. Der Punkt $M_T(Z)$ wird durch die ganze Modulsubstitution (45) nach Z zurückgeworfen, wenn $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $S = -T$ gewählt wird. Die Produkte aus M_T und (45) sind in (67) angegeben. Nach Satz 1 ist damit Lemma 15 bewiesen.

Auf Grund von Lemma 14 wird es genügen, von den vier in Satz 6i) und j) angegebenen Mannigfaltigkeiten nur die beiden Mannigfaltigkeiten in Satz 6j) auf die Gruppen $\Gamma(Z)$ und $\Delta(Z)$ zu untersuchen.

Lemma 16: *Es sei $\mathfrak{M}_{5,e}$ ($e = \pm 1$) die Mannigfaltigkeit mit der Parameterdarstellung Satz 6j). Für jeden Punkt $Z \in \mathfrak{M}_{5,e}^{(0)}$ stimmt $\Gamma(Z)$ mit der Gruppe (26) für $\varepsilon = 0$ überein. Ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von $\Gamma(Z)$ in $\Delta(Z)$ ist durch*

$$\text{(69)} \qquad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & e & 0 & 1 \\ 1 & 0 & e & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -e \end{pmatrix}$$

gegeben. Insbesondere besitzen alle Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}_{5,e}^{(0)}$ die Ordnung 6.

Beweis: Da jeder Punkt $Z \in \mathfrak{M}_{5,e}^{(0)}$ auf der Mannigfaltigkeit Satz 3b) mit $\varepsilon = 0$ liegt und die Bedingung (32) erfüllt, folgt die Behauptung über $\Gamma(Z)$ aus Lemma 4 (das in der Bedingung (32) verwendete e hat dabei nichts mit dem e in $\mathfrak{M}_{5,e}^{(0)}$ zu tun; ebenso haben das z in (32) und das z in Satz 6 j) verschiedene Bedeutung). Die Flächen

$$\text{(70)} \qquad \operatorname{abs}(Z + T) = 1, \qquad T = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

enthalten sämtliche Punkte aus $\mathfrak{M}^{(0)}_{5,e}$. Die Flächen

$$(71)\qquad |z_1| = 1,\ |z_2| = 1,\ \operatorname{abs}(Z+T) = 1, \qquad T = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

enthalten diejenigen Punkte aus $\mathfrak{M}^{(0)}_{5,e}$, für die

$$(72)\qquad e x = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,(|z|^2 - 1)$$

gilt. Die Flächc

$$(73)\qquad |z_1 + z_2 - 2z_3 + e| = 1$$

enthält diejenigen Punkte aus $\mathfrak{M}^{(0)}_{5,e}$, für die

$$(74)\qquad |z| = \sqrt{3}$$

gilt. Weitere Flächen (2), die Punkte aus $\mathfrak{M}^{(0)}_{5,e}$ enthalten, gibt es nicht. Für die nach (42) zu den Flächen (70) gehörigen Matrizen M_T und einen Punkt $Z \in \mathfrak{M}^{(0)}_{5,e}$ gilt

$$M_T(Z) = \frac{1}{4}\sqrt{3}\begin{pmatrix} z - z^{-1} & -(z+z^{-1}) \\ -(z+z^{-1}) & z - z^{-1} \end{pmatrix} \mp \frac{e}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

wobei sich das obere Vorzeichen auf $T = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und das untere auf $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ bezieht. Der Punkt $M_T(Z)$ wird durch die ganze Modulsubstitution (45) nach Z zurückgeworfen, wenn $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $S = T - eE$ gewählt wird. Die Produkte aus M_T und (45) sind in (69) angegeben. Die Flächen (71) leisten nach Satz 1 höchstens für diejenigen Punkte $Z \in \mathfrak{M}^{(0)}_{5,e}$ einen Beitrag zu $\Delta(Z)$, für die (72) gilt. Für die zu den Flächen (71) gehörigen Matrizen M_0, L_0, M_T und für einen Punkt $Z \in \mathfrak{M}^{(0)}_{5,e}$ gelten nun unter der Voraussetzung (72) die Gleichungen

$$M_0(Z) = L_0(Z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} M_T(Z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} \overline{Z} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Die drei Punkte $M_0(Z)$, $L_0(Z)$, $M_T(Z)$ sind also Γ-äquivalent zu $-\overline{Z}$. Würde nun $-\overline{Z}$ durch eine ganze Modulsubstitution (45) in Z übergeführt, so müßte nach Lemma 1 die Bedingung $U \in \Gamma_2^{(2)}$ gelten, weil Z und $-\overline{Z}$ gleiche Imaginärteile von der Form $\begin{pmatrix} y & y_3 \\ y_3 & y \end{pmatrix}$ mit $2y_3 \neq 0$, y besitzen (vgl. (40)). Ferner müßte dann für ein $U \in \Gamma_2^{(2)}$ die Matrix $S = Z + U\overline{Z}U'$ ganzzahlig sein. Für jedes $U \in \Gamma_2^{(2)}$ gilt aber unter der Voraussetzung (72) die Beziehung

$$Z + U\overline{Z}U' = Z + \overline{Z} = \frac{e}{4}\begin{pmatrix} (|z| - |z|^{-1})^2 & |z|^2 - |z|^{-2} \\ |z|^2 - |z|^{-2} & (|z| - |z|^{-1})^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Wegen der Reduktionsbedingung $1 \leqq |z| \leqq \sqrt{3}$ (vgl. Satz 6j)) würde also $|z| = 1$ folgen. Für $|z| = 1$ ist aber Z einer der Punkte in Satz 5d). Nach Satz 1 leisten daher die Flächen (71) tatsächlich keinen Beitrag zu den Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}^{(0)}_{5,e}$. Die Fläche (73) könnte höchstens für diejenigen Punkte $Z \in \mathfrak{M}^{(0)}_{5,e}$ einen Beitrag zu $\Delta(Z)$ leisten, für die (74) gilt. Setzen wir $z = \sqrt{3}\,e^{i\chi}$, so wird

$$Z = \frac{1}{2}\cos\chi\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{e}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\sin\chi\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

und für die nach (41) zur Fläche (73) gehörige Matrix K_e gilt

$$Z^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} K_e(Z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cos\chi \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{e}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\sin\chi \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Würde nun Z^* durch eine ganze Modulsubstitution (45) in Z abgebildet, so müßte nach Lemma 1 die Bedingung $U \in \Gamma^{(6)}$ gelten, weil beide Punkte Z und Z^* den gleichen Imaginärteil $\frac{1}{2}\sin\chi\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ besitzen. Ferner müßte dann für eine Matrix $U \in \Gamma^{(6)}$ die Differenz $S = Z - UZ^*U'$ ganzzahlig sein. Daraus würde $\cos\chi = \pm 1$, also $\sin\chi = 0$ folgen. Das ist aber ein Widerspruch, weil der Imaginärteil von Z nicht die Nullmatrix sein kann. Nach Satz 1 liefert die Fläche (73) also auch keinen Beitrag zur Gruppe $\Delta(Z)$ $(Z \in \mathfrak{M}_{5,e}^{(0)})$. Damit ist Lemma 16 bewiesen.

Für die in Satz 6k) angegebenen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}^{(0)}$ leer.

Lemma 17: *Es sei $\mathfrak{M}_6$ die in Satz 6l) angegebene Mannigfaltigkeit. Für jeden Punkt $Z \in \mathfrak{M}_6^{(0)}$ stimmt $\Gamma(Z)$ mit der Gruppe* (25) *für $e = 0$ überein. Ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von $\Gamma(Z)$ in $\Delta(Z)$ ist durch*

(75)
$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Insbesondere besitzen also alle Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}_6^{(0)}$ die Ordnung 4.

Beweis: Da jeder Punkt $Z \in \mathfrak{M}_6^{(0)}$ auf der Mannigfaltigkeit Satz 3a) mit $e = 0$ liegt und die Bedingung (31) erfüllt, folgt die Behauptung über $\Gamma(Z)$ aus Lemma 4. Die Flächen

(76)
$$|z_1| = 1, |z_2| = 1, \operatorname{abs} Z = 1$$

enthalten alle Punkte aus $\mathfrak{M}_6^{(0)}$. Weitere Flächen (2), die Punkte aus $\mathfrak{M}_6^{(0)}$ enthalten, gibt es nicht. Setzen wir $z = e^{i\chi}$, so gelten für die nach (39) und (40) zu den ersten beiden Flächen (76) gehörigen Matrizen M_0 und L_0 die Gleichungen

$$M_0(Z) = -e^{-i\chi}E, \; L_0(Z) = e^{i\chi}E.$$

Würde nun $M_0(Z)$ oder $L_0(Z)$ bei der ganzen Modulsubstitution (45) in Z übergehen, so müßte nach Lemma 1 die Bedingung $U \in \Gamma^{(4)}$ gelten, weil alle drei Punkte Z, $M_0(Z)$, $L_0(Z)$ den gleichen Imaginärteil $\sin\chi E$ besitzen (vgl. (42)). Aus der Ganzzahligkeit von $S = Z - UM_0(Z)U'$ bzw. von $S = Z - UL_0(Z)U'$ für ein $U \in \Gamma^{(4)}$ würde die Ganzzahligkeit von $2\cos\chi$ folgen. Die Werte $\cos\chi = 0, \pm\frac{1}{2}$ führen aber auf Punkte, die in Satz 5c) oder d) angegeben sind. Also leisten die ersten beiden Flächen (76) keine Beiträge zu den Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}_6^{(0)}$. Für die zur letzten Fläche (76) nach (42) gehörige Matrix M_T gilt

$$M_T(Z) = \begin{pmatrix} -z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}.$$

Dieser Punkt wird durch die ganze Modulsubstitution (45) nach Z zurückgeworfen, wenn $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $S = 0$ gewählt wird. Das Produkt aus M_T und (45) ist in (75) angegeben. Nach Satz 1 ist damit Lemma 17 bewiesen.

Auf Grund von Lemma 14 wird es genügen, von den sechs in Satz $\underline{6}$m) und n) angegebenen Mannigfaltigkeiten nur die drei Mannigfaltigkeiten in Satz $\underline{6}$m) auf die Gruppen $\Gamma(Z)$ und $\Delta(Z)$ zu untersuchen.

Lemma 18: *Es sei* $\mathfrak{M}_{7,\varepsilon}$ $(\varepsilon = -1, 0, 1)$ *die Mannigfaltigkeit mit der Parameterdarstellung Satz* $\underline{6}$m). *Für jeden Punkt* $Z \in \mathfrak{M}_{7,\varepsilon}^{(0)}$ *stimmt* $\Gamma(Z)$ *mit der Gruppe* (27) *für* $e = -\varepsilon$ *überein. Ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von* $\Gamma(Z)$ *in* $\Delta(Z)$ *ist durch*

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

gegeben. Insbesondere besitzen also sämtliche Gruppen $\Delta(Z)$ *mit* $Z \in \mathfrak{M}_{7,\varepsilon}^{(0)}$ *die Ordnung 4.*

Beweis: Da jeder Punkt $Z \in \mathfrak{M}_{7,\varepsilon}^{(0)}$ auf der Mannigfaltigkeit Satz $\underline{3}$c) mit $e = -\varepsilon$ liegt und die Bedingung (31) erfüllt, folgt die Behauptung über $\Gamma(Z)$ aus Lemma 4 (das in (31) verwendete ε hat dabei nichts mit dem ε in $\mathfrak{M}_{7,\varepsilon}^{(0)}$ zu tun). Alle Punkte von $\mathfrak{M}_{7,\varepsilon}^{(0)}$ liegen auf der Fläche

$$\operatorname{abs}(Z + T) = 1\,, \qquad T = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{78}$$

Die Punkte $Z \in \mathfrak{M}_{7,\varepsilon}^{(0)}$ mit

$$|z| = 1 \tag{79}$$

liegen auf der Fläche

$$|z_1 - \varepsilon| = 1\,. \tag{80}$$

Für $\varepsilon = 0$ liegt der Punkt $Z \in \mathfrak{M}_{7,0}^{(0)}$ mit

$$z = \frac{\varkappa}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = -\varkappa\varrho^{-\varkappa} \qquad (\varkappa = \pm 1) \tag{81}$$

auf den Flächen

$$|z_1 - \varkappa| = 1, \quad \operatorname{abs}(Z + T) = 1\,, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varkappa \end{pmatrix}. \tag{82}$$

Für $\varepsilon = \pm 1$ liegen die Punkte $Z \in \mathfrak{M}_{7,\varepsilon}^{(0)}$ mit

$$-2\varepsilon x = |z|^2 \tag{83}$$

auf den Flächen

$$|z_1| = 1\,, \quad \operatorname{abs}(Z + T) = 1\,, \qquad T = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{84}$$

Weitere Flächen (2), die Punkte aus $\mathfrak{M}_{7,\varepsilon}^{(0)}$ für einen der Werte $\varepsilon = -1, 0, 1$ enthalten, gibt es nicht. Für die nach (42) zur Fläche (78) gehörige Matrix M_T gilt

$$M_T(Z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{4} - z^{-1} & -\frac{z}{2} \\ -\frac{z}{2} & z \end{pmatrix}$$

Der Punkt $M_T(Z)$ wird offenbar durch die ganze Modulsubstitution (45) nach Z zurückgeworfen, falls $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gewählt wird. Das Produkt aus M_T und (45) ist in (77) angegeben. Für die Behandlung der Fläche (80) beachten wir (79) und setzen $z = e^{i\chi}$. Es wird dann

$$Z = \begin{pmatrix} \cos\chi + \varepsilon & \frac{1}{2}\cos\chi \\ \frac{1}{2}\cos\chi & -\frac{3}{4}\cos\chi \end{pmatrix} + i\sin\chi \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Für die nach (39) zur Fläche (80) gehörige Matrix $M_{-\varepsilon}$ gilt

$$M_{-\varepsilon}(Z) = \begin{pmatrix} -\cos\chi & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\cos\chi \end{pmatrix} + i\sin\chi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Punkte Z und $M_{-\varepsilon}(Z)$ können nicht Γ-äquivalent sein, weil sonst für die unimodulare Matrix U der Substitution (45), die $M_{-\varepsilon}(Z)$ in Z überführt, die Beziehung

$$U U' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

gelten müßte. Dies ist aber wegen der Ganzzahligkeit von U nicht möglich. Nach Satz 1 leistet die Fläche (80) also keinen Beitrag zu den Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}^{(0)}_{7,\varepsilon}$. Die Flächen (82) leisten höchstens für denjenigen Punkt $Z \in \mathfrak{M}^{(0)}_{7,0}$ einen Beitrag zu $\Delta(Z)$, für den (81) gilt. Für die nach (39) und (42) zu den Flächen (82) gehörigen Matrizen $M_{-\varkappa}$ und M_T und für $z = -\varkappa\varrho^{-\varkappa}$ gilt

$$M_{-\varkappa}(Z) = \begin{pmatrix} -\varkappa\varrho^{-\varkappa} & -\frac{1}{2}\varrho^{\varkappa} \\ -\frac{1}{2}\varrho^{\varkappa} & \frac{5}{4}\varkappa\varrho^{\varkappa} \end{pmatrix}, \quad M_T(Z) = \varkappa\varrho^{\varkappa} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Beide Punkte $M_{-\varkappa}(Z)$ und $M_T(Z)$ sind Γ-äquivalent zu dem Punkt

$$Z^* = \varkappa\varrho^{\varkappa} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}. \tag{85}$$

Der Punkt $M_{-\varkappa}(Z)$ geht nämlich bei (45) in Z^* über, wenn $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\varkappa \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} -\varkappa & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gewählt wird, und der Punkt $M_T(Z)$ geht bei (45) in Z^* über, wenn $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $S = 0$ gewählt wird. Der Punkt Z ist ferner Γ-äquivalent zu dem Punkt

$$Z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varkappa \end{pmatrix} = -\varkappa\varrho^{-\varkappa} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}. \tag{86}$$

Würde nun Z^* bei der ganzen Modulsubstitution (45) in den Punkt (86) übergehen, so müßte $U\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}U' = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ gelten, weil beide Punkte (85) und (86) gleiche Imaginärteile von der Form $y\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ haben. Weil der Punkt Z^* proportional zu seinem Imaginärteil ist, wäre dann $UZ^*U' = Z^*$ und somit

$$S = Z + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \varkappa\end{pmatrix} - UZ^*U' = Z + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \varkappa\end{pmatrix} - Z^* = -\varkappa\,(\varrho^{-\varkappa} + \varrho^{\varkappa})\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}.$$

Diese Beziehung widerspricht aber der Ganzzahligkeit von S. Nach Satz 1 leisten die Flächen (82) also keinen Beitrag zu den Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}_{7,0}^{(0)}$. Die Flächen (84) könnten höchstens für solche Punkte $Z \in \mathfrak{M}_{7,\varepsilon}^{(0)}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ einen Beitrag zu $\Delta(Z)$ leisten, für die (83) gilt. Setzen wir $|z| = r$, so erhalten wir unter der Voraussetzung (83) die Beziehung

$$Z^* = Z - \varepsilon E = \left(-\frac{\varepsilon r}{2} + i\sqrt{1 - \frac{1}{4}r^2}\right)\begin{pmatrix}r & \frac{r}{2}\\ \frac{r}{2} & \frac{r}{4} + r^{-1}\end{pmatrix}.$$

Ferner gelten für die nach (39) und (42) zu den Flächen (84) gehörigen Matrizen M_0 und M_T die Gleichungen

$$-\overline{Z}^* = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix} M_0(Z) \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} M_T(Z) \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Beide Punkte $M_0(Z)$ und $M_T(Z)$ sind also Γ-äquivalent zu $-\overline{Z}^*$. Ginge nun der Punkt $-\overline{Z}^*$ bei der ganzen Modulsubstitution (45) in den Punkt Z^* über, so würde ähnlich wie bei der Behandlung der Flächen (82) folgen, daß die Matrix

$$S = Z^* + U\overline{Z}^*U' = Z^* + \overline{Z}^* = -\varepsilon r\begin{pmatrix}r & \frac{r}{2}\\ \frac{r}{2} & \frac{r}{4} + r^{-1}\end{pmatrix}$$

ganzzahlig ist. Das ist aber wegen $1 \leqq r \leqq \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (vgl. die Reduktionsbedingungen in Satz 6m)) nicht möglich. Nach Satz 1 leisten die Flächen (84) also tatsächlich keinen Beitrag zu den Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}_{7,\varepsilon}^{(0)}$ $(\varepsilon = \pm 1)$. Damit ist Lemma 18 bewiesen.

Lemma 19: *Es sei $\mathfrak{M}_{8,\varepsilon}$ $(\varepsilon = -1, 0, 1)$ die Mannigfaltigkeit mit der Parameterdarstellung Satz 6o). Für jeden Punkt $Z \in \mathfrak{M}_{8,\varepsilon}^{(0)}$ stimmt die Gruppe $\Gamma(Z)$ mit der Gruppe (26) für $\varepsilon = 0$ überein (das in (26) verwendete ε hat dabei nichts mit dem ε in $\mathfrak{M}_{8,\varepsilon}^{(0)}$ zu tun). Ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von $\Gamma(Z)$ in $\Delta(Z)$ ist durch*

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -\varepsilon & \varepsilon^2 - 1 & 0\\ \varepsilon & 0 & 0 & 1 - \varepsilon^2\\ 1 & 0 & 0 & -\varepsilon\\ 0 & -1 & \varepsilon & 0\end{pmatrix} \tag{87}$$

gegeben. Insbesondere besitzen also sämtliche Gruppen $\Delta(Z)$ mit $Z \in \mathfrak{M}_{8,\varepsilon}^{(0)}$ die Ordnung 4.

Beweis: Jeder Punkt $Z \in \mathfrak{M}_{8,\varepsilon}^{(0)}$ $(\varepsilon = -1, 0, 1)$ liegt auf derjenigen Mannigfaltigkeit Satz 3b), für die das dort verwendete ε den Wert 0 hat, und erfüllt die Bedingung (32); (dabei hat das in Satz 3 b) und in (32) verwendete z eine andere Bedeutung als das in Satz 6 o) verwendete). Daher folgt die Behauptung über $\Gamma(Z)$ aus Lemma 4. Alle Punkte von $\mathfrak{M}_{8,\varepsilon}^{(0)}$ liegen auf der Fläche

$$\operatorname{abs}(Z + T) = 1\,, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}. \tag{88}$$

Auf den Flächen

$$|z_1| = 1\,, \quad |z_2| = 1 \tag{89}$$

liegen alle Punkte $Z \in \mathfrak{M}_{8,0}^{(0)}$, für die

$$2|x| = |z|^2 - 1 \tag{90}$$

gilt, und alle Punkte $Z \in \mathfrak{M}_{8,\varepsilon}^{(0)}$ $(\varepsilon = \pm 1)$, für die

$$-2\varepsilon x = |z|^2 - 1 \tag{91}$$

gilt. Weitere Flächen (2), die Punkte aus $\mathfrak{M}_{8,\varepsilon}^{(0)}$ enthalten, gibt es nicht. Für die nach (42) zur Fläche (88) gehörige Matrix M_T gilt

$$M_T(Z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z - z^{-1} & -(z + z^{-1}) \\ -(z + z^{-1}) & z - z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $M_T(Z)$ wird durch die ganze Modulsubstitution (45) nach Z zurückgeworfen, falls $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ gewählt wird. Das Produkt aus M_T und (45) ist in (87) angegeben. Für die nach (39) und (40) zu den Flächen (89) gehörigen Matrizen M_0 und L_0 und für einen Punkt $Z \in \mathfrak{M}_{8,\varepsilon}^{(0)}$ mit der Eigenschaft (90) bzw. (91) gelten die Gleichungen

$$M_0(Z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\bar{z}^{-1} - \bar{z}) & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad L_0(Z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\bar{z}^{-1} - \bar{z}) & * \\ * & * \end{pmatrix}. \tag{92}$$

Dabei können sich die Matrizen $M_0(Z)$ und $L_0(Z)$ in den mit $*$ bezeichneten Elementen durchaus unterscheiden. Es sei Z^* einer der beiden Punkte $M_0(Z)$, $L_0(Z)$. Würde dann Z bei der ganzen Modulsubstitution (45) in Z^* übergehen, so müßte insbesondere für die Imaginärteile Y und Y^* von Z und Z^* die Gleichung $U Y U' = Y^*$ gelten. Wird die erste Zeile von U mit $(u v)$ bezeichnet und $|z| = r$ gesetzt, so führt dies nach (92) auf die Gleichung

$$(u^2 + v^2)(r + r^{-1}) + 2uv\,(r - r^{-1}) = r + r^{-1}\,.$$

Wegen $2|uv| \leq u^2 + v^2$ und $r \leq \sqrt{3}$ (vgl. die Reduktionsbedingungen in Satz 6o)) ist diese Gleichung für $u^2 + v^2 \geqq 2$ höchstens mit $r = \sqrt{3}$ verträglich, was auf Punkte führt, die nicht in $\mathfrak{M}_{8,\varepsilon}^{(0)}$ liegen. Also muß $u^2 + v^2 = 1$ und $uv = 0$ sein. Aus der für die Realteile X und X^* von Z und Z^* geltenden Gleichung $U X U' + S = X^*$ folgt dann nach (92) und (90) bzw. (91), daß $(r - r^{-1})^2$ eine gerade ganze Zahl sein muß. Dies ist nur für $r = 1$ der Fall, was wieder auf nicht in $\mathfrak{M}_{8,\varepsilon}^{(0)}$ liegende Punkte führt. Also sind Z und Z^* für $Z \in \mathfrak{M}_{8,\varepsilon}^{(0)}$ nicht Γ-äquivalent. Nach Satz 1 leisten dann die Flächen (89) keinen Beitrag zu den Gruppen $\Delta(Z)$. Damit ist Lemma 19 bewiesen.

Definition 2: *Die in Satz 7 durch (17) definierte Mannigfaltigkeit sei* $\mathfrak{M}_S$. *Mit* $\mathfrak{M}_S^{(0)}$ *bezeichnen wir dann die Gesamtheit der reduzierten Punkte von* $\mathfrak{M}_S$, *die von den in Satz 5 angegebenen Punkten verschieden sind und auf keiner der Mannigfaltigkeiten in Satz 6 liegen.*

Lemma 20: *Für jeden Punkt* $Z \in \mathfrak{M}_S^{(0)}$ *besteht* $\Gamma(Z)$ *nur aus der Identität. Die Gruppe* $\Delta(Z)$ *besteht aus den beiden Matrizen*

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -SC & -SCS-C \\ C & CS \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{93}$$

Beweis: Aus dem Beweis von Lemma 20 geht hervor, daß die Gruppe $\Delta(Z)$ für $Z \in \mathfrak{M}_S$ jedenfalls die beiden Matrizen (93) enthält (vgl. (175)). Ferner beachten wir, daß in den Sätzen 5 bis 7 überhaupt alle reduzierten Fixpunkte nicht ganzer Modulsubstitutionen angegeben sind. Das bedeutet nach Definition 2, daß ein Punkt $Z \in \mathfrak{M}_S^{(0)}$ nur auf solchen Fixpunktmannigfaltigkeiten $\mathfrak{H}(M)$ ($M \in \Delta$, $M \notin \Gamma$) liegen kann, die in Satz 7 angegeben sind. Für diese Mannigfaltigkeiten ist aber, wie aus dem Beweis von Lemma 20 hervorgeht, die Matrix M von der Form

$$M = \pm \begin{pmatrix} -TC & -TCT-C \\ C & CT \end{pmatrix} \quad (T \text{ ganzzahlig symmetrisch}). \tag{94}$$

So ergibt sich also, daß jede nicht ganze Matrix aus $\Delta(Z)$ ($Z \in \mathfrak{M}_S^{(0)}$) von der Form (94) sein muß. Es seien nun

$$M_k = \begin{pmatrix} -T_kC & -T_kCT_k-C \\ C & CT_k \end{pmatrix} \qquad (k = 1, 2)$$

zwei verschiedene in $\Delta(Z)$ enthaltene Matrizen der Form (94). Dann muß auch

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} E - T_1C(T_1-T_2)C & * \\ C(T_1-T_2)C & E + C(T_1-T_2)CT_2 \end{pmatrix} \in \Delta(Z)$$

gelten. Weil M_1 und M_2 verschieden sind, also $T_1 \neq T_2$ gilt, ist $M_1 M_2$ nicht ganz, d. h. auch von der Form (94). Das liefert die Bedingungen

$$C(T_1-T_2)C = \pm C, \quad E + C(T_1-T_2)CT_2 = (E - T_1C(T_1-T_2)C)',$$

die auf den Widerspruch $T_1 = T_2$ führen. Also enthält $\Delta(Z)$ für $Z \in \mathfrak{M}_S^{(0)}$ nur eine Matrix der Form (94), nämlich die in (93) angegebene. Es sei dann (45) eine beliebige in $\Delta(Z)$ enthaltene ganze Modulmatrix. Dann muß auch

$$G \begin{pmatrix} -SC & -SCS-C \\ C & CS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ U'^{-1}C & * \end{pmatrix} \in \Delta(Z) \tag{95}$$

gelten. Wegen $U'^{-1}C \neq 0$ ist die Matrix (95) nicht ganz. Weil aber $\Delta(Z)$ nur die eine in (93) angegebene nicht ganze Matrix enthält, muß (95) bis auf das Vorzeichen mit dieser übereinstimmen. Das bedeutet, daß G die Identität ist. Damit ist Lemma 20 bewiesen.

§ 4. Die Struktur der Fixpunktuntergruppen im Falle $n = 2$

Es wird sich herausstellen, daß die Gruppe $\Delta(Z)$ für einen beliebigen Punkt $Z \in \mathfrak{H}$ zu einer Gruppe zweireihiger unitärer Matrizen isomorph ist. Daher werden wir für die Untersuchung der Struktur der Gruppen $\Delta(Z)$ den folgenden Hilfssatz brauchen.

Lemma 21: *Es sei Φ eine endliche Gruppe zweireihiger unitärer Matrizen und Φ_0 die in Φ enthaltene invariante Untergruppe der Matrizen von der Form $e^{i\sigma}E$ (σ reell; E = zweireihige Einheitsmatrix). Die Faktorgruppe Φ/Φ_0 ist dann entweder zyklisch oder die Gruppe eines regulären Körpers (vgl. die Gleichungen* (6), (7) *und* (8)).

Der Beweis dieses Hilfssatzes ergibt sich unmittelbar aus einem in [4] veröffentlichten Ergebnis. In [4] wird nämlich gezeigt, daß jede endliche Gruppe von linear gebrochenen Transformationen

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \,\text{komplex};\; ad - bc \neq 0) \tag{96}$$

der Riemannschen Zahlenkugel auf sich entweder zyklisch oder die Gruppe eines regulären Körpers ist. Da zwei Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ dann und nur dann dieselbe linear gebrochene Transformation (96) liefern, wenn

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad (\lambda \neq 0 \text{ komplex})$$

gilt, ergibt sich die folgende Aussage: Ist Ω eine endliche Gruppe zweireihiger komplexer Matrizen und Ω_0 die in Ω enthaltene invariante Untergruppe der Matrizen von der Form ωE (ω komplex), so ist die Faktorgruppe Ω/Ω_0 entweder zyklisch oder die Gruppe eines regulären Körpers. Lemma 21 ist ein Spezialfall dieser Aussage, allerdings ein Spezialfall, der mit dieser Aussage äquivalent ist; jede endliche Gruppe Ω ist nämlich konjugiert zu einer unitären Gruppe.

Es sei nun Z ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{H}$. Wird dieser Punkt durch die Inverse G^{-1} der ersten der symplektischen Transformationen (50) in den Punkt iE abgebildet, so geht jede Matrix aus $\Delta(Z)$ nach (51) in eine orthogonale symplektische Matrix über. Aus (52) folgt dann, daß $\Delta(Z)$ zu einer Gruppe Φ zweireihiger unitärer Matrizen konjugiert ist. Genau genommen muß dabei noch beachtet werden, daß $\Delta(Z)$ eigentlich die Faktorgruppe einer Gruppe von Modulmatrizen nach dem aus $\pm E_{2n}$ bestehenden Normalteiler ist. Die Gruppe $\Delta(Z)$ wird dann konjugiert zu der Faktorgruppe von Φ nach dem stets in Φ enthaltenen Normalteiler Θ, der aus den beiden unitären Matrizen $\pm E$ besteht. In den Fällen, in denen die Gruppe Φ_0 der in Φ enthaltenen Matrizen der Form $e^{i\sigma}E$ gleich Θ ist, gilt also $\Delta(Z) \cong \Phi/\Theta = \Phi/\Phi_0$ und $\Delta(Z)$ ist nach Lemma 21 entweder zyklisch oder die Gruppe eines regulären Körpers. In den Fällen, in denen Φ_0 umfassender als Θ ist, werden wir die Gruppe $\Delta(Z) \cong \Phi/\Theta$ aus Φ_0/Θ und aus der mit Hilfe von Lemma 21 ermittelten Gruppe $\Phi/\Phi_0 \cong \Phi/\Theta/\Phi_0/\Theta$ aufbauen. Für den in § 1 erwähnten Normalteiler $\Delta_0(Z)$ von $\Delta(Z)$ wählen wir diejenige Untergruppe von $\Delta(Z)$, die bei dem Isomorphismus $\Delta(Z) \cong \Phi/\Theta$ der Untergruppe Φ_0/Θ von Φ/Θ entspricht. In jedem Fall ist dann nach Lemma 21 die Faktorgruppe $\Delta(Z)/\Delta_0(Z)$ entweder zyklisch oder die Gruppe eines regulären Körpers. Dies war in § 1 behauptet worden. Da die Matrizen aus Φ_0 mit allen Matrizen aus Φ vertauschbar sind, folgt noch, daß $\Delta_0(Z)$ dem Zentrum von $\Delta(Z)$ angehört. Der einfacheren Schreibweise wegen wollen wir auch die Faktorgruppen Φ/Θ und Φ_0/Θ mit Φ und Φ_0 bezeichnen.

Wir werden in jedem Fall wissen müssen, welches Eigenwertpaar ein Element $U \in \Phi$ haben kann. Hierzu formulieren wir den folgenden Hilfssatz, der sich unmittelbar aus den Betrachtungen in den Beweisen von Lemma 5 und Lemma 8 ergibt.

Lemma 22: *Es sei $U \neq \pm E$ ein Element der zu einer Gruppe $\Delta(Z)$ gehörigen unitären Gruppe Φ, ferner $e^{i\sigma}, e^{i\tau}$ das Eigenwertpaar von U und m die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft $U^m = E$. Es gibt dann eine natürliche Zahl k mit $(k, m) = 1$, derart daß entweder das Paar $e^{i\sigma k}, e^{i\tau k}$ oder das Paar $-e^{i\sigma k}, -e^{i\tau k}$ unter den siebzehn Eigenwertpaaren von Lemma 8 vorkommt.*

Bezeichnen wir als Ordnung eines Elementes $U \in \Phi$ die kleinste natürliche Zahl $\bar{m}$ mit der Eigenschaft $U^{\bar{m}} = \pm E$, so ergibt sich aus Lemma 22 insbesondere, daß in Φ nur solche Ordnungen $\neq 1$ auftreten können, wie sie unitäre Matrizen besitzen, deren Eigenwertpaare unter den in Lemma 8 aufgezählten siebzehn Eigenwertpaaren vorkommen.

Zuerst betrachten wir nun den Fall, in dem Φ_0 nur aus der Identität besteht. Dies tritt nach Lemma 8, Lemma 12 und Lemma 22 für alle reduzierten Punkte ein, die von den Punkten in Satz 5c) und d) verschieden sind. Da die Fixpunktuntergruppen der Punkte in Satz 5c) und d) nicht ganze Modulsubstitutionen enthalten (vgl. Lemma 8 und Lemma 9), besteht Φ_0 insbesondere dann nur aus der Identität, wenn für einen reduzierten Punkt Z die Beziehung $\Delta(Z) = \Gamma(Z)$ gilt. Nach Lemma 4 ist $\Delta(Z)$ in diesem Fall eine der Gruppen (25) bis (30). Die Gruppen (25) bis (28) sind zyklische Gruppen der Ordnung 2, weil jede Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist. Die Gruppen (29) und (30) sind nach Lemma 21 entweder zyklische Gruppen oder Diedergruppen. Nun beweisen wir aber, daß die Gruppen (29) und (30) nur Elemente der Ordnungen 1, 2 und 3 enthalten können. Da nämlich eine ganze Modulmatrix (45), deren Fixpunktmannigfaltigkeit $\mathfrak{H}(G)$ nicht leer ist, nur Einheitswurzeln als Eigenwerte hat, besitzen die beiden unimodularen Matrizen U und U'^{-1} in (45) das gleiche charakteristische Polynom. Jeder Primfaktor des charakteristischen Polynoms von (45) ist daher in einer geraden Potenz in diesem Polynom enthalten. Daher können sich ganze Modulmatrizen höchstens in den Fällen VI, VII, VIII, IX und XVII von Lemma 8 ergeben. In den Fällen VI und VII besitzt die Modulmatrix die Ordnung 3, in den anderen Fällen die Ordnung 2. Also können die Gruppen (29) und (30) tatsächlich nicht zyklisch sein. Die Gruppe (29) ist dann notwendig die Diedergruppe der Ordnung 4 und die Gruppe (30) die Diedergruppe der Ordnung 6. Aufgrund von Lemma 4 ist damit Satz 3 bewiesen.

Für die Punkte in Satz 5a) besitzt $\Delta(Z)$ nach Lemma 5 die Ordnung 5, also Primzahlordnung. Die Gruppe $\Delta(Z)$ ist daher zyklisch. Für die Punkte in Satz 5b) besitzt $\Delta(Z)$ nach Lemma 7 die Ordnung 24. Nach Lemma 21 ist also $\Delta(Z)$ entweder zyklisch oder die Diedergruppe der Ordnung 24 oder die Oktaedergruppe. Da unitäre Matrizen der Ordnung 24 nach Lemma 8 und Lemma 22 überhaupt nicht auftreten, kann $\Delta(Z)$ nicht zyklisch sein. Unitäre Matrizen der Ordnung 12 liefert nur der Fall XII in Lemma 8. Nach Lemma 17 ergeben sich aber die Punkte in Satz 5b) nicht als Fixpunkte im Fall XII. Also kann $\Delta(Z)$ nicht die Diedergruppe der Ordnung 24 sein (die Diedergruppe der Ord-

nung 2q enthält nämlich Elemente der Ordnung q), sondern muß die Oktaedergruppe sein. Für den Punkt in Satz 5e) besitzt $\Delta(Z)$ nach Lemma 10 die Ordnung 12. Weil dieser Punkt nicht zum Fall XII von Lemma 8 gehört (vgl. Lemma 17), kann $\Delta(Z)$ nicht zyklisch sein. In $\Delta(Z)$ gibt es aber mindestens ein Element der Ordnung 6, weil der Punkt in Satz 5e) nach Lemma 16 zum Fall X gehört. Da die Tetraedergruppe nur Elemente der Ordnungen 1, 2 und 3 enthält, kann also $\Delta(Z)$ nicht die Tetraedergruppe sein, sondern muß die Diedergruppe der Ordnung 12 sein. Für die Punkte in Satz 5f) besitzt $\Delta(Z)$ nach Lemma 11 die Ordnung 12. Da die Punkte in Satz 5f) außerdem zum Fall XII von Lemma 8 gehören (vgl. Lemma 17), gibt es ein Element der Ordnung 12 in der Gruppe $\Delta(Z)$. Diese Gruppe ist daher zyklisch. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Zum Beweis von Satz 5 beachten wir, daß sich in den Fällen I bis VI, VIII, X bis XII von Lemma 8 nur Fixpunkte aus Satz 5, das sind die isolierten Fixpunkte, ergeben. Ist daher $\mathfrak{M}$ eine Mannigfaltigkeit aus Satz 6, so kahn $\Delta(Z)$ für einen Punkt $Z \in \mathfrak{M}^{(0)}$ (vgl. Definition 1) nur Elemente der Ordnungen 1, 2, 3, 4, 6 enthalten, und zwar Elemente der Ordnung 4 nur in den Fällen XV und XVI und Elemente der Ordnung 6 nur im Falle XIV. Ist also $\mathfrak{M}$ eine der Mannigfaltigkeiten aus Satz 6a) bis d), so muß für einen Punkt $Z \in \mathfrak{M}^{(0)}$ die Gruppe $\Delta(Z)$ nach Lemma 18, Lemma 12 und Lemma 13 zyklisch von der Ordnung 6 bzw. 4 sein. Ist dagegen $\mathfrak{M}$ eine der Mannigfaltigkeiten aus Satz 6e) bis o), so liegt kein Punkt $Z \in \mathfrak{M}^{(0)}$ auf einer der Mannigfaltigkeiten in Satz 6a) bis d). Nach Lemma 18 und Lemma 19 kann daher $\Delta(Z)$ nur Elemente der Ordnungen 1, 2 und 3 enthalten. Nach den Hilfssätzen 14 bis 19 muß daher $\Delta(Z)$ in den Fällen Satz 6e) bis j) die Diedergruppe der Ordnung 6 und in den Fällen Satz 6k) bis o) die Diedergruppe der Ordnung 4 sein. Damit ist Satz 5 bewiesen. Der Satz 6 folgt unmittelbar aus Definition 2 und Lemma 20.

Wir müssen jetzt noch die Fixpunktuntergruppen der Punkte in Satz 5c) und d) untersuchen, für die Φ_0 nicht nur aus der Identität besteht, sondern eine zyklische Gruppe der Ordnung 2 bzw. 3 ist. Daß Φ_0 zyklisch ist, folgt daraus, daß Φ_0 isomorph zu einer endlichen Gruppe komplexer Zahlen vom Betrage 1 ist. Die Behauptung über die Ordnung von Φ_0 ergibt sich daraus, daß nach Lemma 8 und Lemma 22 jede überhaupt mögliche Matrix der Form $e^{i\sigma}E$ entweder die Ordnung 2 oder 3 hat. Es sei in jedem Fall K eine Erzeugende von Φ_0. Es wird sich herausstellen, daß Φ/Φ_0 nicht zyklisch ist. Daher wird Φ/Φ_0 nach Lemma 21 und den Gleichungen (7) und (8) von zwei Elementen $U\Phi_0$ und $V\Phi_0$ erzeugt, die drei definierende Relationen erfüllen. Diese Relationen schreiben wir in der Form

$$R_\varkappa(U\Phi_0, V\Phi_0) = \Phi_0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)\,. \tag{97}$$

Die Gruppe Φ wird dann offenbar von den drei Matrizen U, V, K erzeugt. Die Relationen (97) gehen über in $R_\varkappa(U, V) \in \Phi_0$ oder, anders geschrieben, in

$$R_\varkappa(U, V) = K^{l_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)\,, \tag{98}$$

wobei die $l_\varkappa$ gewisse noch zu bestimmende natürliche Zahlen sind. Ist p die Ordnung von Φ_0 und beachten wir, daß K dem Zentrum von Φ angehört, so

müssen wir außerdem die Relationen

(99) $$UK = KU, \quad VK = KV, \quad K^p = E$$

fordern. Die Relationen (98) und (99) reichen aber auch für die Definition von Φ aus, weil die von U, V, K erzeugte Gruppe unter alleiniger Voraussetzung dieser Relationen die Ordnung pq erhält, falls q die Ordnung von Φ/Φ_0 ist. Also ist Φ genau die Gruppe mit den drei Erzeugenden U, V, K und den Relationen (98) und (99).

Wir behandeln nun zuerst die Gruppe $\Delta(iE)$. Diese besitzt nach Lemma 8 die Ordnung 16. Da iE Fixpunkt im Falle VIII ist (vgl. Lemma 12), besitzt Φ_0 die Ordnung 2. Die Ordnung von Φ/Φ_0 ist daher 8. Da unitäre Matrizen der Ordnungen 8 oder 16 nach Lemma 8 und Lemma 22 überhaupt nicht auftreten, kann Φ/Φ_0 nicht zyklisch sein, sondern muß nach Lemma 21 die Diedergruppe der Ordnung 8 sein. Zur Bestimmung der Zahlen $l_\varkappa$ in (98) beachten wir, daß nach (7) etwa

(100) $$R_1(U, V) = U^2, \quad R_2(U, V) = V^2, \quad R_3(U, V) = (UV)^4$$

gilt. Da die Zahlen $l_\varkappa$ nur bis auf ganzzahlige Vielfache von p bestimmt sind und in dem vorliegenden Fall $p = 2$ ist, können wir annehmen, daß jedes $l_\varkappa$ entweder den Wert 0 oder 1 hat. Wäre $l_3 = 1$, so hätte die Matrix UV die Ordnung 8, was nach Lemma 8 und Lemma 22 nicht möglich ist. Also ist $l_3 = 0$. Zur Bestimmung der Zahlen l_1 und l_2 beachten wir, daß Φ/Φ_0 außer dem Einselement zwei Elemente der Ordnung 4 enthält, nämlich

(101) $$UV\Phi_0 \quad \text{und} \quad VU\Phi_0,$$

und fünf Elemente der Ordnung 2, nämlich

(102) $$(UV)^2\Phi_0 = (VU)^2\Phi_0$$

und

(103) $$U\Phi_0, \quad V\Phi_0, \quad UVU\Phi_0, \quad VUV\Phi_0.$$

Außerdem beachten wir, daß iE Fixpunkt in genau den Fällen III, VIII, IX, XV, XVI, XVII von Lemma 8 ist. Von diesen Fällen liefern nur III, XV und XVI unitäre Matrizen der Ordnung 4. Im Falle III liegt aber das Quadrat der unitären Matrix bereits in Φ_0. Die Nebenklassen (101) können also nur durch die Fälle XV und XVI geliefert werden. In diesen beiden Fällen gehört das Quadrat der unitären Matrix, d. h. die Nebenklasse (102), stets zum Fall XVII. Die beiden Fälle III und IX müssen also Matrizen liefern, die in einer der Nebenklassen (103) liegen. Gehört die unitäre Matrix W zum Fall III, so gilt offenbar $W^2 = K$, gehört sie zum Fall IX, so gilt $W^2 = E$. Es können also nicht alle 8 Matrizen, die in den 4 Nebenklassen (103) liegen, die Eigenschaft haben, daß ihr Quadrat gleich K ist, und auch nicht alle 8 Matrizen die Eigenschaft, daß ihr Quadrat gleich E ist. Dieses Ergebnis werden wir gleich benötigen. Wäre nämlich $l_1 = l_2 = 1$, also $U^2 = V^2 = K$, so würde auch $(UVU)^2 = (VUV)^2 = K$ folgen. Jede der Nebenklassen (103) enthielte also eine Matrix W mit $W^2 = K$. Für die andere in der betreffenden Nebenklasse (103) liegende Matrix WK wäre dann auch $(WK)^2 = K$. Aus der Voraussetzung $l_1 = l_2 = 1$ ergibt sich also,

daß das Quadrat einer jeden Matrix, die in einer der Nebenklassen (103) liegt, gleich K ist, was im Widerspruch zu den obigen Betrachtungen steht. Entsprechend führt die Annahme $l_1 = l_2 = 0$ auf einen Widerspruch. Es muß also eine der beiden Zahlen l_1, l_2 gleich 0, die andere gleich 1 sein. Welche dieser beiden Zahlen gleich 0 und welche gleich 1 ist, ist willkürlich festlegbar, da man den einen Fall in den anderen überführen kann, indem man die Erzeugenden von Φ durch geeignete andere Erzeugende ersetzt. Liegt nämlich etwa der Fall $l_1 = 0$, $l_2 = 1$ vor, gelten also nach (98), (99) und (100) die Relationen

$$U^2 = E,\ V^2 = K,\ (UV)^4 = E,\ K^2 = E,\ UK = KU,\ VK = KV,$$

so vertauschen wir die beiden Erzeugenden U und V miteinander und beachten, daß die Relation $(UV)^4 = E$ mit der Relation $(VU)^4 = E$ äquivalent ist. Dann erhalten wir genau die Relationen (9) in Satz 7. Diese ergeben sich aber auch aus (98), (99) und (100), falls $l_1 = 1$, $l_2 = 0$ angenommen wird. Damit sind die Behauptungen in Satz 7 über die Fixpunktuntergruppe des Punktes in Satz 5c) bewiesen.

Schließlich behandeln wir die Gruppe $\Delta(Z)$ für die Punkte in Satz 5d), etwa für $Z = \varrho E$. Die Gruppe $\Delta(\varrho E)$ besitzt nach Lemma 9 die Ordnung 36. Da ϱE Fixpunkt im Falle VI ist (vgl. Lemma 12), besitzt Φ_0 die Ordnung 3. Die Ordnung von Φ/Φ_0 ist also 12. Da ϱE nicht Fixpunkt in dem einzigen Fall XII ist, der Matrizen der Ordnung 12 liefert (vgl. Lemma 17), und da Matrizen der Ordnung 36 überhaupt nicht auftreten, kann Φ/Φ_0 nicht zyklisch sein. Die Gruppe Φ/Φ_0 enthält aber Elemente der Ordnung 6, weil ϱE nach Lemma 16 zum Fall X gehört und für eine unitäre Matrix W mit dem Eigenwertpaar X die niedrigste in Φ_0 liegende Potenz gerade W^6 ist. Also kann Φ/Φ_0 nicht die Tetraedergruppe sein (diese enthält nämlich nur Elemente der Ordnungen 1, 2, 3), sondern muß nach Lemma 21 die Diedergruppe der Ordnung 12 sein. Nach (7) ist also in (98) etwa

$$R_1(U, V) = U^2,\ R_2(U, V) = V^2,\ R_3(U, V) = (UV)^6. \tag{104}$$

Es muß $(UV)^6 = E$, also $l_3 = 0$ sein, da sonst die Matrix UV die Ordnung 18 hätte, aber nach Lemma 8 und Lemma 22 Matrizen der Ordnung 18 nicht auftreten. Die Erzeugende U bzw. V von Φ kann offenbar noch durch $UK^\varkappa$ bzw. VK^λ mit ganzem $\varkappa$ und λ ersetzt werden. Wir zeigen, daß $\varkappa$ und λ so gewählt werden können, daß $l_1 = l_2 = 0$ wird. Aus

$$U^2 = K^{l_1}, \quad V^2 = K^{l_2}$$

folgt nämlich

$$(UK^\varkappa)^2 = K^{l_1 + 2\varkappa}, \quad (VK^\lambda)^2 = K^{l_2 + 2\lambda}.$$

Die Kongruenzen

$$l_1 + 2\varkappa \equiv 0 \pmod 3, \quad l_2 + 2\lambda \equiv 0 \pmod 3)$$

sind aber bei vorgegebenem l_1, l_2 durch geeignete Wahl von $\varkappa$ und λ lösbar, weil 2 und 3 teilerfremd sind. Also können wir tatsächlich $l_1 = l_2 = 0$ annehmen. Aus (98), (99) und (104) ergeben sich dann die Relationen (10). Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

Literatur

[1] Coxeter, H. S. M., and W. O. J. Moser: Generators and Relations for Discrete Groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. N. F. Heft 14.
[2] Gottschling, E.: Über die Fixpunkte der Siegelschen Modulgruppe. Math. Ann. 143, 111—9 (1961).
[3] Gottschling, E.: Explizite Bestimmung der Randflächen des Fundamentalbereiches der Modulgruppe zweiten Grades. Math. Ann. 138, 103—124 (1959).
[4] Klein, F.: Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Math. Ann. 9, 183—208 (1876).
[5] Satake, I.: The Gauß-Bonnet Theorem for *V*-manifolds. J. Math. Soc. Japan 9, 464—492 (1957).
[6] Siegel, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen *n*-ten Grades. Math. Ann. 116, 617—657 (1939).
[7] Siegel, C. L.: Symplectic Geometry. Am. J. Math. 65, 1—86 (1943).

(Eingegangen am 31. Oktober 1960)

Brauner, H.
Math. Annalen 143, 431—439 (1961)

Die verallgemeinerten Böschungsflächen

Von
H. Brauner in Stuttgart

1. E. Kruppa nennt in der für die analytische Behandlung der Strahlflächen grundlegenden Arbeit [1] jene windschiefen Flächen, die konstanten Drall und konstante konische Krümmung besitzen, „*verallgemeinerte Böschungsflächen*" und beweist für sie unter anderem folgenden Satz: *Umschreibt man einer verallgemeinerten Böschungsfläche berührende Böschungstorsen, so schneiden die Berührkurven, zu denen auch die Striktionslinie gehört, die Erzeugenden in kongruenten Punktreihen* [1, S. 171]. In einer vorangegangenen Mitteilung [2] hat sich der Verfasser ebenfalls mit diesen Flächen beschäftigt; sie werden von gewissen im Dreibein einer Böschungslinie festen Geraden überstrichen, wenn das begleitende Dreibein längs der Böschungslinie variiert. Im Rahmen dieser „Cesàroschen Erzeugung" traten die genannten Flächen auch in der anschließenden Arbeit [3] auf. In [4] wurden diese Flächen dadurch charakterisiert, daß bei ihnen *die Mittelpunkte der oskulierenden Hyperboloide in die Gratpunkte ihrer asymptotischen Torse fallen*; außerdem sind sie die *einzigen konstant gedrallten windschiefen Flächen konstanter mittlerer Affinkrümmung*.

Unter Verwendung der in [4] abgeleiteten einheitlichen Erzeugung der (nicht konoidalen) Strahlflächen konstanten Dralls ist es nun möglich, sämtliche verallgemeinerten Böschungsflächen explizit anzugeben sowie ihre differentialgeometrischen Eigenschaften einheitlich zu diskutieren. Von besonderem Interesse sind naturgemäß die algebraischen Flächen dieser Art; während keine solchen Flächen 3. Grades existieren, gelingt die Angabe aller verallgemeinerten Böschungsflächen 4. Grades. Diese lassen sich unter Zugrundelegung einer pseudoeuklidischen Metrik in einheitlicher Weise charakterisieren.

Verwendet man die vom Verfasser in [3] und [5] vorgenommene Erweiterung des Begriffs Drall auf Mongesche Flächen, so ergeben sich nebenher neue Eigenschaften der Mongeschen Flächen konstanten Dralls. Von diesen Flächen habe ich in [5] nachgewiesen, daß sie mit den Serretschen Flächen (den Mindingschen Biegungsflächen einer Kugel) identisch sind. Die abgeleiteten Formeln stimmen in diesem Sonderfall im wesentlichen mit den von L. Berwald für Serretsche Flächen angegebenen überein [6]. In der Folge werden insbesondere alle Serretschen Flächen 4. Grades bestimmt.

Zu den verallgemeinerten Böschungsflächen können schließlich im Grenzfall verschwindender konischer Krümmung die konoidalen Flächen konstanten Dralls gezählt werden. Alle Flächen dieser Art werden ebenfalls explizit angegeben; sie hängen von einer willkürlichen Funktion ab und sind sämtlich

transzendent. Die unter ihnen vorhandenen Konoide habe ich bereits in [7] besprochen.

2. Sei Φ eine nicht konoidale windschiefe Strahlfläche mit konstantem Drall d und konstanter konischer Krümmung $\varkappa$. Ihr Richtkegel ist ein Drehkegel, dessen Fernkreis c unter Verwendung geeigneter kartesischer Koordinaten $x = x_1 : x_0$, $y = x_2 : x_0$, $z = x_3 : x_0$ die Gleichungen

$$x_0 = 0\,, \quad x_1^2 + x_2^2 - a^2 x_3^2 = 0 \tag{1}$$

und die Parameterdarstellung

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : a(1 - t^2) : 2at : 1 + t^2 \tag{2}$$

besitzt. Dabei gilt für die konstante konische Krümmung $\varkappa = 1 : a$. Speziell für $a^2 = -1$ ist c der (euklidisch) absolute Kegelschnitt und die Erzeugenden von Φ sind sämtlich (euklidisch) isotrop; Φ ist dann eine Mongesche Fläche.

Die asymptotischen Ebenen von Φ umhüllen die asymptotische Torse. Ihre Gratlinie k hat dieselbe konische Krümmung $\varkappa$ wie Φ und ist demnach eine Böschungslinie. In [4] habe ich nun folgende Erzeugung angegeben: *Verschiebt man die Tangenten einer Raumkurve k in den Schmiegebenen um die Strecke $d : \varkappa$ in Richtung der positiven Hauptnormalen — wobei $\varkappa$ die konische Krümmung von k und d eine Konstante ist —, so entsteht eine Strahlfläche von konstantem Drall d mit k als Gratlinie ihrer asymptotischen Torse.* Gibt man k als Funktion eines Parameters t durch den Ortsvektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ vor, so besitzen die Plückerkoordinaten der Strahlfläche Φ folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
p_1 : \ldots : p_6 = (\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}})\,\dot{\mathfrak{x}}^2\dot{x} : (\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}})\,\dot{\mathfrak{x}}^2\dot{y} : (\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}})\,\dot{\mathfrak{x}}^2\dot{z} :&\\
: (\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}})\,\dot{\mathfrak{x}}^2(y\dot{z} - z\dot{y}) + d(\dot{\mathfrak{x}}\times\ddot{\mathfrak{x}})^2\,(\dot{z}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{z}) :&\\
: (\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}})\,\dot{\mathfrak{x}}^2(z\dot{x} - x\dot{z}) + d(\dot{\mathfrak{x}}\times\ddot{\mathfrak{x}})^2\,(\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x}) :&\\
: (\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}})\,\dot{\mathfrak{x}}^2(x\dot{y} - y\dot{x}) + d(\dot{\mathfrak{x}}\times\ddot{\mathfrak{x}})^2\,(\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y})\,.&
\end{aligned} \tag{3}$$

Der Punkt bedeutet dabei Differentiation nach t. Diese Formeln sind nun auf jenen Sonderfall anzuwenden, wo k eine Böschungslinie ist, deren Tangenten den Fernkreis c treffen. Der zunächst noch denkbare Fall, daß die asymptotische Torse von Φ ein Kegel ist und k somit in einen Punkt degeneriert, läßt sich sofort klarstellen. Infolge der obigen, auch für einen asymptotischen Kegel gültigen Erzeugung entsteht nämlich als *einzige verallgemeinerte Böschungsfläche mit asymptotischen Kegel das Drehhyperboloid* (vgl. [4]).

Für die Böschungslinie k verwenden wir jene auf einer willkürlichen Funktion $f(t)$ fußende Parameterdarstellung, die den integralfreien Weierstraßschen Formeln für isotrope Kurven (vgl. etwa [8, S. 139]) nachgebildet ist [9, S. 256]. k wird dabei als Gratlinie der zweimal differenzierbaren Folge von Tangentialebenen des Fernkreises c

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + f(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha : \beta : \gamma = 1 - t^2 : 2t : -a(1 + t^2) \tag{4}$$

ermittelt, und zwar entsteht nach zweimaliger Differentiation von (4) nach t

für die Koordinaten von k:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1-t^2}{4}\ddot{f} + \frac{t}{2}\dot{f} - \frac{1}{2}f \\
y &= \frac{t}{2}\ddot{f} - \frac{1}{2}\dot{f} \qquad (5)\\
z &= \frac{1}{a}\left(\frac{1+t^2}{4}\ddot{f} - \frac{t}{2}\dot{f} + \frac{1}{2}f\right).
\end{aligned}
$$

(5) stellt allerdings nur dann eine Kurve dar, wenn $\dddot{f} \not\equiv 0$ gilt. Für das Folgende soll dabei stets jene Kurve der Gestalt (5) betrachtet werden, die für $t = 0$ durch den Ursprung des Koordinatensystems geht, d. h. wir verwenden die Anfangsbedingungen

$$f(0) = \dot{f}(0) = \ddot{f}(0) = 0\,. \tag{6}$$

Nach (3) erhält man damit die für *alle (nicht konoidalen) verallgemeinerten Böschungsflächen* Φ gültige Darstellung:

$$
\begin{aligned}
p_1 : \ldots : p_6 = a(1-t^2) &: 2at : 1 + t^2 : \\
&: \frac{\dot{f}}{2}(t^2-1) - tf - ad(t^2-1) : \\
&: f - t\dot{f} + 2adt : \qquad (7)\\
&: a\left[\frac{\dot{f}}{2}(t^2+1) - tf - ad(1+t^2)\right].
\end{aligned}
$$

Für $f = 0$ sind die Drehhyperboloide in (7) enthalten; für $d = 0$ ergibt (7) eine Darstellung der Böschungstorse mit der Gratlinie k. Ist speziell $a^2 = -1$, so liegt eine Serretsche Fläche vor; $f(t)$ ist dann analytisch anzunehmen.

Die Fernkurve der Flächen (7) besteht — abgesehen von eventuell vorhandenen Fernerzeugenden — aus dem Fernkreis c. Ist die Fläche daher algebraisch, so muß sie sogar rational sein. Man erhält solche Flächen, wenn man für $f(t)$ eine rational gebrochene oder rational ganze Funktion von t wählt. Genau bei diesen Flächen ist k algebraisch.

Die Torsallinien einer Strahlfläche ergeben sich bekanntlich aus der Bedingung [10, S. 10]

$$\Omega \equiv 2(\dot{p}_1\dot{p}_4 + \dot{p}_2\dot{p}_5 + \dot{p}_3\dot{p}_6) = 0 \tag{8}$$

und dafür errechnet man nach (7)

$$\Omega = 8a^2d\,. \tag{9}$$

Die verallgemeinerten Böschungsflächen besitzen daher stets nur eine einzige Torsallinie ($t = \infty$) mit den Plückerkoordinaten

$$
\begin{aligned}
&-a : 0 : 1 : -ad + \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{f}(t^2-1)-2tf}{t^2} : \\
&: \lim_{t\to\infty}\frac{f-t\dot{f}}{t^2} : a\left(-ad + \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{f}(t^2+1)-2tf}{t^2}\right) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

in der Torsalebene

$$x + az - f(\infty) = 0 \,. \tag{11}$$

Für rationale Flächen vom Grad n liegt eine Torsallinie der Ordnung $2(n - 2)$ vor (vgl. [11, S. 118]).

Ist Φ keine Mongesche Fläche (und damit $a^2 + 1 \neq 0$), so kann man die Richtungsvektoren der Erzeugenden normieren. Unter Verwendung der in der Ebene $x + az = 0$ liegenden Kurve von Φ als Leitkurve und eines weiteren Parameters λ erhält man die Darstellung:

$$\begin{aligned} x &= \frac{t\dot{f} - f}{2} - adt + \lambda \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y &= -\frac{\dot{f}}{2} + ad + \lambda \frac{2t}{1 + t^2} \\ z &= \frac{f - t\dot{f}}{2a} + dt + \frac{\lambda}{a} \,. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Striktionslinie s von Φ ist identisch mit dem wahren Umriß aus dem Achsenfernpunkt $Z_u(0:0:0:1)$ des Richtkegels, da die Zentraltorse aus Φ ein z-paralleler Zylinder ist (vgl. [11, S. 136]). Somit ergibt sich für s:

$$\begin{aligned} x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 4a(1 + t^2) &: 2a(1 + t^2)(t\dot{f} - f) + a\ddot{f}(1 - t^4) - 8a^2dt : \\ &: -2a(1 + t^2)\dot{f} + 2at(1 + t^2)\ddot{f} + 4a^2d(1 - t^2) : \\ &: 2(1 + t^2)(f - t\dot{f}) + (1 + t^2)^2\ddot{f} \,. \end{aligned} \tag{13}$$

s geht durch den einzigen Kuspidalpunkt von Φ und berührt dort die Torsallinie. Da nach einem in 1 zitierten Satz die Punkte der Böschungslinie k die Mittelpunkte der oskulierenden Hyperboloide von Φ sind und diese bei konstant gedrallten Flächen stets auf der Zentralnormalen liegen [4], erhält man die Punkte der Striktionslinie s auch, wenn man die Punkte von k in Richtung der positiven Hauptnormalen von k um die konstante Strecke ad verschiebt.

3. Faßt man den Fernkreis c als absolutes Gebilde einer pseudoeuklidischen (bzw. für $a^2 = -1$ euklidischen) Raummetrik auf — die im folgenden kurz „*c-Metrik*" heißen soll —, so besitzen die verallgemeinerten Böschungsflächen c-isotrope Erzeugenden und k ist eine c-isotrope Kurve. Eine durch c gehende nichtsinguläre Quadrik heiße eine „*c-Kugel*". Die c-Kugeln sind mit den Drehhyperboloiden durch den Fernkreis c identisch. Als Radius r einer c-Kugel wird der Radius ihres Kehlkreises verstanden (vgl. [9, S. 64]); für den Betrag des Dralls ihrer Erzeugenden berechnet man den Wert $r : a$.

Eine „*c-Rohrfläche*" sei das Hüllgebilde einer einparametrigen Schar von c-Kugeln mit konstantem Radius. Die Charakteristiken einer c-Rohrfläche liegen in c-normalen Ebenen zur Mittenkurve. Ist speziell die Mittenkurve c-isotrop, so fällt die Ebene der Charakteristik stets in die Schmiegebene der Mittenkurve; diese enthält je zwei parallele c-isotrope Erzeugenden der c-Kugel, deren Entfernung gleich dem Durchmesser der c-Kugel ist. *Die c-Rohrflächen mit isotroper Mittenkurve sind somit windschiefe c-Flächen* (vgl. [9, S. 384]); das vollständige Hüllgebilde besteht allerdings aus zwei c-Flächen.

Ist nun eine c-Fläche konstant gedrallt, so ist nach der in 2 zitierten Erzeugung der Abstand ihrer Erzeugenden von den Punkten der c-Kurve k konstant gleich $d : \varkappa = ad$. Faßt man daher die Punkte der c-Kurve k als Mitten von c-Kugeln vom konstanten Radius ad auf, so enthält jede solche c-Kugel Ψ eine Erzeugende e von Φ und berührt Φ sogar längs e, da Ψ und Φ längs e dieselbe asymptotische Ebene, denselben Striktionspunkt und dieselbe Zentralebene aber auch denselben Drall besitzen. Es gilt somit zusammenfassend:

Die verallgemeinerten Böschungsflächen sind identisch mit den c-Kugeln und den c-Rohrflächen mit c-isotroper Mittenkurve.

Speziell für $a^2 = -1$ wird die Metrik euklidisch und (7) ist eine Parameterdarstellung der Serretschen Flächen. Die Darstellung stimmt im wesentlichen mit der von L. Berwald [6, S. 176] für solche Flächen angegebenen überein (vgl. auch [16], [17]).

4. Nun bleibt der Sonderfall $\varkappa = 0$ zu behandeln. Φ ist dann eine konoidale Strahlfläche und wir wollen ihre Richtebene durch die Ferngerade der xy-Ebene legen. Die konoidalen Flächen hängen von zwei willkürlichen Funktionen ab; wählen wir die z-Koordinate ihrer Erzeugenden als Parameter, so lauten ihre Plückerkoordinaten:

$$p_1 : \ldots : p_6 = 1 : g(z) : 0 : -z g(z) : z : f(z) . \tag{14}$$

Den Drall einer durch Plückerkoordinaten p_i gegebenen Strahlfläche berechnet man nach der Formel (vgl. [2]):

$$d = \frac{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(\dot p_1 \dot p_4 + \dot p_2 \dot p_5 + \dot p_3 \dot p_6)}{(p_1 \dot p_2 - p_2 \dot p_1)^2 + (p_2 \dot p_3 - p_3 \dot p_2)^2 + (p_3 \dot p_1 - p_1 \dot p_3)^2} . \tag{15}$$

Ist d konstant, so kann (15) für eine konoidale Fläche (14) integriert werden und man erhält unter Verwendung geeigneter Anfangsbedingungen

$$g(z) = \operatorname{tg} \frac{z}{d} , \; f(0) = 0 . \tag{16}$$

Damit ergibt sich eine Parameterdarstellung *aller konoidalen Flächen konstanten Dralls*[1]) in der Form:

$$p_1 : \ldots : p_6 = 1 : \operatorname{tg} \frac{z}{d} : 0 : -z \operatorname{tg} \frac{z}{d} : z : f(z) \tag{17}$$

und daraus folgt als Gleichung:

$$y - x \operatorname{tg} \frac{z}{d} + f(z) = 0 . \tag{18}$$

Sämtliche Flächen (18) sind transzendent; speziell für $f = 0$ liegt eine (euklidische) Wendelfläche vor, für $f = Cz \operatorname{tg} \frac{z}{d}$ (C konstant) eine Wendelfläche einer solchen pseudoeuklidischen Schraubung, bei der die (euklidisch) absoluten Punkte der Richtebene Ecken des Schraubfixtetraeders sind. Diese beiden Arten von Wendelflächen stellen die einzigen konoidalen Flächen konstanten Dralls mit einer eigentlichen Leitgeraden dar (vgl. [7]).

---

[1]) Diese Flächen treten in anderem Zusammenhang bei A. Schreiner [20, S. 397] auf; es sind dies die einzigen Flächen, deren Schmieglinien ein „kinematisches Netz" bilden.

Die Striktionslinie der Flächen (18) fällt mit dem wahren Umriß für die zur Richtebene normale Blickrichtung zusammen (vgl. [11, S. 136]). Ausgehend von der sich aus (18) ergebenden Darstellung

$$x = \lambda \cos \frac{t}{d}, \; y = -f(t) + \lambda \sin \frac{t}{d}, \; z = t \tag{19}$$

erhält man für die Striktionslinie

$$x = \frac{d}{2} \dot{f} \operatorname{ctg} \frac{t}{d}, \; y = -f(t) + \frac{d}{2} \dot{f}, \; z = t. \tag{20}$$

Diese ist für $\dot{f} \neq 0$ stets transzendent.

Strahlflächen mit einer Richtebene oder einem Drehkegel als Richtkegel sind dadurch charakterisiert, daß bei ihnen die Zentraltorse ein Zylinder ist [11, S. 137]. Damit erhält man zusammenfassend:

Die einzigen windschiefen Flächen mit konstantem Drall, die eine zylindrische Zentraltorse besitzen, sind die c-Kugeln, die ç-Rohrflächen mit c-isotroper Mittenkurve und die konoidalen Flächen (18).

Die konstant gedrallten windschiefen Flächen mit konischer (nicht zylindrischer) Zentraltorse hat kürzlich J. Krames [12] behandelt.

5. Unter den Flächen (7) kommen nach 3 algebraische Flächen vor, die stets rational sind und entstehen, wenn $f(t)$ rational ganz oder rational gebrochen ist. Soll speziell eine Fläche 3. Grades vorliegen, so müssen die Plückerkoordinaten p_i in (7) Polynome höchstens 3. Grades in t sein. Aus der speziellen Bauart von (7) folgert man unter Verwendung der Anfangsbedingungen (6), daß dies nicht möglich ist. *Es existiert somit keine verallgemeinerte Böschungsfläche 3. Grades.*

Wir bestimmen nun alle verallgemeinerten Böschungsflächen 4. Grades. Für sie sind die Plückerkoordinaten p_i Polynome 4. Grades in t und nach (7) und (6) muß $f(t)$ die Bauart $f(t) = At^3$ haben, wobei A eine Konstante ist. Durch Änderung des Parameters kann etwa $A = 2$ erreicht werden; diese Wahl der Konstanten vereinfacht die Koeffizienten in den folgenden Gleichungen. Die Gratlinie k besitzt dann nach (5) die Gleichungen

$$x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = \frac{1}{a}(3t + t^3) \tag{21}$$

und für die Fläche Φ ergibt sich nach (7)

$$\begin{aligned} p_1 : \ldots : p_6 = a(1 - t^2) : 2at : 1 + t^2 : t^4 - 3t^2 - ad(t^2 - 1) : \\ : -4t^3 + 2adt : a[t^4 + 3t^2 - ad(1 + t^2)]. \end{aligned} \tag{22}$$

Nach Elimination des Parameters t erhält man daraus ihre Gleichung:

$$\begin{aligned} (x + az)^2 (a^2z^2 - x^2 - y^2 + a^2d^2) + 18y(x^2 - a^2z^2) + \\ + 27(x - az)^2 + 4(y - ad)(2y + ad)^2 = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Das ist für jeden Wert von d eine *Strahlfläche* 4. *Grades III. Art* nach der Einteilung von R. Sturm (vgl. [11, S. 269]). Sie ist zur y-Achse axial symmetrisch und entsteht durch projektive Kopplung zwischen dem Fernkreis c (2) und der in der Doppeltangentialebene

$$(2 + ad)x - a(2 - ad)z = 0 \tag{24}$$

von Φ liegenden Parabel

(25) $$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : t(2 - ad) : t^2 + ad : \frac{t}{a}(2 + ad),$$

wobei Punkte mit gleichen Parameterwerten einander zuzuordnen sind. Nach (9), (10), (11) trägt Φ eine einzige Torsallinie, und zwar ist das die Ferngerade

(26) $$x_0 = 0, \quad x_1 + a x_3 = 0.$$

Diese Ferntorsallinie ist von 4. Ordnung, besitzt die Fernebene als Torsalebene und den Kuspidalpunkt $(0 : -a : 0 : 1)$. Die Doppelkubik von Φ ist die kubische Parabel

(27) $$x = (6 + ad)\,\mu - 8\mu^3, \; y = -\frac{ad}{2} + 12\mu^2, \; z = \frac{1}{a}\,[(6 - ad)\,\mu + 8\mu^3].$$

Sie oskuliert die Fernebene im Kuspidalpunkt und kann als Schnitt des parabolischen Zylinders

(28) $$(x + az)^2 - 6(2y + ad) = 0$$

mit dem Paraboloid

(29) $$(y - ad)(x + az) + 9(x - az) = 0$$

erzeugt werden; diese beiden Flächen haben außerdem noch die Torsallinie von Φ gemeinsam. Überdies liegt die Doppelkubik von Φ noch auf der Strahlfläche 3. Grades

(30) $$(x + az)^3 + 18(x + az)(3 - y) - 108x = 0;$$

diese Fläche ist vom Cayleyschen Typus (vgl. [11, S. 181]). Ihre Torsallinie 2. Ordnung ist die Torsallinie von Φ, die Torsalebene fällt mit der Fernebene zusammen; außerdem ist sie zur y-Achse symmetrisch („Mittelerzeugende"). Cayleysche Flächen mit Ferntorsalebene und einer Mittelerzeugenden als Symmetrieachse hat J. Krames [18] untersucht. Die Fläche Φ besteht aus allen Sehnen der Kubik (27), die im Gewinde mit den Plückerkoordinaten

(31) $$-a : 0 : 1 : 3 + ad : 0 : a(ad - 3)$$

enthalten sind.

Ist $a^2 \neq -1$, liegt also keine Mongesche Fläche vor, so erhält man nach (12) die Parameterdarstellung

(32) $$x = 2t^3 - adt + \lambda\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \; y = -3t^2 + ad + \lambda\frac{2t}{1 + t^2}, \; z = -\frac{2t^3}{a} + dt + \frac{\lambda}{a}$$

und nach (13) errechnet man für die Striktionslinie:

(33) $$\begin{aligned} x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = {} & a(1 + t^2) : -at^5 + 2at^3 + at(3 - 2ad) : \\ & : 3at^4 + 3at^2 + a^2d(1 - t^2) : t^5 + 4t^3 + 3t. \end{aligned}$$

Das ist eine zirkulare Kurve 5. Ordnung, die die Fernebene im Kuspidalpunkt oskuliert. Da Φ als Fläche 4. Grades III. Art von 6. Rang ist, besteht die vollständige Striktionslinie aus einer Kurve 12. Ordnung, die jedoch in die fünffach

zu zählende Ferntorsallinie 4. Ordnung, die beiden (euklidisch) isotropen Erzeugenden und die obige „eigentliche Striktionslinie“ 5. Ordnung zerfällt (vgl. [11, S. 157], [13]).

Im Rahmen jener (euklidischen bzw. pseudoeuklidischen) c-Metrik, die sich auf den Fernkreis der verallgemeinerten Böschungsfläche stützt, sind die Flächen (22) c-Rohrflächen mit der c-isotropen Mittenkubik k (21). Diese Kubik k und die Flächen Φ gestatten die eingliedrige Gruppe projektiver Automorphien

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3 = x_0 &: (3t - t^3)x_0 + \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) x_1 - t x_2 - a \frac{t^2}{2} x_3 : \\
&: 3t^2 x_0 + t x_1 + x_2 + a t x_3 : \\
&: \frac{1}{a}\left[(t^3 + 3t) x_0 + \frac{t^2}{2} x_1 + t x_2 + a\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) x_3\right],
\end{aligned}
\tag{34}
$$

die c-Bewegungen darstellen und deren Fixelemente so inzidieren, daß sämtliche Fixebenen mit der Fernebene, sämtliche Fixpunkte mit dem auf c liegenden Kuspidalpunkt und sämtliche Fixgeraden mit der Ferntorsallinie — der Tangente von c im Kuspidalpunkt — zusammenfallen. Obige Gruppe automorpher Kollineationen stellt daher eine *„c-Grenzschraubung“* dar [14]. Da die c-isotropen Erzeugenden von Φ die Schraubachse nicht treffen, sind sie als *„offene Strahlschraubflächen“* anzusprechen; Flächen dieser Art sind mit den c-Schraubrohrflächen mit c-isotroper Mittenkurve identisch [15, S. 157]. Das liefert zusammengefaßt:

Die einzigen verallgemeinerten Böschungsflächen 4. Grades sind die offenen c-Grenzschraubstrahlflächen mit c-isotropen Erzeugenden.

Die Doppelkubik (27) einer solchen Grenzschraubstrahlfläche muß nach allgemeinen Sätzen von K. Strubecker über nichteuklidische Strahlschraubflächen [19, S. 75] auf einer Wendelfläche der Grenzschraubung liegen. Das ist in unserem Fall die Cayleysche Strahlfläche (30), die durch Verschraubung der die Symmetrieachse von Φ abgebenden y-Achse entsteht. Der parabolische Zylinder (28), der ebenfalls die Doppelkubik enthält, ist eine *„Schraub-F_2“* der Grenzschraubung (34).

Speziell für $a^2 = -1$ ergeben sie obigen Überlegungen *sämtliche Serretsche Flächen 4. Grades*. Die Schraubrohrflächen der euklidischen Grenzschraubungen mit euklidisch isotroper Mittenkurve hat bereits L. Berwald [6, S. 200] analytisch untersucht; daß diese Flächen konstanten Drall besitzen, konnte ich in [5] nachweisen.

Literatur

[1] Kruppa, E.: Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **157**, 143—176 (1949).

[2] Brauner, H.: Über Strahlflächen von konstantem Drall. Monatsh. Math. **63**, 101—111 (1959).

[3] Brauner, H.: Eine Verallgemeinerung des Problems der Cesàrokurven. Ann. Math. **138**, 27—41 (1959).

[4] Brauner, H.: Eine einheitliche Erzeugung konstant gedrallter Strahlflächen. Monatsh. Math. (im Druck).

[5] Brauner, H.: Erweiterung des Begriffs Drall auf Mongesche Flächen. Anz. Akad. Wiss. Wien **1960**, 139—144.
[6] Berwald, L.: Über die Flächen mit einer einzigen Schar zueinander windschiefer Minimalgeraden. Sitzb. Bayr. Akad. Wiss. **1918**, 143—211.
[7] Brauner, H.: Die konstant gedrallte Netzfläche 4. Grades. Monatsh. Math. **65**, 53—73 (1961).
[8] Strubecker, K.: Differentialgeometrie I. Göschen 1113|1113a. Berlin 1955.
[9] Müller, E., u. J. Krames: Die Zyklographie. Vorlesungen über Darstellende Geometrie II. Wien 1929.
[10] Zindler, K.: Liniengeometrie mit Anwendungen II. Sammlung Schubert LI. Leipzig 1906.
[11] Müller, E., u. J. Krames: Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Vorlesungen über Darstellende Geometrie III. Wien 1931.
[12] Krames, J.: Über die windschiefen Flächen mit konischer Zentraltorse. Monatsh. Math. (im Druck).
[13] Krames, J.: Über das Zerfallen der Striktionslinie von Regelflächen. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **135**, 227—269 (1926).
[14] Wunderlich, W.: Über eine affine Verallgemeinerung der Grenzschraubung. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **144**, 111—129 (1935).
[15] Wellstein, J.: Flächen isotroper Drehungen und Schraubungen. J. reine angew. Math. **156**, 149—163 (1927).
[16] Lie, S.: Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen. Ber. Gesell. Leipzig **48**, 466—477 (1896).
[17] Study, E.: Minimalkurven und Serretsche Flächen. Am. J. Math. **32**, 264—278 (1910).
[18] Krames, J.: Über kubische Schraublinien und Cayleysche Strahlflächen dritten Grades. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **168**, 239—248 (1959).
[19] Strubecker, K.: Über nichteuklidische Schraubungen. Monatsh. Math. **38**, 63—84 (1931).
[20] Schreiner, A.: Netze von Asymptotenlinien, die sich kinematisch erzeugen lassen. Arch. Math. **XI**, 392—400 (1960).

(Eingegangen am 18. Dezember 1960)

SCHWEIZER, B. and A. SKLAR
Math. Annalen 143, 440—447 (1961)

The Algebra of Functions. II

By

B. SCHWEIZER and A. SKLAR in Tucson and Chicago, USA

Introduction

This paper is a direct continuation of our earlier paper on the algebra of functions [3] which appeared in Volume 139 of this journal. It is primarily devoted to two topics. The first of these is the introduction of a pair of identities which are the abstract formulation of certain properties of the domain and range of combinations (sums, products, or composites) of ordinary functions. These identities are not implied by our earlier axioms. However, they do reflect properties that are true for ordinary functions, and they also lead to several important consequences in the abstract theory. We have therefore decided to adopt them as an additional axiom (Axiom 6 of the present paper). Thus, in this paper, we study systems that satisfy Axioms 1—4 of [3] and the new Axiom 6.

The second main topic of this paper is a representation theorem. We show that any system $\mathscr{S}$ which satisfies Axioms 1—4 and Axiom 6 may be represented as — i.e., is order-isomorphic to — a partially ordered semigroup of mappings of subsets of $\mathscr{S}$ into subsets of $\mathscr{S}$, a semigroup in which the partial order relation is set inclusion and the binary operation is composition[8]).

In addition to the two main topics, we also derive a number of results which are direct consequences of the extended axiom system but cannot be obtained from Axioms 1—4 alone.

The notation and terminology used in this paper are the same as in [3]. Moreover, in order to avoid confusion of references, in designating axioms, definitions and theorems, as well as in the numbering of sections, we continue with the numbering scheme of [3]. Thus, for example, the paper begins with Section 7 and the first theorem is designated as Theorem 37.

7. Axiom 6

The identities which we wish to introduce in the form of an additional axiom are the following:

Axiom 6: For any pair of elements a, b in $\mathscr{S}$,

$$L(a \circ b) = L(a \circ Lb)\,, \quad R(a \circ b) = R(Ra \circ b)\,.$$

[8]) Note that, because of the partial ordering, this representation differs fundamentally from previous representations of semigroups as systems of mappings, in which no partial orderings are involved.

For any function f in $(\mathscr{F}, +)$, Rf and Lf are identical and equal to the restriction of 0 to Dom$f$. Moreover Dom$(f+g) =$ Dom$f \cap$ Dom$g$. It follows that the four terms: $L(f+g)$, $L(f+Lg)$, $R(f+g)$, $R(Rf+g)$, are identical and equal to the restriction of 0 to Dom$f \cap$ Dom$g$. Thus the identities of Axiom 6 are satisfied in $(\mathscr{F}, +)$. A similar argument shows that they are satisfied in $(\mathscr{F}, \cdot)$, where Rf and Lf are both equal to the restriction of 1 to Dom$f$. For any function f in $(\mathscr{F}, c)$, Rf is the restriction of j to Dom$f$, and Lf is the restriction of j to Ran$f$. In this case the verification of Axiom 6 is somewhat more involved and proceeds as follows:

$$\begin{aligned} R(fg) &= \{(x, x) \mid x \text{ in Dom}(fg)\} \\ &= \{(x, x) \mid x \text{ in Dom}g \text{ and there exists a number } y \text{ in Dom}f \text{ such that } y = g(x)\} \\ &= \{(x, x) \mid x \text{ in Dom}g \text{ and there exists a number } y \text{ in Dom}(Rf) \text{ such that } y = g(x)\} \\ &= \{(x, x) \mid x \text{ in Dom}[(Rf)g]\} \\ &= R[(Rf)g]\,. \end{aligned}$$

A similar argument shows that $L(fg) = L[f(Lg)]$. Thus the identities of Axiom 6 are satisfied in each of the systems $(\mathscr{F}, +)$, $(\mathscr{F}, \cdot)$ and $(\mathscr{F}, c)$. It is worth noting that in $(\mathscr{F}, c)$ they are equivalent to

$$\text{Dom}(fg) = \text{Dom}[(Rf)g]\,, \quad \text{Ran}(fg) = \text{Ran}[f(Lg)]\,.$$

These identities, in turn, are equivalent to those given by MENGER on page 88 of [2]. Moreover, they clearly show that the range of the composite function fg does not depend on the domain of g, and that the domain of fg does not depend on the range of f.

Each of the identities of Axiom 6 may be considered as a pair of inclusions. In each case, one of these inclusions is a direct consequence of Axioms 1—4, for we have

Theorem 37: For any a, b in $\mathscr{S}$, $L(a \circ b) \subseteq L(a \circ Lb)$, $R(a \circ b) \subseteq R(Ra \circ b)$.

Proof: We have $\quad a \circ b = a \circ Lb \circ b = a \circ Ra \circ b\,, \quad$ (A 4a)

whence $\quad L(a \circ b) = L(a \circ Lb \circ b) \subseteq L(a \circ Lb)\,, \quad$ (A 4b)

and $\quad R(a \circ b) = R(a \circ Ra \circ b) \subseteq R(Ra \circ b)\,. \quad$ (A 4b)

The reverse inclusions, however, are not a consequence of Axioms 1—4, nor even of Axioms 1—5. This is shown by the following example:

Let $\mathscr{S}$ be the set of all ordinary functions f having the property that Ran$f \subseteq [0, 1]$; let $f \circ g$ be the restriction of $f + g$ which is in $\mathscr{S}$, i.e., the restriction of $f + g$ to the set on which $0 \leq f(x) + g(x) \leq 1$; and, as usual, let the partial order be by restriction. It is readily verified that the system $(\mathscr{S}, \circ)$ satisfies Axioms 1—4. Axiom 5 is also satisfied; indeed, if $f(x) \neq 0$ for all x in Dom$f$, then the neutralizer in question is the empty function ϕ (which

clearly belongs to $\mathscr{I}$); otherwise it is the restriction of f to the set of all x such that $f(x) = 0$. Now let $f = g = 1$. Then

$$Rf = Rg = 0\,, \quad f \circ g = \phi\,, \quad Rf \circ g = 1\,,$$

whence,

$$R(f \circ g) = \phi \neq 0 = R(Rf \circ g)\,.$$

Since $Rf = Lf$ for any f in $\mathscr{I}$, the second identity of Axiom 6 also fails. Thus there exists a system in which Axioms 1—5 are satisfied but Axiom 6 is not. This shows that Axiom 6 is independent of these previous axioms.

One of the intuitive reasons for the failure of Axiom 6 in the system $(\mathscr{I}, \circ)$ is the fact that any element in this system which is not a restriction of the identity 0 is non-invertible. More than that, an overwhelming majority of the elements in $(\mathscr{I}, \circ)$ do not even possess a single non-empty neutralizer. This observation points to a connection between Axiom 6 and the existence of inverses. The following theorems (as well as Theorem 44) lend support to this statement.

Theorem 38: If $c[RS]b$, then $L(a \circ Lb) \subseteq L(a \circ b)$, for any a. If $d[LS]a$, then $R(Ra \circ b) \subseteq R(a \circ b)$, for any b.

Proof: $\quad L(a \circ Lb) = L(a \circ b \circ c) \subseteq L(a \circ b)\,.$ (D 4, A 4b)

$\quad R(Ra \circ b) = R(d \circ a \circ b) \subseteq R(a \circ b)\,.$ (D 4, A 4b)

Theorem 39: If every element in $\mathscr{S}$ has a subinverse, then Axiom 6 is a consequence of Axioms 1—4.

Proof: This follows directly from T 37 and T 38.

In $(\mathscr{F}, \cdot)$, any function which assumes the value 0 has no subinverse. Every function in $(\mathscr{F}, c)$ has a right-subinverse, but the only functions that have left-subinverses are the one-one functions. Thus, since we want our axioms to apply to $(\mathscr{F}, \cdot)$ and especially to $(\mathscr{F}, c)$, replacing Axiom 6 by the much stronger stipulation that every element have a subinverse is out of the question.

Definition 12: A system $(\mathscr{S}, \circ, \subseteq)$ satisfying Axioms 1—4 and Axiom 6 is a ***partially ordered function semigroup*** (briefly, a ***function semigroup***).

In the remainder of this paper all systems under consideration are function semigroups.

8. Consequences of Axiom 6

In this section we derive a number of results whose proofs depend crucially on Axiom 6.

Theorem 40: If $Lb \subseteq Ra$, then $R(a \circ b) = Rb$. If $Ra \subseteq Lb$, then $L(a \circ b) = La$.

Proof: If $\quad Lb \subseteq Ra$, then $b = Lb \circ b \subseteq Ra \circ b\,,$ (A 4a, T 1)

whence $\quad Rb \subseteq R(Ra \circ b) = R(a \circ b)\,.$ (T 8, A 6)

But clearly, $\quad R(a \circ b) = R(Ra \circ b) \subseteq Rb\,.$ (A 4b)

Thus $\quad R(a \circ b) = Rb\,.$

Similarly, if $\quad Ra \subseteq Lb$, then $a = a \circ Ra \subseteq a \circ Lb$,

whence $\quad La \subseteq L(a \circ Lb) = L(a \circ b)$.

But again, $\quad L(a \circ Lb) \subseteq La$.

Theorem 41: $R(a \circ Lb) = L(Ra \circ b) = Ra \circ Lb = Ra \cap Lb$.

Proof: $R(a \circ Lb) = R(Ra \circ Lb) = Ra \circ Lb = L(Ra \circ Lb) = L(Ra \circ b)$ (A 6, T 3)
$= Ra \cap Lb$. (C 6.1)

Theorem 42: If "$\circ$" is commutative, then $R(a \circ b) = Ra \circ Rb = La \circ Lb = L(a \circ b)$.

Proof:

$$R(a \circ b) = R(Ra \circ b) = R(b \circ Ra) = R(Rb \circ Ra) = Rb \circ Ra = Lb \circ La$$
$$= L(Lb \circ La) = L(Lb \circ a) = L(a \circ Lb) = L(a \circ b). \qquad \text{(T 3, A 6)}$$

Theorem 43: $Ra \circ b = b \circ R(a \circ b)$.

Proof: We have $\quad Ra \circ b \subseteq b$. (T 1)

Thus $\quad Ra \circ b = b \circ R(Ra \circ b) = b \circ R(a \circ b)$. (T 7, A 6)

Theorem 44: If $\mathscr{S}$ contains a null element ϕ, then $a \circ b = \phi$ if and only if $Ra \circ Lb = \phi$[9]).

Proof: If $\quad a \circ b = \phi$, then $R(a \circ b) = \phi$. (T 3)

Consequently, $\quad R(Ra \circ b) = \phi$, (A 6)

whence $\quad Ra \circ b = \phi$. (T 36)

Thus $\quad L(Ra \circ b) = Ra \circ Lb = \phi$. (T 3, T 41)

Next, if $Ra \circ Lb = \phi$, then $a \circ b = a \circ Ra \circ Lb \circ b = a \circ \phi \circ b = \phi$. (A 4a)

Corollary: $a \circ b = \phi$ if and only if $a = \phi$ or $b = \phi$ or $Ra \cap Lb = \phi$.

In $(\mathscr{F}, +)$ and $(\mathscr{F}, \cdot)$, Theorem 44 is equivalent to the fact that the sum or product of two functions is empty if and only if one of the functions is empty or if their domains are disjoint. (Compare this with the example following T 37). In $(\mathscr{F}, c)$, T 44 is equivalent to the fact that the composite function fg is empty if and only if either f or g is empty or Dom$f$ and Ran$f$ are disjoint. Thus, loosely speaking, T 44 states that there are no "divisors of zero" in $\mathscr{S}$.

Theorem 45: If $a \subseteq c$ and $b \subseteq c$, then $R(a \cap b) = Ra \cap Rb$.

Proof: $\quad a \cap b = c \circ Ra \circ Rb$, and $Ra \subseteq Rc$, $Rb \subseteq Rc$. (C 7.1, T 8)

Accordingly, $\quad R(a \cap b) = R(c \circ Ra \circ Rb) = Rc \circ Ra \circ Rb$ (T 41)
$= Ra \circ Rb = Ra \cap Rb$. (C 6.1, C 6.2)

---

[9]) In [3] we defined a null element via: ϕ is a null element if $\phi \circ a = \phi$ for every a in $\mathscr{S}$. We then showed that $\phi \subseteq a$, for every a — whence ϕ is unique — and that $a \circ \phi = \phi$. However, in order to prove these statements we had to make use of Axiom 5. In this paper we wish to avoid recourse to this axiom whenever possible, and so we shall stipulate that ϕ is a null element if $\phi \subseteq n$, and $\phi \circ a = \phi$, for any a in $\mathscr{S}$. It immediately follows from T3 and A3b that $R\phi = L\phi = \phi$, and that $\phi \subseteq a$ for all a in $\mathscr{S}$. By A4b, $R(a \circ \phi) \subseteq R\phi = \phi$, whence $R(a \circ \phi) = \phi$. Therefore $R(a \circ \phi) \subseteq a \circ \phi$, whence by C7.2, $a \circ \phi = \phi$.

It is of interest to note that the corresponding theorem for $L(a \cap b)$ generally does not hold. For example, in $(\mathscr{F}, c)$, let g be the sine function, a the restriction of g to the interval $[-\pi/2, \pi/2]$, and b the restriction of g to the interval $[3\pi/2, 5\pi/2]$. Then $L(a \cap b) = L\phi = \phi$, but $La \cap Lb = Lg \neq \phi$.

Theorem 46: If a is idempotent, then $La \subsetneq Ra$.

Proof: $$Ra \circ a = a \circ R(a \circ a) = a \circ Ra = a\,. \qquad \text{(T 43, A 4a)}$$

Thus $La = L(Ra \circ a) \subsetneq LRa = Ra$. (A 4b, C3)

Theorem 47: If a is subidempotent (i.e., if $a \circ a \subsetneq a$), and $La \subsetneq Ra$, then a is idempotent.

Proof: Since $a \circ a \subsetneq a$, we have
$$\begin{aligned} a \circ a &= a \circ R(a \circ a) && \text{(T 7)} \\ &= Ra \circ a = Ra \circ La \circ a && \text{(T 43, A 4a)} \\ &= La \circ a = a\,. \end{aligned}$$

9. The Representation Theorem

Lemma 1: $Lc \subsetneq R(a \circ b)$ if and only if $Lc \subsetneq Rb$ and $L(b \circ c) \subsetneq Ra$.

Proof: (i) Suppose $Lc \subsetneq R(a \circ b)$.

Since $R(a \circ b) \subsetneq Rb$, we have at once $Lc \subsetneq Rb$.

Next,
$$\begin{aligned} L(b \circ c) &= L(b \circ Lc) && \text{(A 6)} \\ &\subsetneq L(b \circ R(a \circ b)) && \text{(T 1, T 8)} \\ &= L(Ra \circ b) && \text{(T 43)} \\ &= Ra \circ Lb \subsetneq Ra\,. && \text{(T 41)} \end{aligned}$$

(ii) Now suppose $Lc \subsetneq Rb$ and $L(b \circ c) \subsetneq Ra$.

Then
$$\begin{aligned} Lc &= Lc \circ Rb = R(b \circ Lc) && \text{(T 41)} \\ &= R[L(b \circ Lc) \circ b \circ Lc] && \text{(A 4a)} \\ &= R[L(b \circ c) \circ b \circ Lc] && \text{(A 6)} \\ &\subsetneq R(Ra \circ b \circ Lc) && \text{(A 3b, T 8)} \\ &\subsetneq R(Ra \circ b \circ Rb) && \text{(T 1, T 8)} \\ &= R(Ra \circ b) = R(a \circ b)\,. && \text{(A 6)} \end{aligned}$$

Lemma 2: If $a \not\subseteq b$, then $a \neq b \circ Ra$.

Proof: If $a = b \circ Ra$, then $a \subsetneq b$. (T 7)

Lemma 3: If $a \neq b$, then there exists an element c such that Lc is a restriction of either Ra or Rb and such that $a \circ c \neq b \circ c$.

Proof: The two inclusions $a \subsetneq b$ and $b \subsetneq a$ imply $a = b$.

Thus from $a \neq b$ it follows that either $a \not\subseteq b$ or $b \not\subseteq a$.

If $a \not\subseteq b$, we take $c = Ra$.

Then $$Lc = c = Ra\,, \qquad \text{(T 3)}$$

and $$a \circ c = a \circ Ra = a \neq b \circ Ra = b \circ c\,. \qquad \text{(L 2)}$$

If $b \not\subseteq a$, we take $c = Rb$, and apply the same argument.

Theorem 48: If $\mathscr{S}$ is a function semigroup, then there exists an order-preserving isomorphism between $\mathscr{S}$ and a system $\mathfrak{F}$ whose elements are mappings (from subsets of $\mathscr{S}$ to subsets of $\mathscr{S}$) partially ordered by restriction and combined by composition. That is to say, any function semigroup may be represented as a semigroup of functions on a set.

Proof: Let $a \in \mathscr{S}$ and form the set

$$f_a = \{(c, a \circ c) \mid c \in \mathscr{S}, Lc \subseteq Ra\}.$$

The set f_a is a set of ordered pairs of elements of $\mathscr{S}$ which, as one readily sees, is a function. The domain (range) of f_a is the set of all $c \in \mathscr{S}$ $(a \circ c \in \mathscr{S})$ such that $Lc \subseteq Ra$. Moreover, f_a is not empty since $(Ra, a \circ Ra) \in f_a$. (Note that this means that $f_a(Ra) = a$, where $f_a(b)$ is the value of f_a for the argument b. And note also that if $c \neq \phi$ and $Lc \subseteq Ra$, then in view of T 44, $a \circ c \neq \phi$.) Next, let

$$\mathfrak{F} = \{f_a \mid a \in \mathscr{S}\}.$$

The elements of $\mathfrak{F}$, being functions from $\mathscr{S}$ to $\mathscr{S}$, may be partially ordered by restriction, i.e., ordinary set inclusion, and combined by composition. More precisely, if f_a and f_b are in $\mathfrak{F}$ then[10])

$$f_a \subseteq f_b \text{ if and only if } (c, a \circ c) \in f_a \text{ implies } (c, a \circ c) \in f_b$$

and

$$f_a \circ f_b = \{(c, d) \mid \text{there is an } e \in \mathscr{S} \text{ such that } (c, e) \in f_b, (e, d) \in f_a\}.$$

There is, furthermore, a natural correspondence between the two systems $\mathfrak{F}$ and $\mathscr{S}$, namely the correspondence which is determined by associating with each a in $\mathscr{S}$ the element f_a in $\mathfrak{F}$. We shall show that this correspondence is the desired order-preserving isomorphism. The proof consists of three parts.

(1) The correspondence is one-one.

(i) Suppose $a, b \in \mathscr{S}$ and $a \neq b$. Then by Lemma 3, there exists an element c in $\mathscr{S}$ such that either

$$(c, a \circ c) \in f_a \quad \text{and} \quad (c, a \circ c) \notin f_b$$

or

$$(c, b \circ c) \in f_b \quad \text{and} \quad (c, b \circ c) \notin f_a.$$

In either case, $f_a \neq f_b$.

(ii) If $a = b$ then $f_a = f_b$, so that if $f_a \neq f_b$ then $a \neq b$.

(2) The correspondence is order-preserving, i.e., $a \subseteq b$ if and only if $f_a \subseteq f_b$.

(i) If $a \subseteq b$, then $Ra \subseteq Rb$ and $a = b \circ Ra$. Thus $Lc \subseteq Ra$ implies that $Lc \subseteq Rb$ and that

$$a \circ c = b \circ Ra \circ c = b \circ Ra \circ Lc \circ c = b \circ Lc \circ c = b \circ c.$$

Consequently, if $(c, a \circ c) \in f_a$ then $(c, a \circ c) \in f_b$, whence $f_a \subseteq f_b$.

10) Since no confusion can arise, we use the symbol "$\subseteq$" to denote the partial order, and "$\circ$" to denote the binary operation, in $\mathfrak{F}$ as well as in $\mathscr{S}$.

(ii) If $a \lneqq b$, then, via the argument of Lemma 3, we have $f_a \lneqq f_b$.
(3) The correspondence is a homomorphism, i.e., $f_a \circ f_b = f_{a \circ b}$. Taking $f_a \circ f_b$ as defined above, we have

$$(c, e) \in f_b \text{ if and only if } Lc \subseteq Rb, e = b \circ c\,,$$

$$(e, d) \in f_a \text{ if and only if } Le \subseteq Ra, d = a \circ e\,.$$

Thus, $(c, e) \in f_b$ and $(e, d) \in f_a$ if and only if $Lc \subseteq Rb$, $L(b \circ c) \subseteq Ra$, and $d = a \circ b \circ c$. Hence we have

$$\begin{aligned} f_a \circ f_b &= \{(c, a \circ b \circ c) \,|\, Lc \subseteq Rb, L(b \circ c) \subseteq Ra\} \\ &= \{(c, a \circ b \circ c) \,|\, Lc \subseteq R(a \circ b)\} \qquad \text{(L 1)} \\ &= f_{a \circ b}\,. \end{aligned}$$

Since any one-one homomorphism is an isomorphism, the proof is complete.

It is interesting to note that even when $\mathscr{S}$ is a system of functions which are combined by addition or multiplication, the representatives in $\mathfrak{F}$ of the elements of $\mathscr{S}$ are combined by composition.

10. Representation by Constants

The elements of $\mathscr{F}$, i.e., the ordinary functions from the reals to the reals, are defined as sets of ordered pairs of numbers, but may, equivalently, be regarded as sets of ordered pairs of constant functions[11]). Thus, it is natural to investigate representations of $\mathscr{S}$ using only ordered pairs of constants of $\mathscr{S}$. More generally, let $\mathscr{Q}$ be a subset of $\mathscr{S}$ and, for any $a \in \mathscr{S}$, let

$${}_{\mathscr{Q}}f_a = \{(c, a \circ c) \mid c \in \mathscr{Q}, Lc \subseteq Ra\}\,.$$

The mappings ${}_{\mathscr{Q}}f_a$ are always defined, but may be empty. We now raise the question: Under what conditions do the mappings ${}_{\mathscr{Q}}f_a$ furnish a representation of $\mathscr{S}$ as a semigroup of functions on $\mathscr{Q}$, i.e., from $\mathscr{Q}$ into $\mathscr{Q}$?

First of all, in order that ${}_{\mathscr{Q}}f_a$ be a function on $\mathscr{Q}$, $a \circ c$ must lie in $\mathscr{Q}$ for all c in $\mathscr{Q}$ such that $Lc \subseteq Ra$. A set $\mathscr{Q}$ satisfying this condition for all a in $\mathscr{S}$ may aptly be called a *(left) quasi-ideal* of $\mathscr{S}$. Among the quasi-ideals are: (i) $\mathscr{S}$ itself; (ii) the set $\{c \,|\, c \in \mathscr{S}, Rc = n\}$; (iii) the set of constants of $\mathscr{S}$ (Theorem 27), where by a "constant" we mean an element satisfying the conditions of Definition 9, i.e., an element k such that $k \circ a = k \circ Ra$, for any a — such an element need not be a constant function; (iv) the set $\mathscr{K}$ of proper constants, where k is a *proper constant* if k is constant and $Rk = n$.

Now, let $\mathscr{Q}$ be a given quasi-ideal and consider the correspondence which associates the function ${}_{\mathscr{Q}}f_a$ to the element a of $\mathscr{S}$. Since the second and third parts of the proof of Theorem 48 still apply verbatim when $\mathscr{S}$ is replaced by $\mathscr{Q}$, this correspondence is an order-preserving *homomorphism*. It is not, however, necessarily an isomorphism. In order to obtain an isomorphism, further conditions are required. One such sufficient condition is a stronger version of Lemma 3, namely: if a and b are in $\mathscr{S}$ and $a \neq b$, then there exists an element c

[11]) This observation is due to K. MENGER [1, p. 13ff.].

in $\mathcal{Q}$ such that Lc is a restriction of either Ra or Rb and $a \circ c \neq b \circ c$[12]). In $(\mathcal{F}, c)$, this stronger version of Lemma 3 is valid when $\mathcal{Q}$ is the quasi-ideal $\mathcal{K}^c$ of proper constants, which, in this case [3, p. 380], is the set of all constant functions which are defined on the entire real line. In $(\mathcal{F}, +)$, on the other hand, the empty function ϕ is the only constant and the set $\mathcal{K}^+$ of proper constants is empty. Consequently, it is impossible to repsesent $(\mathcal{F}, +)$ as a semigroup of functions on $\mathcal{K}^+$.

References

[1] MENGER, K.: Algebra of Analysis. Notre Dame Math. Lect. 3. Notre Dame 1944.
[2] MENGER, K.: Calculus, a modern approach. Boston 1955.
[3] SCHWEIZER, B., and A. SKLAR: The algebra of functions. Math. Ann. 139, 366—382 (1960).

(Received December 28, 1960)

Note: Some of the material in this paper has been independently elaborated by H. H. JOHNSON in his paper "Realizations of Abstract Algebras of Functions", Math. Ann. 142, 317—321 (1961). In particular, his property (C) is the same as our Axiom 6. He also has an interesting representation (his Theorem 2) of systems satisfying Axioms 1—6. This representation differs from ours in that it depends strongly on Axiom 5; its elements are functions, but not in general functions from $\mathcal{S}$ to $\mathcal{S}$; and it is an isomorphism if and only if certain further conditions are satisfied. Moreover, the nature of these conditions is such that they are never satisfied in a commutative function semigroup so that in this case Johnson's representation cannot be an isomorphism.

(Received April 15, 1961)

[12]) In the terminology of functional analysis, this condition is, in essence, equivalent to the statement that the elements of the quasi-ideal $\mathcal{Q}$ "separate points" in $\mathcal{S}$.

Rose, A.
Math. Annalen 143, 448—462 (1961)

Self-dual binary and ternary connectives for *m*-valued propositional calculi

By

Alan Rose in Nottingham

Various complete self-dual sets of independent connectives for the m-valued propositional calculus have been found in the past[1]), but they all contain the m-valued conditioned disjunction functor of $m + 1$ arguments or some form of its negation. In the present paper we shall show that, for all m ($m \geqq 2$), we can construct a complete self-dual set of independent connectives whose members are one ternary functor and two functors of one argument. This ternary functor is a generalisation of the functor[2]) $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \rangle$ of the 2-valued propositional calculus. We shall then show that this set may be replaced, in the case $m = 3$, by either of two simpler sets. The first of these consists of one ternary functor and two logical constants while the second consists of one binary functor and two first degree functors. In all the above cases the dual of a formula may be obtained by writing it backwards and interchanging the two first degree functors or the two logical constants.

We shall then show that for all values of m ($m \geqq 3$) we may use one functor of two arguments and two functors of one argument. We shall prove two theorems, corresponding respectively to the cases where m is odd and even. When m is odd the binary functor is a generalisation of that discussed for the case $m = 3$. This is not the case for the two functors of one argument, but the alternative set for the case $m = 3$ is given in a separate theorem as the proof is shorter. We shall also show that the theorem concerning the case where m is even cannot be extended to the case $m = 2$. In the case where m is odd the above rule for obtaining the dual of a formula is applicable. We shall also show that it is impossible to construct a similar system[3]) for even values of m unless this rule is invalid.

Let us first consider the m-valued system with primitive functors $\langle\, , \, , \,\rangle$, * and $'$ where, if $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \rangle, \mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}'$ take the truth-values $x, y, z, h(x,y,z)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ respectively,

$$h(x, y, z) = \max(1, \min(m, x - y + z)),$$
$$\phi(x) = \min(m, x + 1),$$
$$\psi(x) = \max(1, x - 1).$$

Theorem 1. *The functors $\langle\, , \, , \,\rangle$, *, $'$ form a complete set of independent connectives for the m-valued propositional calculus. The set is self-dual and the*

[1]) Rose, A.: Math. Ann. **123**, 76 (1951); **126**, 144 (1953).
[2]) Rose, A.: Comptes rendus (Paris) **250**, 4089 (1960).
[3]) Theorem 7, Lemma 1.

*dual of a formula may be obtained by writing it backwards and interchanging the functors * and ′.*

In order to establish the self-duality of the functor $\langle\ ,\ ,\ \rangle$ it is sufficient to show that

$$m+1-h(m+1-x, m+1-y, m+1-z) = h(z, y, x)\,.$$

We have

$$\begin{aligned} m+1-h(m+1-x, m+1-y, m+1-z)& \\ &= m+1-\max(1, \min(m, m+1-x-(m+1-y)+m+1-z)) \\ &= \min(m, m+1-\min(m, m+1-x+y-z)) \\ &= \min(m, \max(1, z-y+x)) \\ &= \max(1, \min(m, z-y+x)) \\ &= h(z, y, x)\,. \end{aligned}$$

The functor * is the dual of the functor ′ since

$$\begin{aligned} m+1-\min(m, (m+1-x)+1)& \\ &= \max(1, m+1-m-1+x-1) = \max(1, x-1)\,. \end{aligned}$$

Thus the set of primitives is self-dual and the dual of a formula may be obtained in the manner stated above.

In order to establish the functional completeness of the system it will, by a theorem of ROSSER and TURQUETTE[4]), be sufficient to show that the implication and negation functors of ŁUKASIEWICZ[5]) and the Rosser-Turquette generalisation[6]) of the tertium functor of SŁUPECKI[7]) are definable in terms of the primitives. We shall make use of the functors $V(\ )$, $F(\ )$ where $V(\mathfrak{A})$, $F(\mathfrak{A})$ always take the truth-values 1, m respectively. We make the definitions

$$\begin{aligned} V_1(\mathfrak{A}) &=_{\mathrm{df}} \mathfrak{A}', \\ V_{i+1}(\mathfrak{A}) &=_{\mathrm{df}} V_i(\mathfrak{A})' && (i = 1, 2, \ldots)\,, \\ V(\mathfrak{A}) &=_{\mathrm{df}} V_{m-1}(\mathfrak{A})\,, \\ F_1(\mathfrak{A}) &=_{\mathrm{df}} \mathfrak{A}^*, \\ F_{i+1}(\mathfrak{A}) &=_{\mathrm{df}} F_i(\mathfrak{A})^* && (i = 1, 2, \ldots)\,, \\ F(\mathfrak{A}) &=_{\mathrm{df}} F_{m-1}(\mathfrak{A})\,, \\ T(\mathfrak{A}) &=_{\mathrm{df}} V(\mathfrak{A})^*, \\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} &=_{\mathrm{df}} \langle V(\mathfrak{A}), \mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle, \\ \bar{\mathfrak{A}} &=_{\mathrm{df}} \mathfrak{A} \to F(\mathfrak{A})\,. \end{aligned}$$

It follows easily, by induction on i, that the dual of $V_i(\mathfrak{A})$ is $F_i(\mathfrak{A})$. We note that, if some abbreviations are removed, the last of the above definitions becomes

$$\bar{\mathfrak{A}} =_{\mathrm{df}} \langle V_{m-1}(\mathfrak{A}), \mathfrak{A}, F_{m-1}(\mathfrak{A})\rangle.$$

---

[4]) ROSSER, J. B., and A. R. TURQUETTE: Many-valued Logics, Amsterdam (1952), p. 23.

[5]) ŁUKASIEWICZ, J., and A. TARSKI: Comptes rendus (Warsaw) **21**, 30 (1930).

[6]) See footnote 4.

[7]) SŁUPECKI, J.: Comptes rendus (Warsaw) **27**, 9 (1936).

Thus the definition of the negation functor of ŁUKASIEWICZ is self-dual.

The independence of the functor $\langle\ ,\ ,\ \rangle$ is trivial and that of the functor $*$ follows[8]) from the equations

$$h(1, 1, 1) = 1,\ \psi(1) = 1\ .$$

The independence of the functor $'$ is proved similarly. Thus the theorem is proved.

We shall now consider the functors $\rightarrow\!\!-$, $-\!\!|\!\!-$ and $|\ ,\ ,\ |$ of 2, 2 and 3 arguments respectively of the 3-valued propositional calculus. The truth-tables of the functors $\rightarrow\!\!-$, $-\!\!|\!\!-$ are given below and that of the functor $|\ ,\ ,\ |$ is determined by the equation

$$|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}| =_{r} [\mathfrak{B}, \mathfrak{A} \rightarrow\!\!- \mathfrak{C}, 2, \mathfrak{C} -\!\!|\!\!- \mathfrak{A}, \mathfrak{B}].$$

Table 1

$\mathfrak{A} \rightarrow\!\!- \mathfrak{B}$	1	2	3 $\mathfrak{B}$
1	1	2	3
2	1	1	1
3	1	1	2
$\mathfrak{A}$			

$\mathfrak{A} -\!\!|\!\!- \mathfrak{B}$	1	2	3 $\mathfrak{B}$
1	2	3	3
2	3	3	3
3	1	2	3
$\mathfrak{A}$			

Theorem 2. *The functor $|\ ,\ ,\ |$ and the logical constants* 1, 3 *form a complete set of independent connectives for the* 3*-valued propositional calculus. The set of primitives is self-dual and the dual of a formula may be obtained by writing it backwards and interchanging the constants* 1 *and* 3.

Since it is immediately obvious that the dual of the functor $\rightarrow\!\!-$ is the functor $-\!\!|\!\!-$ it follows at once from the self-duality of conditioned disjunction that if $\mathfrak{A}^{\dagger}, \mathfrak{B}^{\dagger}, \mathfrak{C}^{\dagger}$ are the duals of $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ respectively then the dual of the formula $|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}|$ is $|\mathfrak{C}^{\dagger}, \mathfrak{B}^{\dagger}, \mathfrak{A}^{\dagger}|$. Thus the set of primitives is self-dual and the rule for obtaining the dual of a formula is proved.

Table 2

$\mathfrak{A}$	$\sim\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}^{\ddagger}$	$J_3(\mathfrak{A})$	$J_1(\mathfrak{A})$	$\mathfrak{A}^{\diamond}$
1	2	1	3	1	1
2	3	1	3	3	3
3	1	3	1	3	2

In order to establish functional completeness we shall define[9]) the functors v and $\sim$. To this end we shall make use of the functors $\ddagger$, $J_3(\ )$, $J_1(\ )$, $\diamond$ whose truth-tables are given below, together with that of the functor $\sim$.

We make the definitions

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \rightarrow\!\!- \mathfrak{B} &=_{\mathrm{df}} |\mathfrak{A}, 1, \mathfrak{B}|\,,\\
\sim\mathfrak{A} &=_{\mathrm{df}} (\mathfrak{A} \rightarrow\!\!- 3) \rightarrow\!\!- 3\,,\\
\mathfrak{A}^{\ddagger} &=_{\mathrm{df}} \sim\mathfrak{A} \rightarrow\!\!- (\sim\mathfrak{A} \rightarrow\!\!- 3)\,,\\
J_3(\mathfrak{A}) &=_{\mathrm{df}} (3 \rightarrow\!\!- \mathfrak{A}) \rightarrow\!\!- 3\,,\\
J_1(\mathfrak{A}) &=_{\mathrm{df}} J_3(\mathfrak{A} \rightarrow\!\!- 3)\,,\\
\mathfrak{A}^{\diamond} &=_{\mathrm{df}} \mathfrak{A}^{\ddagger} \rightarrow\!\!- J_1(\mathfrak{A})\,,\\
\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} &=_{\mathrm{df}} \mathfrak{A}^{\diamond} \rightarrow\!\!- \mathfrak{B}\,,\\
\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} &=_{\mathrm{df}} (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B}\,.
\end{aligned}$$

[8]) See, for example, the second paper referred to in footnote 1.

[9]) These are the functors of POST, E. L.: Am. J. Math. 43, 163 (1921).

The functional completeness of the system now follows at once from a theorem of Post[10]).

The independence of the functor $|\ ,\ ,\ |$ is trivial and we note that if $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, |\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}|$ take the truth-values x, y, z $\xi(x, y, z)$ respectively then

$$\xi(1, 1, 1) = 1,\ \xi(3, 3, 3) = 3\,.$$

Hence[11]) the constants 1, 3 are independent. Thus the theorem is proved. We note in conclusion that we may make the following self-dual definition of the Łukasiewicz negation functor:

$$\bar{\mathfrak{A}} =_{\mathrm{df}} |1, \mathfrak{A}, 3|\,.$$

We consider next the 3-valued functors $\circ$, $^{\square}$, $^{\diamond}$ whose[12]) truth-tables are given below.

Theorem 3. ***The 3-valued propositional calculus whose primitive functors are $\circ$, $^{\square}$ and $^{\diamond}$ is functionally complete and the primitives are independent. The set of primitives is self-dual and the dual of a formula may be obtained by writing it backwards and interchanging the functors $^{\square}$ and $^{\diamond}$.***

Table 3

	$\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}=1$	$\mathfrak{B}=2$	$\mathfrak{B}=3$	$\mathfrak{A}^{\square}$	$\mathfrak{A}^{\diamond}$
$\mathfrak{A}=1$	1	1	2	2	1
$\mathfrak{A}=2$	1	2	3	1	3
$\mathfrak{A}=3$	2	3	3	3	2

If $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ take the truth-values $x, y, \omega(x, y)$ respectively then

$$\omega(x, y) = \max(1, \min(3, x + y - 2))\,.$$

Hence

$$\begin{aligned} 4 - \omega(4 - x, 4 - y) & \\ &= \min(3, \max(1, 4 - (6 - x - y))) \\ &= \min(3, \max(1, y + x - 2)) \\ &= \max(1, \min(3, y + x - 2)) \\ &= \omega(y, x)\,. \end{aligned}$$

Thus the functor $\circ$ is self-dual. Since it is immediately obvious that each of the functors $^{\square}$, $^{\diamond}$ is the dual of the other, the set of primitives is self-dual and the rule for obtaining the dual of a formula is proved.

We now establish the functional completeness of the system by defining the functors $\rightarrow$, $^{-}$ and $T(\ )$. We make the definitions

$$\mathfrak{A}' =_{\mathrm{df}} (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A}^{\square})^{\diamond}\,,$$

$$\mathfrak{A} \le \mathfrak{B} =_{\mathrm{df}} (\mathfrak{A}' \circ \mathfrak{B}) \circ (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}')\,,$$

$$\bar{\mathfrak{A}} =_{\mathrm{df}} \mathfrak{A}^{\square\diamond\square} \circ \mathfrak{A}^{\diamond\square\diamond}\,,$$

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} =_{\mathrm{df}} \bar{\mathfrak{A}} \le \mathfrak{B}\,,$$

$$T(\mathfrak{A}) =_{\mathrm{df}} \mathfrak{A} \circ \bar{\mathfrak{A}}\,.$$

---

10) *Op. cit.*

11) See, for example, the first paper referred to in footnote 1.

12) The functor $^{\diamond}$ is that defined in the proof of Theorem 2.

The above definition of negation is, of course, self-dual. A simpler definition would have been

$$\overline{\mathfrak{A}} =_{\mathrm{df}} \mathfrak{A}^{\Box\Diamond\Box},$$

but this latter definition is not self-dual. Similar considerations apply to the definition of the tertium functor.

Finally we consider the independence of the primitives. The independence of the functor $\circ$ is trivial and the independence of the functors $^{\Box}$ and $^{\Diamond}$ follows in the usual way from[13]) the fact that if $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}^{\Box}$, $\mathfrak{A}^{\Diamond}$, $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ take the truth-values x, y, $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\omega(x, y)$ respectively then

$$\mu(1) = \omega(1, 1) = 1, \lambda(3) = \omega(3, 3) = 3\,.$$

Thus the theorem is proved.

We now consider the construction of a complete self-dual set of independent connectives for the m-valued propositional calculus in such a way that the set contains three functors, two being of one argument and the third a binary functor. Let us denote these functors by $\circ$, $^{\neg 1}$ and $^{\neg 2}$ respectively. We shall give general definitions of the truth-tables of these functors for the following two cases:

(i) m is odd and $m \geqq 3$.

(ii) m is even and $m \geqq 4$.

Let us first, however, consider the one remaining case, i.e. the case $m = 2$.

Theorem 4. *The 2-valued propositional calculus does not possess a complete self-dual set of independent connectives* $\circ$, $^{\neg 1}$ *and* $^{\neg 2}$ *of* 2, 1, 1 *arguments respectively.*

If there is a solution then the dual of $X \circ Y$ is $X \circ Y$ or $Y \circ X$. Thus, for all four assignments of truth-values to X and Y, one of the following four equations must be valid, the number of the equation being independent of the assignment under consideration.

$$X \circ Y =_T X \ (1), \quad X \circ Y =_T \overline{X} \ (2),$$
$$X \circ Y =_T Y \ (3), \quad X \circ Y =_T \overline{Y} \ (4).$$

It follows, by a simple inductive argument, that the truth-value of any formula $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ $(n \geqq 2)$ of the system must be, for some i $(1 \leqq i \leqq n)$, independent of the truth-values of $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$, the value of i being independent of the truth-values of $X_1, \ldots, X_n$. Thus disjunction is not definable and the system is functionally incomplete, contrary to our hypothesis. Hence there is no solution.

Let us now consider the above cases (i) and (ii). When m is odd $(m \geqq 3)$ our functors $^{\neg 1}$ and $^{\neg 2}$ will be as in a previous paper of the author[14]) and if $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ take the truth-values x, y, $\omega(x, y)$ respectively then

$$\omega(x, y) = \max\left(1, \min\left(m, x + y - \tfrac{1}{2}(m + 1)\right)\right)$$

[13]) See footnote 8.

[14]) This is the second paper referred to in footnote 1.

When m is even ($m \geqq 4$) and $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{A}}^1, \overline{\mathfrak{A}}^2, \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ take the truth-values $x, y, f(x), g(x), \omega(x, y)$ respectively

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2} m + 1 - x \ (x = 1, \ldots, \tfrac{1}{2} m), \\ f(x) &= x - \tfrac{1}{2} m \ (x = \tfrac{1}{2} m + 1, \ldots, m), \\ g(x) &= x + \tfrac{1}{2} m \ (x = 1, \ldots, \tfrac{1}{2} m), \\ g(x) &= \tfrac{3}{2} m + 1 - x \ (x = \tfrac{1}{2} m + 1, \ldots, m), \\ \omega(x, y) &= \max(1, \min(m, 2x + y - m - 1)). \end{aligned}$$

Theorem 5. *The functors $\overline{\ \ }^1, \overline{\ \ }^2, \circ$ form, for all odd values of m ($m \geqq 3$), a complete set of independent connectives for the m-valued propositional calculus. This set is self-dual and the dual of a formula may be obtained by writing it backwards and interchanging the functors $\overline{\ \ }^1$ and $\overline{\ \ }^2$.*

It has already been shown[15]) that each of the functors $\overline{\ \ }^1, \overline{\ \ }^2$ is the dual of the other. Thus, in order to establish the self-duality of the set of primitives and the rule for obtaining the dual of a formula, it will be sufficient to show that

$$m + 1 - \omega(m + 1 - x, m + 1 - y) = \omega(y, x).$$

We have

$$\begin{aligned} & m + 1 - \omega(m + 1 - x, m + 1 - y) \\ &\quad = m + 1 - \max\bigl(1, \min(m, m + 1 - x + m + 1 - y - \tfrac{1}{2}(m + 1))\bigr) \\ &\quad = \min(m, m + 1 - \min(m, \tfrac{3}{2}(m + 1) - y - x)) \\ &\quad = \min\bigl(m, \max(1, y + x - \tfrac{1}{2}(m + 1))\bigr) \\ &\quad = \max\bigl(1, \min(m, y + x - \tfrac{1}{2}(m + 1))\bigr) \\ &\quad = \omega(y, x). \end{aligned}$$

We next consider the independence of the primitives. If

$$x, y \in \{\tfrac{1}{2}(m + 1), \ldots, m\}$$

then[16])

$$g(x), \omega(x, y) \in \{\tfrac{1}{2}(m + 1), \ldots, m\}.$$

Since $\overline{\mathfrak{A}}^1$ takes the truth-value 1 when $\mathfrak{A}$ takes the truth-value $\frac{1}{2}(m + 1)$ the independence of the functor $\overline{\ \ }^1$ follows at once. The independence proof for the functor $\overline{\ \ }^2$ is similar, the set under consideration now being

$$\{1, \ldots, \tfrac{1}{2}(m + 1)\},$$

and the proof for the functor $\circ$ is trivial.

In order to establish functional completeness we shall define the functors $\rightarrow$, and $T(\ )$. We first make the definitions

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{A}}^{i,1} &=_{df} \overline{\mathfrak{A}}^{i} && (i = 1, 2), \\ \overline{\mathfrak{A}}^{i,j+1} &=_{df} \overline{\overline{\mathfrak{A}}^{i,j}}^{i} && (i = 1, 2; j = 1, 2, \ldots), \\ V(\mathfrak{A}) &=_{df} \overline{\mathfrak{A}}^1 \circ \overline{\mathfrak{A}}^{1,2} && (m = 3), \\ \mathfrak{A} \circ_1 \mathfrak{B} &=_{df} \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}, \\ \mathfrak{A} \circ_{i+1} \mathfrak{B} &=_{df} (\mathfrak{A} \circ_i \mathfrak{B}) \circ \mathfrak{B} && (i = 1, 2, \ldots), \\ V(\mathfrak{A}) &=_{df} \overline{\mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}}^1 \circ \overline{\mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}}^1 \\ & && (m = 5, 7, \ldots). \end{aligned}$$

---

15) *Op. cit.*

16) As in the following theorem, the functor $\overline{\ \ }^2$ is associated with the function $g(\ )$.

In order to justify the last of the above definitions we note that, if $\mathfrak{A}$ takes the truth-value x, then

(i) if $x \leq \frac{1}{2}(m+1) - 1$ then $\mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}$ takes a truth-value not exceeding

$$\max\left(1, (\tfrac{1}{2}(m+1) - 1)^2 - (\tfrac{1}{2}(m+1) - 2)\tfrac{1}{2}(m+1)\right)$$
$$= \max(1, \tfrac{1}{4}(m+1)^2 - (m+1) + 1 - \tfrac{1}{4}(m+1)^2 + (m+1)) = 1\,,$$

since the truth-value of each formula $\mathfrak{A} \circ_i \mathfrak{A}$ $(i = 1, \ldots, \frac{1}{2}(m+1) - 2)$ must belong to the set $\{1, \ldots, \frac{1}{2}(m+1)\}$ and must therefore be less than m. Since 1 is the least truth-value it follows at once that the formula $\mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}$ takes the truth-value 1.

(ii) if $x \geq \frac{1}{2}(m+1) + 1$ then, for similar reasons, $\mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}$ takes the truth-value m.

(iii) if $x = \frac{1}{2}(m+1)$ then, for all i $(i = 1, 2, \ldots)$, $\mathfrak{A} \circ_i \mathfrak{A}$ takes the truth-value $\frac{1}{2}(m+1)$.

Hence, in the respective cases, the formula

$$\overline{\mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}^1}$$

takes the truth-values 2, 2, 1 and $V(\mathfrak{A})$ always takes the truth-value 1.

It follows at once that we may make the definition

$$T(\mathfrak{A}) =_{\mathrm{df}} \overline{V(\mathfrak{A})^1}\,.$$

We shall now procede to define the functor $^-$ and we first note that, by the duality principle, we may make the definition

$$F(\mathfrak{A}) =_{\mathrm{df}} \overline{\mathfrak{A}}^{2,2} \circ \overline{\mathfrak{A}}^2 \ (m = 3)\,,$$

$$F(\mathfrak{A}) =_{\mathrm{df}} \overline{\mathfrak{A} \otimes_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}^2} \circ \overline{\mathfrak{A} \otimes_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}^2} \ (m = 5, 7, \ldots)\,,$$

where $\mathfrak{A} \otimes_i \mathfrak{A}$ is obtained from $\mathfrak{A} \circ_i \mathfrak{A}$ by writing it backwards $(i = 2, 3, \ldots)$. We then make the definition

$$\mathfrak{A}^{\times} =_{\mathrm{df}} \overline{\mathfrak{A}}^{2,1/2(m+1)} \circ ((\mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}) \circ F(\mathfrak{A}))\,.$$

We shall show that if $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{\times}$ take the truth-values x, $\zeta(x)$ respectively then

$$\zeta(x) = m + 1 - x \ (x \leq \tfrac{1}{2}(m+1) - 1)\,,$$
$$\zeta(x) = m \ (x \geq \tfrac{1}{2}(m+1))\,.$$

If $x \leq \frac{1}{2}(m+1) - 1$ then the formulae

$$\overline{\mathfrak{A}}^{2,1/2(m+1)},\ \mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A},\ F(\mathfrak{A})$$

take the truth-values $m + 1 - x$, 1, m respectively. Hence the formula

$$(\mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}) \circ F(\mathfrak{A})$$

takes the truth-value $\frac{1}{2}(m+1)$ and $\mathfrak{A}^{\times}$ takes the truth-value $m + 1 - x$. If $x \geq \frac{1}{2}(m+1) + 1$ then the formulae

$$\overline{\mathfrak{A}}^{2,1/2(m+1)},\ \mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A},\ F(\mathfrak{A})$$

take the truth-values x, m, m respectively. Thus the formula

$$(\mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}) \circ F(\mathfrak{A})$$

takes the truth-value m and the truth-value of $\mathfrak{A}^\times$ is given by

$$\max(1, \min(m, x + m - \tfrac{1}{2}(m+1)) = m\,.$$

If $x = \frac{1}{2}(m+1)$ then the formulae

$$\overline{\mathfrak{A}}^{2, 1/2(m+1)},\ \mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A},\ F(\mathfrak{A})$$

take the truth-values

$$\tfrac{1}{2}(m+1),\ \tfrac{1}{2}(m+1),\ m$$

respectively and it follows, by an argument similar to that given above, that $\mathfrak{A}^\times$ takes the truth-value m.

We next make the definition

$$\overline{\mathfrak{A}}^3 =_{df} \mathfrak{A}^\times \circ \overline{(\mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}) \circ F(\mathfrak{A})}^{1, 1/2(m+1)}$$

and we shall show that if $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}^3$ take the truth-values x, $\nu(x)$ respectively then

$$\nu(x) = m + 1 - x\ (x \leqq \tfrac{1}{2}(m+1) - 1)\,,$$
$$\nu(x) = \tfrac{1}{2}(m+1)\ (x \geqq \tfrac{1}{2}(m+1))\,.$$

If $x \leqq \frac{1}{2}(m+1) - 1$ then

$$\mathfrak{A}^\times,\ (\mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}) \circ F(\mathfrak{A})$$

take[17] the truth-values $m + 1 - x$, $\frac{1}{2}(m+1)$ respectively and the result follows at once. If $x \geqq \frac{1}{2}(m+1)$ then the above formulae both take the truth-value m. Hence the formula

$$\overline{(\mathfrak{A} \circ_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A}) \circ F(\mathfrak{A})}^{1, 1/2(m+1)}$$

takes the truth-value 1 and the result follows at once.

It now follows immediately from our rule for constructing the dual of a formula that, if we make the definitions

$$\mathfrak{A}^+ =_{df} (V(\mathfrak{A}) \circ (\mathfrak{A} \otimes_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A})) \circ \overline{\mathfrak{A}}^{1, 1/2(m+1)}\,,$$
$$\overline{\mathfrak{A}}^4 =_{df} \overline{V(\mathfrak{A}) \circ (\mathfrak{A} \otimes_{1/2(m+1)-2} \mathfrak{A})}^{2, 1/2(m+1)} \circ \mathfrak{A}^+$$

and $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}^4$ take the truth-values x, $\theta(x)$ respectively, then

$$\theta(x) = \tfrac{1}{2}(m+1)\ (x \leqq \tfrac{1}{2}(m+1))\,,$$
$$\theta(x) = m + 1 - x\ (x \geqq \tfrac{1}{2}(m+1) + 1)\,.$$

Hence we may make the definition

$$\overline{\mathfrak{A}} =_{df} \overline{\mathfrak{A}}^3 \circ \overline{\mathfrak{A}}^4$$

and this definition is self-dual.

We then define implication by

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} =_{df} \overline{(F(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A}) \circ \big((F(\mathfrak{A}) \circ (V(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A})) \circ \overline{\mathfrak{B}}\big)}\,.$$

---

[17] *Cf.* the discussion of $\zeta(x)$, *supra*.

In order to justify this definition we note that if

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \overline{(F(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A}) \circ \left((F(\mathfrak{A}) \circ (V(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A})) \circ \mathfrak{B}\right)}$$

take the truth-values x, y, $c(x, y)$ respectively then

(i) if $x \leqq \frac{1}{2}(m+1)$ the formulae

$$F(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A},\ V(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A},\ F(\mathfrak{A}) \circ (V(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A})$$

takes the truth-values $x + \frac{1}{2}(m+1) - 1$, 1, $\frac{1}{2}(m+1)$ respectively. Hence the formula

$$\left(F(\mathfrak{A}) \circ (V(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A})\right) \circ \overline{\mathfrak{B}}$$

takes the truth-value $m + 1 - y$ and

$$\begin{aligned} c(x,y) &= m+1-\max\left(1, \min\left(m, x+\tfrac{1}{2}(m+1) - 1 + m + 1 - y - \tfrac{1}{2}(m+1)\right)\right) \\ &= m+1-\max(1, \min(m, m+x-y)) \\ &= \min(m, \max(1, 1-x+y)) \\ &= (\text{since } 1 - x + y \leqq m) \max(1, 1-x+y)\,. \end{aligned}$$

(ii) if $x > \frac{1}{2}(m+1)$ then the formulae

$$F(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A},\ V(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A},\ F(\mathfrak{A}) \circ (V(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A})$$

take the truth-values m, $x + 1 - \frac{1}{2}(m+1)$, x respectively. Hence the formula

$$\left(F(\mathfrak{A}) \circ (V(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A})\right) \circ \overline{\mathfrak{B}}$$

takes the truth-value $\min(m, \frac{1}{2}(m+1)+x-y)$ (since $\frac{1}{2}(m+1)+x-y > 1$) and

$$\begin{aligned} c(x,y) &= m+1-\max\left(1, \min\left(m, \tfrac{1}{2}(m+1) - 1 + \min(m, \tfrac{1}{2}(m+1)+x-y)\right)\right) \\ &= \min\left(m, \max\left(1, \tfrac{1}{2}(m+1) + 1 - \min(m, \tfrac{1}{2}(m+1)+x-y)\right)\right) \\ &= \min\left(m, \max\left(1, 2 - \tfrac{1}{2}(m+1), 1-x+y\right)\right). \end{aligned}$$

But $2 - \frac{1}{2}(m+1) < 1$ and $1 - x + y \leqq m$. Hence

$$c(x, y) = \max(1, 1-x+y)\,.$$

The functional completeness of the system now follows at once.

Theorem 6. *The functors $^{-1}$, $^{-2}$, $\circ$ form, for all even values of m ($m \geqq 4$), a complete set of independent connectives for the m-valued propositional calculus. This set is self-dual and the dual of a formula may be obtained by interchanging the functors $^{-1}$ and $^{-2}$.*

In order to establish the self-duality of the set of primitives and the rule for obtaining the dual of a formula it will be sufficient to show that

$$m + 1 - \omega(m+1-x, m+1-y) = \omega(x, y),$$
$$m + 1 - f(m+1-x) = g(x).$$

We have

$$\begin{aligned} m + 1 - \omega(m+1-x, m+1-y) & \\ &= m+1-\max(1, \min(m, 2m+2-2x+m+1-y-m-1)) \\ &= \min\left(m, \max(1, m+1-(2m+2-2x-y))\right) \\ &= \max(1, \min(m, 2x+y-m-1)) \\ &= \omega(x, y)\,. \end{aligned}$$

If $x \leqq \frac{1}{2}m$ then $m+1-x \geqq \frac{1}{2}m+1$ and

$$\begin{aligned} m+1-f(m+1-x) \\ &= m+1-(m+1-x-\tfrac{1}{2}m) \\ &= x+\tfrac{1}{2}m \\ &= g(x). \end{aligned}$$

If $x \geqq \frac{1}{2}m+1$ then $m+1-x \leqq \frac{1}{2}m$ and

$$\begin{aligned} m+1-f(m+1-x) \\ &= m+1-(\tfrac{1}{2}m+1-m-1+x) \\ &= \tfrac{3}{2}m+1-x \\ &= g(x). \end{aligned}$$

The independence of the functor $^{-2}$ follows, by the usual type of inductive argument[18]), from the fact that if

$$x, y \leqq \tfrac{1}{2}m$$

then

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &\leqq \max(1, 2\cdot\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}m-m-1) \\ &= \max(1, \tfrac{1}{2}m-1) < \tfrac{1}{2}m, \end{aligned}$$

$$f(x) = \tfrac{1}{2}m+1-x \leqq \tfrac{1}{2}m \ (\text{since } x \geqq 1).$$

The independence of the functor $^{-1}$ follows similarly by consideration of the case $x, y \geqq \frac{1}{2}m+1$ and the independence of the functor $\circ$ is trivial.

We now establish the functional completeness of the system. We define the functors $\circ_i$ $(i=1,2,\ldots)$, $^{-i,j}$ $(i=1,2; j=1,2,\ldots)$ as in the proof of the previous theorem and we then make the definition

$$\mathfrak{A}^- =_{\mathrm{df}} \mathfrak{A} \circ_{1/_2 m-1} \mathfrak{A}.$$

Thus if $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^-$ take the truth-values x, $\eta(x)$ respectively then

$$\eta(x) = 1 \ (x=1,\ldots,\tfrac{1}{2}m),$$
$$\eta(x) = m \ (x=\tfrac{1}{2}m+1,\ldots,m).$$

We next define the functors $*$, $'$ of Theorem 1 and the functors $W_i(\ )$ such that if $\mathfrak{A}$, $W_i(\mathfrak{A})$ take the truth-values x, $\tau_i(x)$ respectively then

$$\tau_i(x) = i \qquad (i=1,\ldots,m).$$

We make the definitions

$$\begin{aligned} W_1(\mathfrak{A}) &=_{\mathrm{df}} \overline{\mathfrak{A}}^{1\,-}, \\ W_{1/_2 m+1}(\mathfrak{A}) &=_{\mathrm{df}} \overline{W_1(\mathfrak{A})}^2, \\ \mathfrak{A}^* &=_{\mathrm{df}} W_{1/_2 m+1}(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A}, \\ W_{i+1}(\mathfrak{A}) &=_{\mathrm{df}} W_i(\mathfrak{A})^* \quad (i=1,\ldots,\tfrac{1}{2}m-1, \tfrac{1}{2}m+1,\ldots,m-1), \\ \mathfrak{A}' &=_{\mathrm{df}} W_{1/_2 m}(\mathfrak{A}) \circ \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

18) See footnote 8.

We are now able to define functors $J_i(\ )$ such that if $\mathfrak{A}$, $J_i(\mathfrak{A})$ take the truth-values $x, j_i(x)$ respectively then

$$\left.\begin{array}{l} j_i(i) = 1, \\ j_i(x) = m\ (x = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m) \end{array}\right\} (i = 1, \ldots, m)\,.$$

We make the definitions[19])

$$\begin{array}{ll} J_{1/_2 m}(\mathfrak{A}) =_{\mathrm{df}} (\bar{\mathfrak{A}}^{2,2} \circ \mathfrak{A})'^{\,-}, & \\ J_i(\mathfrak{A}) =_{\mathrm{df}} J_{i+1}(\mathfrak{A}^*) & (i = 1, \ldots, \tfrac{1}{2}m - 1)\,, \\ J_i(\mathfrak{A}) =_{\mathrm{df}} J_{i-1}(\mathfrak{A}') & (i = \tfrac{1}{2}m + 1, \ldots, m)\,. \end{array}$$

In order to justify the above definition of the functor $J_{1/2m}(\ )$ we note that if $\mathfrak{A}$, $\bar{\mathfrak{A}}^{2,2} \circ \mathfrak{A}$ take the truth-values x, $\varkappa(x)$ respectively then, if $x \leqq \frac{1}{2}m$,

$$\begin{aligned} \varkappa(x) &= \max(1, \min(m, 2(\tfrac{3}{2}m + 1 - x - \tfrac{1}{2}m) + x - m - 1)) \\ &= \max(1, \min(m, m + 1 - x)) = m + 1 - x \end{aligned}$$

and, if $x \geqq \frac{1}{2}m + 1$,

$$\begin{aligned} \varkappa(x) &= \max\big(1, \min(m, 2(\tfrac{3}{2}m + 1 - (\tfrac{3}{2}m + 1 - x)) + x - m - 1)\big) \\ &= \max(1, \min(m, 3x - m - 1))\,. \end{aligned}$$

Thus

$$\varkappa(x) \geqq \tfrac{1}{2}m + 2\ (x = 1, \ldots, \tfrac{1}{2}m - 1, \tfrac{1}{2}m + 1, \ldots, m)$$

and

$$\varkappa(\tfrac{1}{2}m) = \tfrac{1}{2}m + 1\,.$$

Hence the formula

$$(\bar{\mathfrak{A}}^{2,2} \circ \mathfrak{A})'$$

takes the truth-value $\frac{1}{2}m$ when $x = \frac{1}{2}m$ and, in all other cases, it takes a truth-value greater than $\frac{1}{2}m$. The result now follows at once by consideration of the truth-table of the functor $^{-}$.

We now proceed to define the functors $S_{ij}(\ ,\ )$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 2, \ldots, m)$ such that if $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $S_{ij}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ take the truth-values x, y, $s_{ij}(x, y)$ respectively then

$$\begin{array}{ll} s_{ij}(i, y) = y\,, & \\ s_{ij}(x, y) = j & (x = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m). \end{array}$$

We first note that if we make the definition[20])

$$\Xi(\mathfrak{A}) =_{\mathrm{df}} (J_1(\mathfrak{A})^{\prime, m-2})^{*, 1/_2 m - 1}$$

and A, $\Xi(\mathfrak{A})$ take the truth-values x, $\alpha(x)$ respectively then

$$\begin{array}{ll} \alpha(1) = \tfrac{1}{2}m\,, & \\ \alpha(x) = \tfrac{1}{2}m + 1 & (x = 2, \ldots, m)\,. \end{array}$$

---

[19]) See the book referred to in footnote 4, p. 18.

[20]) The abbreviations made here are to be interpreted in the same way as corresponding abbreviations made earlier in this paper.

We then define the functor $S(\ ,\ )$ by

$$S(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =_{\mathrm{df}} \Xi(\mathfrak{B}) \circ (J_1(\mathfrak{A})^{*, \frac{1}{2}m-1} \circ \mathfrak{B}).$$

We shall show that if $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ take the truth-values x, y, $s(x, y)$ respectively then

$$\begin{aligned} s(1, y) &= y && (y = 1, \ldots, m), \\ s(x, 1) &= m - 1 && (x = 2, \ldots, m), \\ s(x, y) &= m && (x = 2, \ldots, m;\ y = 2, \ldots, m). \end{aligned}$$

If $x = 1$ and $y \geqq 2$ then

$$J_1(\mathfrak{A})^{*, \frac{1}{2}m-1}$$

takes the truth-value $\frac{1}{2}m$ and

$$J_1(\mathfrak{A})^{*, \frac{1}{2}m-1} \circ \mathfrak{B}$$

takes the truth-value $y - 1$. Since $\Xi(\mathfrak{B})$ takes the truth-value $\frac{1}{2}m + 1$, $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ takes the truth-value y. If $x = y = 1$ then the formulae

$$J_1(\mathfrak{A})^{*, \frac{1}{2}m-1}, \ \Xi(\mathfrak{B})$$

both take the truth-value $\frac{1}{2}m$ and the result follows at once.

If $x, y \geqq 2$ then

$$J_1(\mathfrak{A})^{*, \frac{1}{2}m-1} \circ \mathfrak{B}, \ \Xi(\mathfrak{B})$$

take the truth-values m, $\frac{1}{2}m + 1$ respectively and $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ takes the truth-value m. If $x \geqq 2$ and $y = 1$ then

$$J_1(\mathfrak{A})^{*, \frac{1}{2}m-1}, \ \Xi(\mathfrak{B})$$

take the truth-values m, $\frac{1}{2}m$ respectively and $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ takes the truth-value $m - 1$.

We are now in a position to define the functors $S_{1m}(\ ,\ )$. We make the definition

$$S_{1m}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =_{\mathrm{df}} S(\mathfrak{A}, S(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})).$$

If $\mathfrak{A}$ takes the truth-value 1 then $S(\mathfrak{A}, S(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}))$ takes the same truth-value as $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ and therefore as $\mathfrak{B}$. If $\mathfrak{A}$ does not take the truth-value 1 then $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ does not take the truth-value 1. Hence $S(\mathfrak{A}, S(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}))$ takes the truth-value m.

We then make the definition

$$S_{1j}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =_{\mathrm{df}} \Xi(S_{1m}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})) \circ \left(((J_m(J_1(\mathfrak{A})))^{\prime, \frac{1}{2}(m+j-2)})^{*, \frac{1}{2}j-1} \circ S_{1m}(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B})\right) \quad (j = 2, 4, \ldots, m-2).$$

If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ take the truth-values 1, y respectively and $y \geqq 2$ then

$$S_{1m}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), \ \Xi(S_{1m}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})), \ \left((J_m(J_1(\mathfrak{A})))^{\prime; \frac{1}{2}(m+j-2)}\right)^{*, \frac{1}{2}j-1}$$

take the truth-values y, $\frac{1}{2}m + 1$, $\frac{1}{2}m$ respectively and the result follows at once. If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ both take the truth-value 1 then these formulae take the truth-values 1, $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}m$ respectively and the result follows at once. If $\mathfrak{A}$ does not

take the truth-value 1 then these formulae take the truth-values m, $\frac{1}{2}m+1$, $\frac{1}{2}j$ respectively. Hence the formula

$$\left((J_m(J_1(\mathfrak{A})))^{\prime,\, {}^1\!/_2(m+j-2)}\right)^{*,\, {}^1\!/_2 j-1} \circ S_{1m}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

takes the truth-value $j-1$ and the result follows at once.

In order to define the functors $S_{1j}(\ ,\ )$ for odd values of j ($j \geqq 3$) we first consider the particular case $j = m-1$. We make the definitions

$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} =_{\mathrm{df}} (\mathfrak{A}^{*,\, {}^1\!/_2 m-1} \circ (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A})^*)^-,$$

$$S_{1,m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =_{\mathrm{df}} S_{1m}(J_m(J_1(\mathfrak{A}) \,\&\, J_m(\mathfrak{B})),\ S_{1m}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})^{*\prime}).$$

If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ both take the truth-value 1 then

$$\mathfrak{A}^{*,\, {}^1\!/_2 m-1},\ (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A})^*$$

take the truth-values $\frac{1}{2}m$, 2 respectively and $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ takes the truth-value 1. If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ take the truth-values 1, m respectively then

$$\mathfrak{A}^{*,\, {}^1\!/_2 m-1},\ (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A})^*$$

take the truth-values $\frac{1}{2}m$, m respectively and

$$\mathfrak{A}^{*,\, {}^1\!/_2 m-1} \circ (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A})^*$$

takes the truth-value $m-1$. Hence $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ takes the truth-value m. If $\mathfrak{A}$ takes the truth-value m then $\mathfrak{A}^{*,1/2m-1}$ also takes the truth-value m and it follows easily that $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ takes the truth-value m.

The above results enable us to justify the definition of the functor $S_{1,m-1}(\ ,\ )$. If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ take the truth-values 1, m respectively then the formula

$$J_m(J_1(\mathfrak{A}) \,\&\, J_m(\mathfrak{B}))$$

takes the truth-value m and $S_{1,m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ takes the truth-value m as required. In the remaining m^2-1 cases the formula

$$J_m(J_1(\mathfrak{A}) \,\&\, J_m(\mathfrak{B}))$$

takes the truth-value 1 and $S_{1,m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ takes the same truth-value as the formula

$$S_{1m}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})^{*\prime}$$

which we may therefore consider instead. If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ take the truth-values 1, y ($y \leqq m-1$) respectively then the formulae

$$S_{1m}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}),\ S_{1m}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})^*$$

take the truth-values y, $y+1$ respectively and the result follows at once. If $\mathfrak{A}$ does not take the truth-value 1 then both these formulae take the truth-value m and $S_{1m}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})^{*\prime}$ takes the truth-value $m-1$ as required.

We then make the definition

$$S_{1j}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) =_{\mathrm{df}} \Xi(S_{1,m-1}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})) \circ \left(\left((J_m(J_1(\mathfrak{A})))^{\prime,\, {}^1\!/_2(m+j-1)}\right)^{*,\, {}^1\!/_2(j-1)} \circ S_{1,m-1}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\right)$$

$$(j = 3, 5, \ldots, m-3).$$

If $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ both take the truth-value 1 then the formulae

$$S_{1,m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}),\ \Xi(S_{1,m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})),\ \left((J_m(J_1(\mathfrak{A})))^{\prime,\, {}^1\!/_2(m+j-1)}\right)^{*,\, {}^1\!/_2(j-1)}$$

take the truth-values $1, \frac{1}{2}m, \frac{1}{2}m$ respectively and $S_{1j}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ takes the truth-value 1 as required. If $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ take the truth-values $1, y$ $(y \geqq 2)$ respectively then the above four formulae take the truth-values $y, \frac{1}{2}m+1, \frac{1}{2}m, y$ respectively as required. If $\mathfrak{A}$ does not take the truth-value 1 then these formulae take the truth-values $m-1, \frac{1}{2}m+1, \frac{1}{2}(j+1), j$ respectively as required.

Having defined the functors $S_{1j}(\ ,\ )$ for all j $(j \geqq 2)$ we are now able to make the definitions

$$S_{ij}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =_{\mathrm{df}} S_{1j}(J_i(\mathfrak{A}), \mathfrak{B}) \quad (i = 2, \ldots, m; j = 2, \ldots, m).$$

Thus we have defined all the functors $S_{ij}(\ ,\ )$ $(i = 1, \ldots, m; j = 2, \ldots, m)$.

The functional completeness of the system can now be established by consideration of an arbitrary truth-table of n $(n \geqq 1)$ arguments. We shall show that we can construct a formula $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ which takes the truth-value y_j when $X_1, \ldots, X_n$ take the truth-values $x_1, \ldots, x_n$ respectively, where

$$j = \sum_{i=1}^{n} (m^{i-1}(x_i - 1)) + 1,$$

provided only that

$$y_1, \ldots, y_{m^n} \in \{1, \ldots, m\}.$$

In order to do this we shall show, by induction on k, that we can construct a formula

$$\Psi_k(X_1, \ldots, X_n)$$

which takes the required truth-value whenever the values of $x_1, \ldots, x_n$ are such that $j \leqq k$ and which takes the truth-value 1 in all other cases $(k = 0, 1, \ldots, m^n)$.

If $k = 0$ then $\Psi_0(X_1, \ldots, X_n)$ must take the truth-value 1 always and we may take for this formula the formula

$$W_1(X_1) \circ (X_2 \circ (X_3 \circ \ldots X_n) \ldots).$$

We now assume the result for k and prove it for $k+1$. If $y_{k+1} = 1$ then it follows at once that $\Psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_n)$ may be taken to be $\Psi_k(X_1, \ldots, X_n)$. If $y_{k+1} \neq 1$ then $\Psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_n)$ must take the same truth-value as $\Psi_k(X_1, \ldots, X_n)$ except when $j = k+1$, in which case it must take the truth-value y_{k+1}. Hence $\Psi_{k+1}(X_1, \ldots, X_n)$ may be taken as

$$S_{m, y_{k+1}}(J_{z_1}(X_1) \,\&\, (J_{z_2}(X_2) \,\&\, \cdots \,\&\, J_{z_n}(X_n) \ldots), \Psi_k(X_1, \ldots, X_n))$$

where $z_1, \ldots, z_n$ are those values of $x_1, \ldots, x_n$ respectively for which $j = k+1$.

In particular the result holds when $k = m^n$. Thus we can construct the formula $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ and the system is functionally complete.

The results which we have obtained in Theorem 6 are inferior to those obtained in Theorems 1 and 5 in the sense that we have not given a self-dual definition of the negation functor of Łukasiewicz. In fact it is impossible to do this as may be seen from the following theorem.

Theorem 7. *When m is even the m-valued propositional calculus does not possess a complete self-dual set of three independent connectives of* 2, 1, 1 *arguments*

respectively in terms of which the negation functor of Łukasiewicz *has a self-dual definition.*

In order to prove the theorem let us suppose that three such functors $\circ$, $\overline{\ \ }^1$, $\overline{\ \ }^2$ of 2, 1, 1 arguments respectively exist. Then the dual of $X \circ Y$ must be $X \circ Y$ or $Y \circ X$ and the duals of $\overline{X}^1$, $\overline{X}^2$ must be $\overline{X}^1$, $\overline{X}^2$ respectively or $\overline{X}^2$, $\overline{X}^1$ respectively.

Lemma 1. *The dual of $X \circ Y$ is $X \circ Y$.*

If the dual of $X \circ Y$ is $Y \circ X$ let $\beta(x, y)$ be the truth-value of $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ when $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ take the truth-values x, y respectively. Hence

$$\begin{aligned}\beta(1, m) &= m + 1 - \beta(m + 1 - m, m + 1 - 1)\\ &= m + 1 - \beta(1, m)\end{aligned}$$

and

$$m = 2\,\beta(1, m) - 1\,.$$

Hence m is odd, contrary to our hypothesis. Thus the lemma is proved.

Lemma 2. *The duals of $\overline{X}^1$, $\overline{X}^2$ are $\overline{X}^2$, $\overline{X}^1$ respectively.*

If the duals of $\overline{X}^1$, $\overline{X}^2$ are $\overline{X}^1$, $\overline{X}^2$ respectively then, by Lemma 1, every formula is self-dual. Thus disjunction is not definable and the system is functionally incomplete, contrary to our hypothesis. Thus the lemma is proved.

Proof of the Main Theorem. If negation is definable in terms of the functor $\circ$ alone then we can define the functor $\overline{\ \ }^2$ in terms of the functors $\circ$ and $\overline{\ \ }^1$ by means of the definition

$$\overline{\mathfrak{A}}^2 =_{\mathrm{df}} \overline{\overline{\mathfrak{A}}^{1}}\,,$$

since the dual of $\overline{X}^1$ is $\overline{X}^2$. Thus the primitives are not independent, contrary to our hypothesis. Since the duals of $X \circ Y$, $\overline{X}^1$, $\overline{X}^2$ are $X \circ Y$, $\overline{X}^2$, $\overline{X}^1$ respectively no definition involving either or both of the functors $\overline{\ \ }^1$, $\overline{\ \ }^2$ can be self-dual and the theorem is proved.

(Received November 30, 1960)

Huber, H.
Math. Annalen 143, 463—464 (1961)

Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen. II

Nachtrag zu Math. Annalen 142, 385—398 (1961)

Von

Heinz Huber in Basel

8. Die in den Sätzen II—IV der genannten Arbeit enthaltenen asymptotischen Aussagen können erheblich verschärft werden. Das beruht darauf, daß die Abschätzung 7.3 (10) von $D_\delta(B(t))$ durch eine kleine Modifikation sehr verbessert werden kann: Unter der Voraussetzung

$$\delta(t) \neq 0 \quad \text{für } t > 0\,; \quad \delta(t) \to 0, \quad t \to +\infty\,, \tag{1}$$

gilt nämlich sogar

$$D_\delta(B(t)) = O(\log|\delta(t)|^{-1}),\ t \to +\infty\,. \tag{2}$$

Beweis: Setzen wir

$$n(\varkappa) = m(\varkappa^2 + 1/4),\ \varkappa > 0\,, \tag{3}$$

so ist nach 1.2 (5)

$$B(t) = 4 \sum_{\varkappa > \varkappa_0} n(\varkappa)\varkappa^{-3} \sin(\varkappa t)\,,$$

wenn $\varkappa_0 > 0$ so gewählt wird, daß $n(\varkappa) = 0$ für $0 < \varkappa \leq \varkappa_0$. Daraus folgt:

$$D_\delta(B(t)) = \frac{B(t+\delta(t)) - B(t)}{\delta(t)} = \frac{8}{\delta(t)} \sum_{\varkappa > \varkappa_0} n(\varkappa)\varkappa^{-3} \sin\left(\frac{\varkappa}{2}\delta\right) \cos\left(\varkappa t + \frac{\varkappa}{2}\delta\right). \tag{4}$$

Wegen (1) gibt es ein solches $t_0 > 0$, daß $\varkappa_0 < |\delta(t)|^{-1} < \infty$ für $t > t_0$. Dann folgt aus (4) für $t > t_0$:

$$|D_\delta(B(t))| \leq 8|\delta|^{-1} \sum_{\varkappa_0 < \varkappa \leq |\delta|^{-1}} n(\varkappa)\varkappa^{-3} \left|\sin\left(\frac{\varkappa}{2}\delta\right)\right| + 8|\delta|^{-1} \sum_{\varkappa > |\delta|^{-1}} n(\varkappa)\varkappa^{-3}.$$

Daraus ergibt sich wegen $\left|\sin\left(\frac{\varkappa}{2}\delta\right)\right| \leq \frac{\varkappa}{2}|\delta|$:

$$|D_\delta(B(t))| \leq 4 \sum_{\varkappa_0 < \varkappa \leq |\delta|^{-1}} n(\varkappa)\varkappa^{-2} + 8|\delta|^{-1} \sum_{\varkappa > |\delta|^{-1}} n(\varkappa)\varkappa^{-3},\ t > t_0\,. \tag{5}$$

Setzen wir

$$N(x) = \sum_{0 < \varkappa \leq x} n(\varkappa)\,, \quad M(x) = \sum_{\lambda \leq x} m(\lambda)\,, \tag{6}$$

so gilt wegen (3) $N(x) = M(x^2 + 1/4) - M(1/4)$ und somit nach 7.2 (1)

$$N(x) = O(x^2),\ x \to +\infty\,. \tag{7}$$

Aus (5) und (6) ergibt sich:

$$|D_\delta(B(t))| \leqq 4\int_{x_0}^{|\delta|^{-1}} x^{-2}\,dN(x) + 8|\delta|^{-1}\int_{|\delta|^{-1}}^{\infty} x^{-3}\,dN(x) = -4|\delta|^2 N(|\delta|^{-1}) +$$
$$+ 8\int_{x_0}^{|\delta|^{-1}} x^{-3} N(x)\,dx + 24|\delta|^{-1}\int_{|\delta|^{-1}}^{\infty} x^{-4} N(x)\,dx\,.$$

Daraus folgt nun wegen (1) und (7) in der Tat die Behauptung (2).

9. Wir geben nun die Modifikationen an, welche dank der besseren Abschätzung (2) möglich werden. Wendet man den Differenzenoperator D_δ unter der Voraussetzung (1) auf **1.2** (4) an, so findet man unter Berücksichtigung von (2) und von **7.3** (6), (7):

$$D_\delta(\Omega_2(t)) = 8e^{t/2} + 2\sum_{0<\lambda<1/4} m(\lambda)\,(1/4-\lambda)^{-1}\,e^{(1/4-\lambda)^{1/2}t} + 2m(1/4)t^2 +$$
$$+ 2m(1/4)t\delta + O(|\delta|e^{t/2}) + O(\log|\delta|^{-1}) + O(1)\,.$$

Daraus ergibt sich für $\delta(t) = \pm e^{-t/2}$:

$$D_\delta(\Omega_2(t)) = 8e^{t/2} + 2\sum_{0<\lambda<1/4} m(\lambda)\,(1/4-\lambda)^{-1} e^{(1/4-\lambda)^{1/2}t} + 2m(1/4)t^2 + O(t)\,.$$

Hieraus schließt man wie in 7.4:

$$\text{(8)}\qquad \Omega_1(t) = 8e^{t/2} + 2\sum_{0<\lambda<1/4} m(\lambda)\,(1/4-\lambda)^{-1} e^{(1/4-\lambda)^{1/2}t} + 2m(1/4)t^2 + O(t)\,.$$

Wendet man hierauf nochmals den Operator D_δ unter der Voraussetzung (1) an, und berücksichtigt man 7.3 (8) und $D_\delta(O(t)) = O(t|\delta|^{-1})$, so kommt

$$D_\delta(\Omega_1(t)) = 4e^{t/2} + 2\sum_{0<\lambda<1/4} m(\lambda)\,(1/4-\lambda)^{-1/2} e^{(1/4-\lambda)^{1/2}t} + O(t|\delta|^{-1}) + O(|\delta|e^{t/2})\,.$$

Daraus folgt für $\delta(t) = \pm t^{1/2}e^{-t/4}$:

$$D_\delta(\Omega_1(t)) = 4e^{t/2} + 2\sum_{0<\lambda<3/16} m(\lambda)\,(1/4-\lambda)^{-1/2} e^{(1/4-\lambda)^{1/2}t} + O(t^{1/2}e^{t/4})\,.$$

Hieraus schließt man wieder wie in 7.5:

$$\text{(9)}\qquad \Omega(t) = 4e^{t/2} + 2\sum_{0<\lambda<3/16} m(\lambda)\,(1/4-\lambda)^{-1/2} e^{(1/4-\lambda)^{1/2}t} + O(t^{1/2}e^{t/4})\,.$$

Mit der in 7.6 und 7.7 angewandten Schlußweise folgt dann aus (9):

$$\text{(10)}\qquad \psi(t) = e^t + \sum_{0<\lambda<3/16} m(\lambda)\,\alpha_\lambda^{-1} e^{\alpha_\lambda t} + O(t^{1/2}e^{3t/4}),\quad \alpha_\lambda = 1/2 + (1/4-\lambda)^{1/2},$$

$$\text{(11)}\qquad \pi(t) = \mathrm{Li}(e^t) + \sum_{0<\lambda<3/16} m(\lambda)\,\mathrm{Li}(e^{\alpha_\lambda t}) + O(t^{-1/2}e^{3t/4})\,.$$

(Eingegangen am 14. Februar 1961)

PRESTON, G. B.
Math. Annalen 143, 465 (1961)

Correction

To "Congruences on Brandt Semigroups" by G. B. PRESTON in Shrivenham, England, Math. Ann. 139, 91—94 (1959).

In the second paragraph of the paper of the above title I incorrectly attribute a false statement to V. V. VAGNER. The statement of VAGNER in question here is clear and correct in his paper.

(Received April 24, 1961)